Triangel under kurva

I en tidigare övning, *Tangent till en kurva*, tittade vi på hur arean blev för funktionen y =1/*x*. Det visade sig att arean var *konstant*, 2 areaenheter. Nu ska vi titta på samma problem men med funktionen

$$y = \frac{1}{x^2}$$

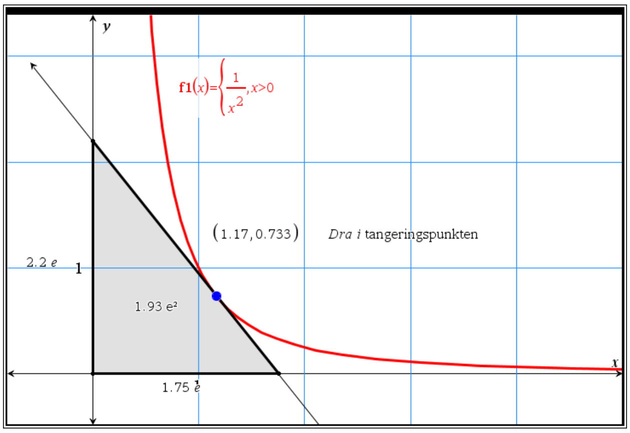
En tangent dras till den del av funktionen $y = 1/x^2$ som ligger i första kvadranten. Tangenten och axlarna bildar en triangel. Vad kan du säga om arean av denna triangel?

Vi ritar funktionen $y=1/x^2$ och drar sedan en tangent till kurvan och ser till att tangenten skär *x*– och *y*–axeln. Vi ritar sedan en triangel med hörn i origo och i skärningspunkterna med axlarna. Vi mäter sedan triangelns bas, höjd och area.

Genom att dra i tangeringspunkten ser vi hur arean för triangeln varierar. Vad kan du observera?

Teckna nu ett uttryck för hur arean beror av tangeringspunkten.

- Vi har här gjort den grundläggande konstruktionen. Vi ritar kurvan, drar en tangent och markerat tangeringspunken, skärningarna med *x*- respektive *y*-axeln. Sedan har vi ritat en triangel med hörn i dessa tre punkter.
- Därefter har vi gjort mätningar av bas, höjd och area hos triangeln. Dra nu i tangeringspunkten och se hur arean varierar.



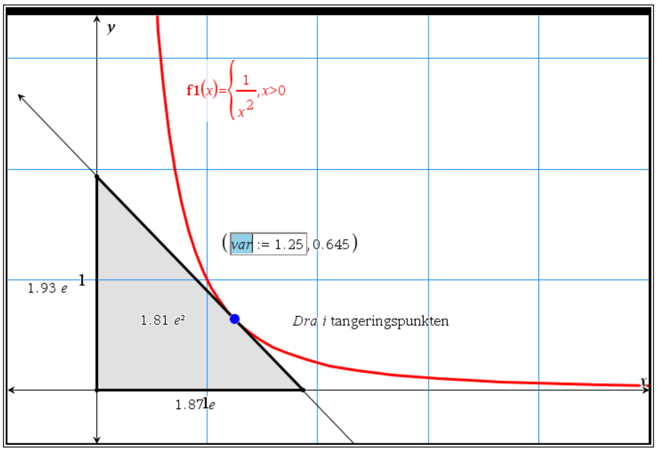
- Kan vi nu finna ett uttryck hur arean av triangeln beror på x-koordinaten för tangeringspunkten? Vi ser att arean minskar om x-koordinaten får ett större värde.
- Teckna först ett uttryck (en ekvation) för tangenten i en punkt $(a,\ 1/a^2)$. Du ska då beräkna tangentens *k*-värde med hjälp av derivatan i den punkten.
- Teckna sedan ett uttryck för triangels area. Basen i triangeln är ju *x*-koordinaten för tangentens skärning med *x*-axeln och höjden är *y*-koordinaten för tangentens skärning med *y*-axeln.
- Rita sedan den funktion som visar sambandet mellan *x*-koordinat och area hos triangeln.

Läraranvisning

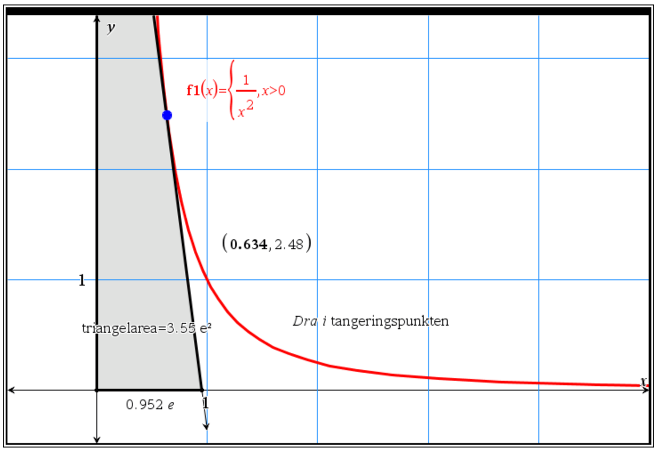
I en tidigare övning så tittade vi på funktionen $y = 1/x$. Denna uppgift är något svårare.

Ett fiffigt sätt att se hur arean variera beroende på värdet på x-koordinaten är att använda en funktion hos TI-Nspire som heter *capture*. Man fångar då in mätvärden som är lagrade i en variabel.

Börja med att högerklicka på bilden på mätvärdet för *x*-koordinaten för tangeringspunkten. Välj *Lagra* i menyn som kommer upp. Då ser du detta på skärmen. Istället för *var* skriver du nu in ett namn på variabeln, t ex *xkoord*. Gör likadant för areavärdet inne i triangeln. Kalla variabeln för *triangelarea*.



Nu har du lagrat värdena i variabler. Dra nu tangeringspunkten så att x-värdet blir litet. T. ex så här:



Infoga nu en sida med Listor & kalkylblad. Placera markören i formelfältet i kolumn A och skriv enligt bilden nästa spalt. Gör likadant i kolumn B.
Döp sedan kolumnerna till *x_värde* och *area*.

Ni infogas aktuella mätvärden i kalkylarket.

	A x_värde	B area	C	D	E
=	=capture('xkoord,1)	=capture('triangelarea,1)			
1	0.634481	3.5462			
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					
11					

Gå nu tillbaka till grafsidan och dra lugnt och stilla tangeringspunkten åt höger så långt som möjligt.

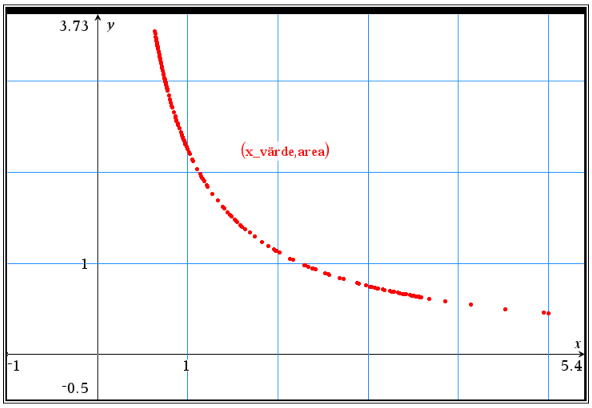
Nu infogas ett stort antal mätvärden från konstruktionen i listorna i kalkylarket. De är nu lagrade i variablerna *x_värde* och area.

	A x_värde	B area	C	D	E
=	=capture('xkoord,1)	=capture('triangelarea,1)			
1	0.634481	3.5462			
2	0.639121	3.52046			
3	0.645125	3.4877			
4	0.648067	3.47186			
5	0.650028	3.46139			
6	0.652969	3.4458			
7	0.656416	3.42771			
8	0.660122	3.40846			
9	0.662593	3.39575			
10	0.663828	3.38943			
11	0.665064	3.38314			

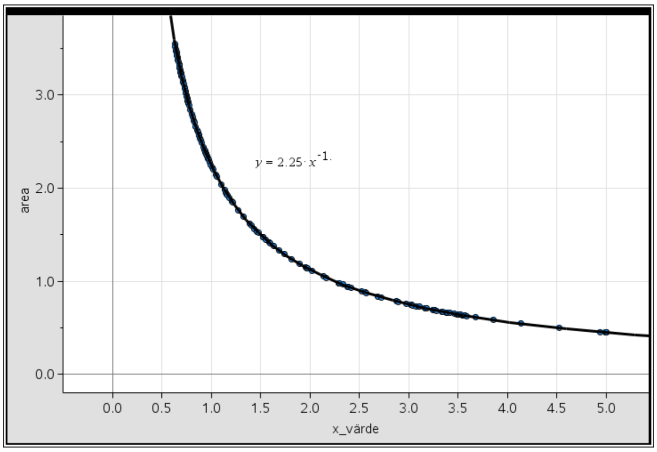
Öppna nu en ny grafsida och gå till Grafinmatning/ Redigera och välj alternativet *Spridningsdiagram*. Klicka i variablerna enligt nedan

s1 $\begin{cases} x \leftarrow x\_\text{värde} \\ y \leftarrow \text{area} \end{cases}$

Nu ritas spridningsdiagrammet (punktdiagrammet) upp. I bilden nedan har vi ställt in ett bra koordinatsystem och lagt till ett rutnät.



Man kan även rita detta diagram i appen Data & Statistik. Då klickar man bara i fälten på *x*- och *y*-axeln och lägger till variabler. En regressionsanalys med potensform ger resultatet $y = 2.25 \cdot x^{-1}$.



Nu över till höjdpunkten i övningen, nämligen att ta fram ett samband mellan *x*-koordinat och area för triangeln.

Alla beräkningar syns nedan. Vi har använt appen Anteckningar eftersom man kan skriva in sina kommentarer dör och formatera texten som man vill.

Vi ser att det stämmer med regressionsberäkningen.

Tricket här är få upp en ekvation för tangenten som innehåller variabeln *a*. Man kan naturligtvis göra de algebraiska beräkningarna för hand men här får man på en sida med allt. Gör man fel så är det lätt att gå in och ändra.

Derivatan av $y = 1/x^2$ är $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2}\right) \blacktriangleright \frac{-2}{x^3}$

Enpunktsformen för tangenten i punkten $x = a$: $y - \frac{1}{a^2} = \frac{-2}{a^3} \cdot (x-a) \blacktriangleright y - \frac{1}{a^2} = \frac{-2 \cdot (x-a)}{a^3}$

Vi löser ut y: $\text{solve}\left(y - \frac{1}{a^2} = \frac{-2 \cdot (x-a)}{a^3}, y\right) \blacktriangleright y = \frac{-(2 \cdot x - 3 \cdot a)}{a^3}$

skärning med y-axeln ($x=0$) ger $y = \frac{-(2 \cdot x - 3 \cdot a)}{a^3} | x=0 \blacktriangleright y = \frac{3}{a^2}$

Skärning med x-axeln ($y=0$) ger $\text{solve}\left(\frac{-(2 \cdot x - 3 \cdot a)}{a^3} = 0, x\right) \blacktriangleright x = \frac{3 \cdot a}{2}$

arean blir $\frac{\frac{3}{a^2} \cdot \frac{3 \cdot a}{2}}{2} \blacktriangleright \frac{9}{4 \cdot a}$

Arean är alltså omvänt proportionell mot x-koordinaten.

Glöm inte att ta bort denna sida innan du ger övningen till eleverna.

Här har vi också ritat sambandet i samma fönster som spridningsdiagrammet. Vi får en närmast perfekt passning.