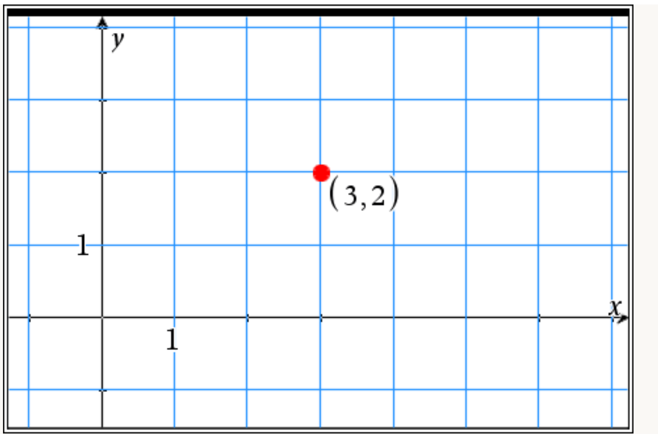
Riktningsfält

Riktningsfält är en grafisk representation av anti-derivator och mer generellt lösningar till differential-ekvationer. Riktningsfält visualiseras av idén om "lokal linearitet" - en deriverbar funktion beter sig approximativt som en linjär funktion inom små intervall. Med den idén kan du, om du vet värdet hos derivatan av en funktion vid en enda punkt, approximera en liten del av dess graf med ett rakt segment just vid den punkten och med den önskade lutningen. Om du vet derivatavärdet vid varje punkt kan du välja ut en stor mängd punkter inom ett område och plotta ett litet linjesegment vid varje punkt och därmed skapa ett riktningsfält. Resultatet är då ett kraftfullt sätt att visualisera lösningskurvor (grafer på lösningsfunktioner).

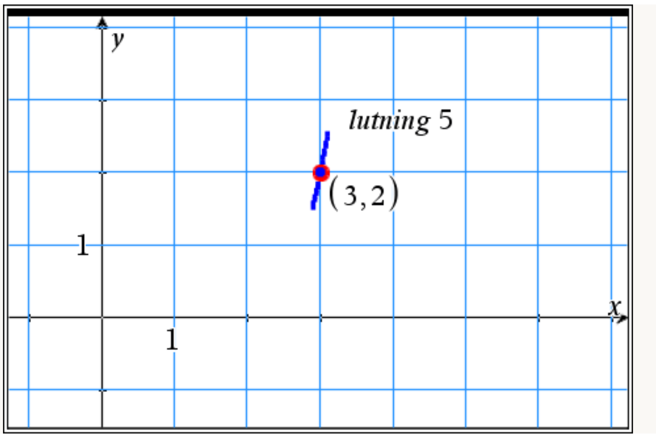
Antag att vi har differentialekvationen $y' = x + y$. Vi kan inte lösa denna d.e. genom att tänka baklänges men vi kan fundera på hur en lösning skulle kunna se ut. Vi vet att y' betyder lutningen hos y med avseende på x. Det betyder att varje lösning på denna d.e är en funktion *y* vars lutning vid vilken punkt som helst (*x*, *y*) på funktionen är lika med *x* + *y*.

Antag att vi har en lösning y till d.e. $y' = x + y$ som går igenom punkten (3, 2). Se figur



Lutningen hos y vid punkten (3, 2) måste då vara 3+2 =5

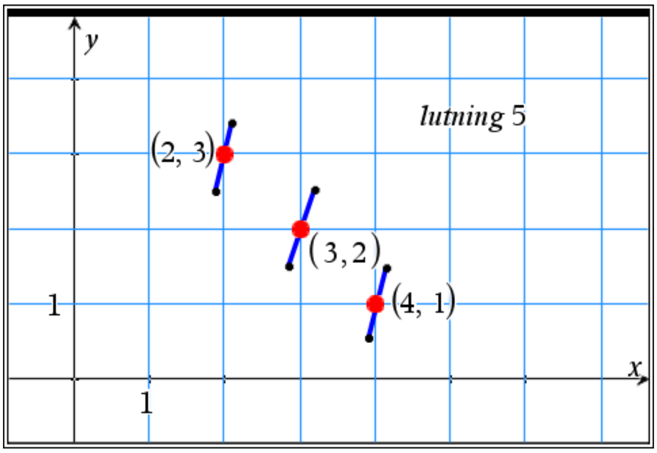
Även om vi inte vet hur exakt funktionen y ser ut, vet vi att vid punkten (3, 2) är funktionens lutning och därmed lutningen på tangenten till funktionen lika med 5.



Om vi andra lösningar till ekvationen, t.ex. sådana som går genom punkterna (3, 2) och (4, 1) så får vi samma värde på y' :

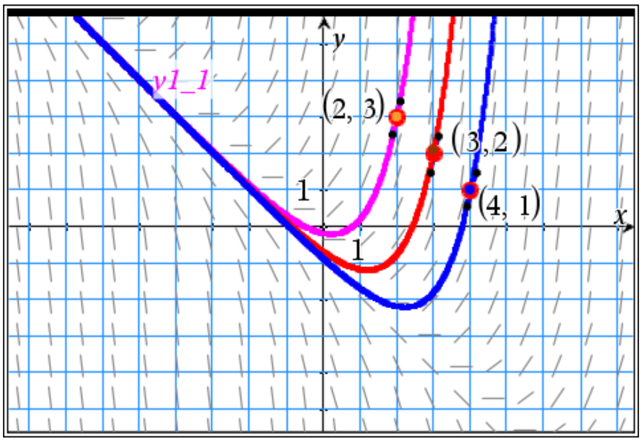
3+2 resp. 4+1 är ju båda lika med 5.

Detta betyder att tangenterna till lösningskurvan vid (2, 3) och (4, -1) har lutning 5. Se figur.



En graf med *många* små tangentlinjer, som den som vi just ritat, är ett kallat ett *riktningsfält*. Riktningsfält visar man för att visualisera *många* lösningar till en given d.e.

Här vi bara ritat några få linjer och att rita många små tangentlinjer är det lite arbetsamt och tråkigt. Vi kan då använda en dator och låta den göra jobbet. Vi lägger till fler punkter och ritar en massa små tangent-linjer. Vi får då som kan se ut som nedan. Här har vi dessutom lagt med tre lösningskurvor som går igenom de tre punkterna i föregående figur.



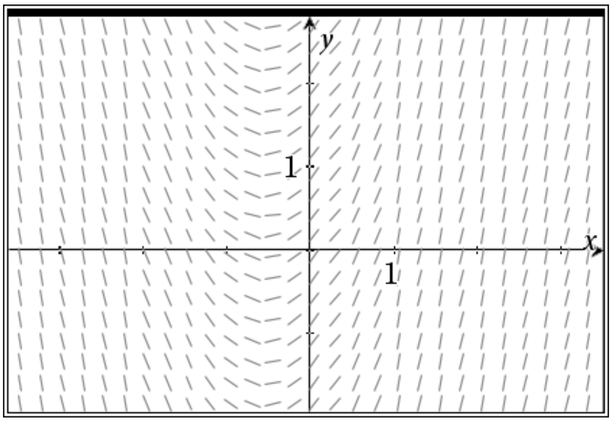
Denna aktivitet innefattar en hel del övningar om riktningsfält, som i detta fall är en grafisk representation av familjen av lösningar för första ordningens differentialekvationen, y = g (x, y).

- Ambitionen är att eleverna ska förstå att ett riktningsfält är en visualisering av familjen av lösningar till en differentialekvation.
- De ska också använda egenskaper hos ett riktningsfält för att beskriva den allmänna karaktären hos en lösning till en differentialekvation.
- De ska också kunna matcha en differentialekvation med lämpligt riktningsfält och hitta en familj av lösningar med hjälp av TI-Nspire.

Problem 1

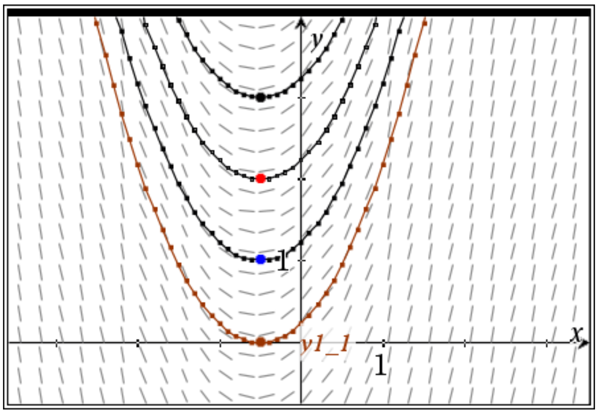
Vi börjar först med ett enkelt exempel där derivatan bara beror på x eller y.

Titta på detta riktningsfält.



För ett och samma x så är lutningen densamma och lutningen beror alltså inte på y. Man kan också uttrycka det som att lutningen är densamma längs alla vertikala linjer. d.e innehåller alltså bara variabeln x.

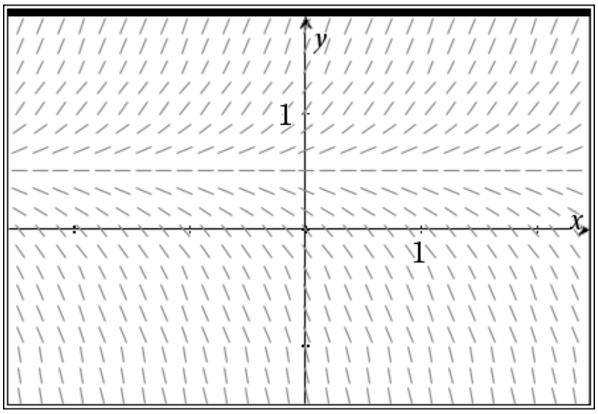
Här har vi plottat några lösningar till denna d.e. *Ska man bara plotta riktningsfält ska man alltså inte fylla i några begynnelsevärden.*



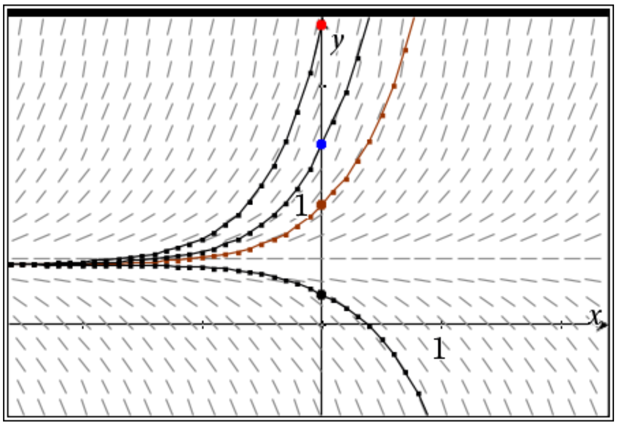
Du ser att d.e är $y' = 2x + 1$ och en den allmänna lösningen kan skrivas $y = x^2 + x + C$ där C är en konstant.

Problem 2

Nu till nästa exempel i Problem 2:

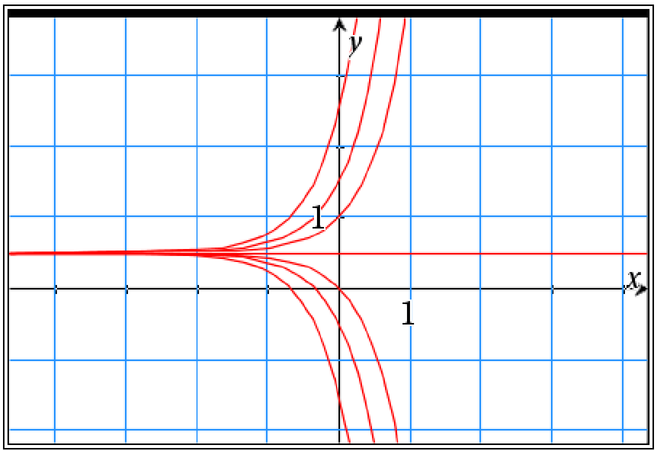


För ett och samma y så är lutningen densamma och lutningen beror alltså inte på x. Man kan också uttrycka det som att lutningen är densamma längs alla horisontella linjer. d.e innehåller alltså bara variabeln y.
Här har vi plottat några lösningar till denna d.e.



Man kan naturligtvis också plotta en familj av lösningar genom att skriva in lösningen i grafappen som en kurvskare-funktion på detta sätt:

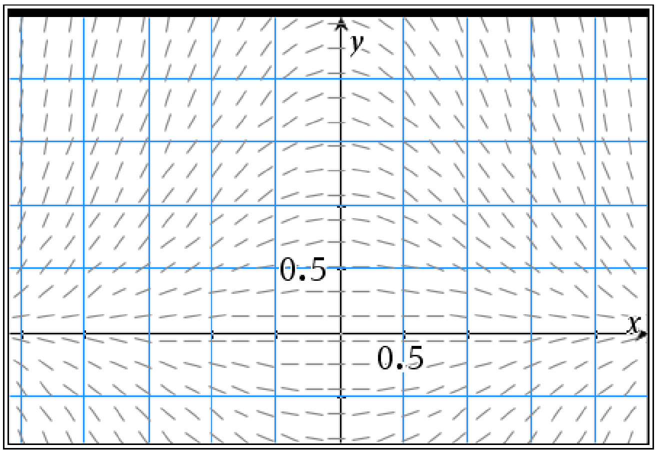
$$f1(x)=\{-2,-1,-0.5,0,0.5,1,2\}\cdot e^{2\cdot x}+0.5$$



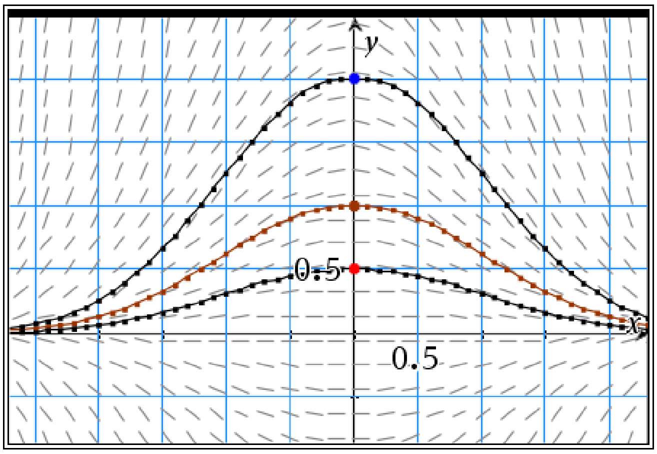
Vilken är lösningen för den linje som är parallell med x-axeln?

Problem 3

Nu kommer vi till en d.e. som har *både* x och y som variabler

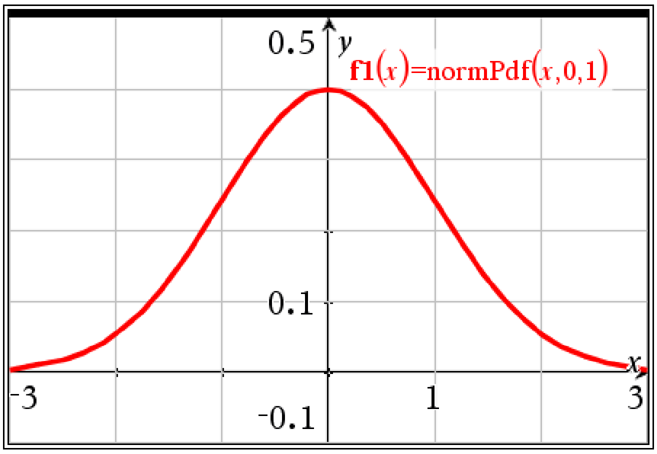


Här kan man se att lutningen är nära noll både när x och y är noll. En vild gissning skulle då kunna vara att derivatan är produkten av x och y med negativt tecken eftersom lutningen är negativ för positiva x och y. Alltså: $y' = -x \cdot y$. I övrigt kan man se linjemönstret ganska bra i detta diagram. Vi plottar nu några lös-ningskurvor. Då ser man ännu tydligare att kurvorna starkt påminner om normalfördelningskurvor.



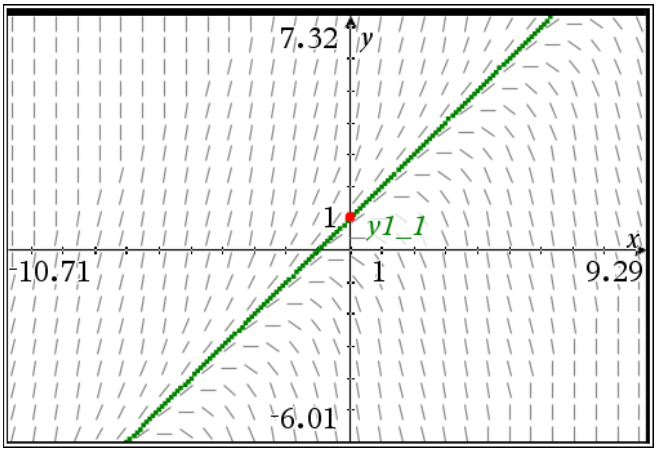
$$\text{deSolve}(y'=-x\cdot y,x,y) \qquad y=c2\cdot e^{\frac{-x^2}{2}}$$

Pröva också att plotta den standardiserade normala frekvensfunktionen. Den finns som inbyggd funktion i TI-Nspire och man kan skriva in den i funktionseditorn som normpdf(x,0,1).

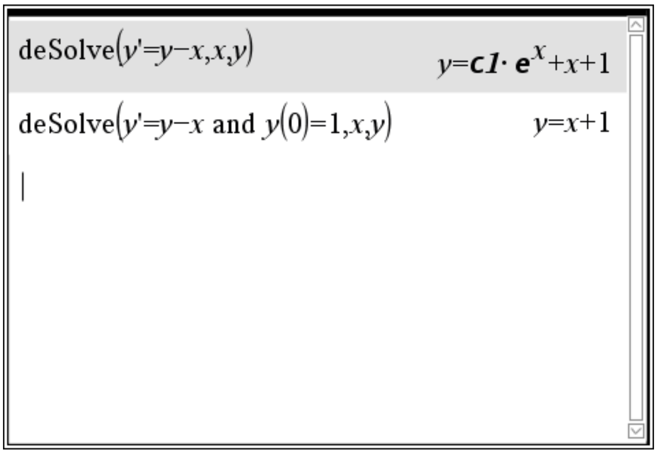


Problem 4

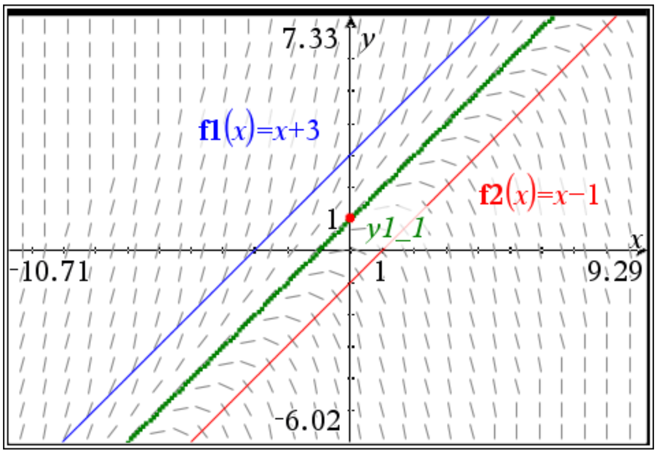
Vad kan du utläsa ur diagrammet på nästa sida. Det är lite speciellt. Vi har också lagt in lösningskurvan som har begynnelsevillkoret y(0)=1.



Plotta gärna några lösningskurvor som har andra begynnelsevärden och se hur väl de följer riktningsfältet.

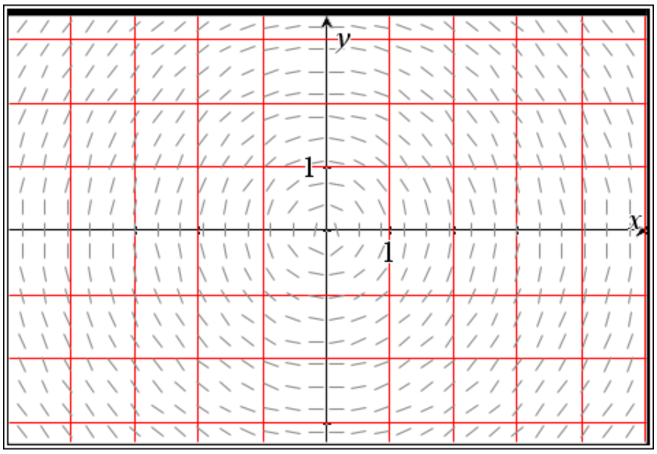


Det verkar faktiskt som lutningen är densamma längs linjen y=x+1 och att den då har värdet 1. Det visar sig faktiskt att du även får samma lutning i riktningsfältet längs linjer som är parallella med linjen ovan. Se nedan.

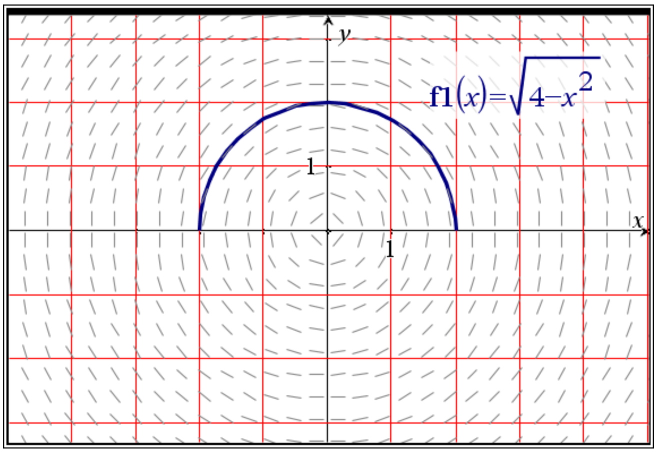


I nästa spalt har vi ett riktningsfält som ser ut som ett antal koncentriska cirklar.

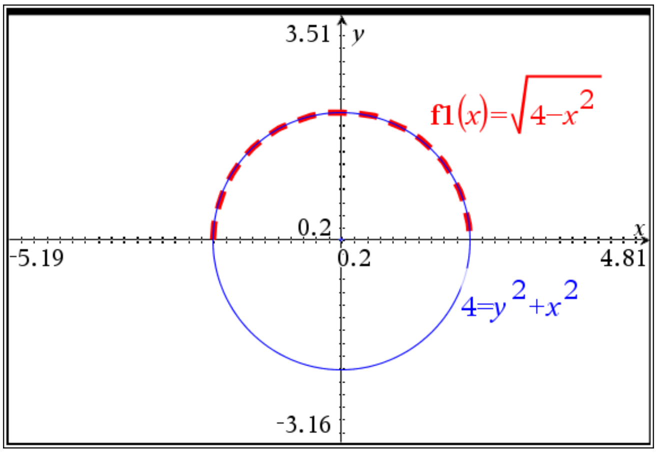
Problem 5



Lutningsfältet visar att en lösning till differentialekvationen är en cirkel med medelpunkt i origo. Emellertid antas att lösningen till differentialekvationen är en funktion. En hel cirkel är ingen funktion utan en andragradskurva i familjen av kägelsnitt En lösning till differentialekvationen är då övre eller nedre halvan av cirkeln med centrum i origo.



Derivatan av $\sqrt{4-x^2}$ är $\dfrac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$



Här är några bra tips när du studerar riktningsfält:

- Var är lutningen positiv? Negativ? Noll?
- Vad är lutningen när x = 0? När y = 0?
- Vad är lutningen när y = x? När y = -x?
- Är lutningen beroende av både x och y? Bara x? Bara y? Om lutningen bara beror på y kommer alla linjer vid samma y-värde att ha samma lutning. Om lutningen bara beror på x, kommer alla linjer vid samma x-position att ha samma lutning.
- Hur ändras lutningen då x och y närmar sig $\pm\infty$?