Hoofdstuk 3

Kansrekening en simulatie

3.1 Basisbegrippen

We introduceren de basisbegrippen uit de kansrekening met het *experiment* het gooien van een dobbelsteen. Dit experiment is vaak herhaalbaar en de uitkomst is onvoorspelbaar. De uitkomst wordt bepaald door het toeval.

De *uitkomstenverzameling* of het *universum* is de verzameling van alle mogelijke uitkomsten van het experiment : $U = \{1,2,3,4,5,6\}$.

Voor het experiment het gooien van een dobbelsteen kunnen we *gebeurtenissen* beschouwen zoals :

A : “ De uitkomst is even ”
B : “ De uitkomst is een priemgetal ”
C : “ De uitkomst is 1 ”
D : “ De uitkomst is groter dan 7 ”
E : “ De uitkomst is kleiner dan 10 ”

Met deze gebeurtenissen corresponderen deelverzamelingen van *U*, die we noteren met dezelfde letter :

$$A = \{2,4,6\}, \quad B = \{2,3,5\}, \quad C = \{1\}, \quad D = \varnothing \quad \text{en} \quad E = U .$$

Algemeen definiëren we een *gebeurtenis* als een deelverzameling van de uitkomstenverzameling *U*.

Als het experiment een uitkomst $u \in A$ oplevert, dan zeggen we dat de gebeurtenis *A* is opgetreden.

Een singleton zoals *C* noemen we een *elementaire gebeurtenis*. De lege verzameling $\varnothing$ noemen we de *onmogelijke gebeurtenis* en *U* de *zekere gebeurtenis*.

Met gebeurtenissen kan men o.a. de volgende nieuwe gebeurtenissen opbouwen :

de doorsnede	$A \cap B$	te lezen als "*A* en *B*"
de unie	$A \cup B$	te lezen als " *A* of *B* "
het complement van *A*	$\overline{A} = U \setminus A$	te lezen als " niet *A*"

Merk op dat $A \cap C = \varnothing$. We zeggen dat de gebeurtenissen *A* en *C* *disjunct* of *gescheiden* zijn.

"De kans dat we een 2 gooien" kan als volgt bepaald worden : gooi de dobbelsteen *n* keer en stel f het aantal keer dat de uitkomst 2 was op die *n* worpen.

Beschouw vervolgens de *relatieve frequentie* $\frac{f}{n}$ van de uitkomst 2 voor $n = 6, \quad n = 60, \quad n = 600, \quad n = 6000, \ldots$.

De relatieve frequentie zal steeds dichter naar 1/6 gaan; hetgeen te verwachten was omwille van de symmetrie van de dobbelsteen.

We noteren de kans om 2 te gooien met $P(2)$ en stellen derhalve $P(2) = 1/6$.

We geven nog enkele voorbeelden van experimenten met hun uitkomstenverzameling :

- Gooi twee dobbelstenen.

  $U = \{(1,1),(1,2),\ldots,(1,6),(2,1),\ldots(6,6)\} = \{(x,y) \mid x,y = 1,\ldots,6\}$
- Gooi een muntstuk. $U = \{K, M\}$
- Gooi drie muntstukken.

  $U = \{MMM, MMK, MKM, KMM, MKK, KMK, KKM, KKK\}$
- Tel het aantal fietsers die voorbij je voordeur rijden op een zaterdag tussen 14.00 uur en 15.00 uur.

  $U = \{0,1,2,3,4,\ldots\} = \mathbb{N}$; de uitkomstenverzameling is *oneindig aftelbaar*.
- Kies lukraak een getal tussen 0 en 1.

  De uitkomstenverzameling $U =]0,1[$ is *overaftelbaar*.

3.2 Simulatie

3.2.1 Toevalsgetallen

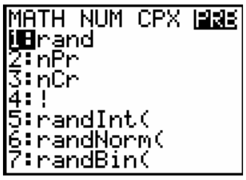
Simulatie van toevalsexperimenten is een krachtige techniek om kansen van gebeurtenissen of kansverdelingen van stochastische veranderlijken (zie verder) benaderend te bepalen.

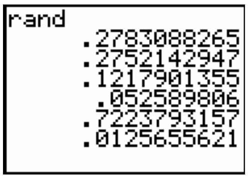
Het principe is eenvoudig :

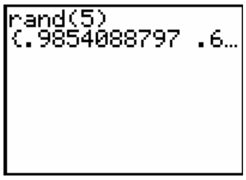
Herhaal het toevalsexperiment een groot aantal keer. De relatieve frequentie van het optreden van een gebeurtenis benadert dan de kans op die gebeurtenis.

Het toeval wordt gesimuleerd door een generator van toevalsgetallen. Simulatie met toevalsgetallen noemt men ook de *Monte Carlo-methode*.

Druk **MATH<PRB> 1:rand.** De functie **rand** levert een lukraak getal uit het interval]0,1[. Het commando **rand(5)** levert een lijst van 5 dergelijke toevalsgetallen.



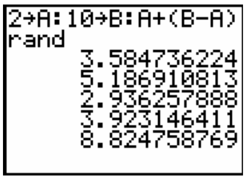


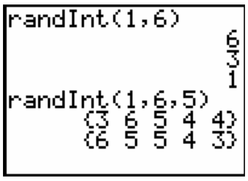


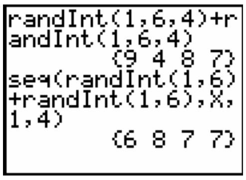
Door na het uitvoeren van een commando herhaaldelijk op **ENTER** te drukken wordt dit commando telkens opnieuw uitgevoerd.

Na toekenning van waarden voor **A** en **B** (**STO**) bepaal je met **A+(B-A)rand** lukraak een getal tussen **A** en **B**. Het commando **randInt(1,6)** bepaalt lukraak een geheel getal tussen 1 en 6 (grenzen inbegrepen) en **randInt(1,6,5)** een lijst van vijf zo'n getallen.

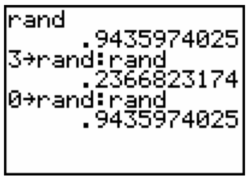
randInt(1,6,4) + randInt(1,6,4) simuleert vier keer het tellen van het totaal aantal ogen bij het werpen van twee dobbelstenen.







Het rekentoestel genereert een reeks toevalsgetallen uitgaande van een bepaalde startwaarde of "zaadje". Dergelijke startwaarde legt de reeks volledig vast. Je kan een startwaarde kiezen door een natuurlijk getal op te slaan in **rand**. **rand** staat standaard ingesteld op **Ø**.



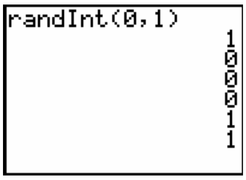
3.2.2 Een muntstuk opwerpen

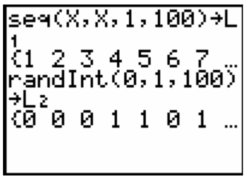
We simuleren honderd worpen met een eerlijk muntstuk en volgen de relatieve frequentie van het aantal keer dat er munt gegooid wordt. Dit is het aantal keer munt gedeeld door het aantal worpen.

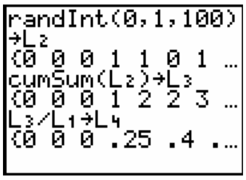
Hiertoe coderen we munt met 1 en kop met 0. Het commando **`randInt(Ø,1)`** levert telkens het resultaat van één worp.

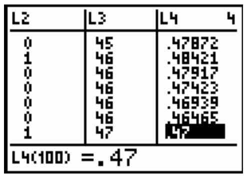
Het aantal worpen, **`seq(X,X,1,1ØØ)`**, houden we bij in L_1 en het resultaat van de simulatie van honderd keer werpen, **`randint(Ø,1,1ØØ)`**, komt in L_2.

In L_3 komt het aantal keer munt, **`cumSum(L2)`** , en in L_4 volgen we de relatieve frequentie van het aantal keer munt.



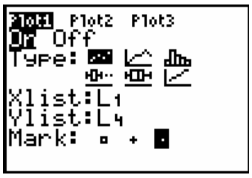


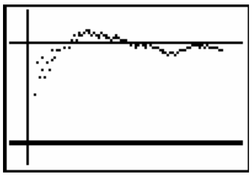




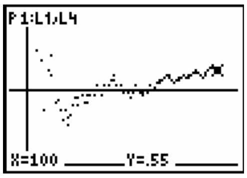
Na 100 worpen is de relatieve frequentie van het aantal keer munt al redelijk in de buurt van 0.5.

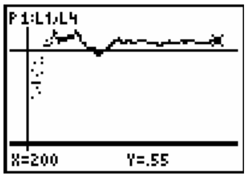
Om deze convergentie naar 0.5 grafisch te illustreren, plotten we de data in L_1 versus L_4 samen met de horizontale lijn **`Y1=Ø.5`**. Definieer **`Plot1`** (zie hoofdstuk 4) zoals hieronder aangegeven. Druk **`ZOOM 9:ZoomStat`**.





Opnieuw 100 keer werpen levert een *andere* rij die ook in de buurt van 0.5 eindigt. Maar merk op dat 200 keer werpen niet noodzakelijk een resultaat oplevert dichter bij 0.5.



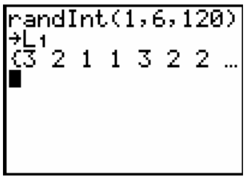


Klasopgave

Laat elke student 100 worpen simuleren met een muntstuk en bepaal de relatieve frequentie van het aantal keer munt van de hele klas. Laat iedereen lukraak een startwaarde kiezen voor de toevalsgenerator.

Welk resultaat verwacht je ?

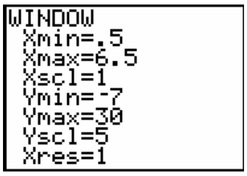
3.2.3 Een dobbelsteen werpen

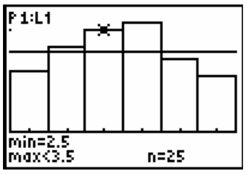


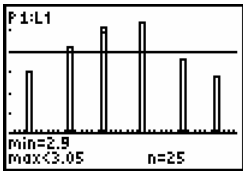
We simuleren het 120 keer werpen van een dobbelsteen en bewaren het aantal ogen in **L1**.

Welke frequentieverdeling van het aantal ogen verwacht je ?

Definieer **Plot1** als het histogram van **L1** (zie hoofdstuk 4), definieer **Y1=20** en plot beide grafieken met de hieronder afgebeelde vensterinstellingen. Verander **Xscl** in 0.2 om een staafdiagram te plotten.







Klasopgave

Simulatie van *n* .120 worpen met *n* het aantal studenten.

Noteer de frequenties van elke student en maak een globaal staafdiagram voor de hele klas. Welk resultaat verwacht je ?

Voortaan zullen we nog vaak gebruik maken van simulatie.

3.3 Kansen berekenen

3.3.1 Kansfunctie

Stel $U = \{u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n\}$ een *eindige* uitkomstenverzameling.

Met elke uitkomst $u_i \in U$ associëren we een getal $P(u_i)$, de kans op u_i, zodat :

$$\begin{cases} P(u_i) \geq 0 \\ P(u_1) + P(u_2) + \cdots + P(u_n) = 1 \end{cases}$$

De relatieve frequentiebetekenis van het begrip kans leidt tot de volgende definitie.

De kans op een willekeurige gebeurtenis $A \subset U$ is de som van de kansen op al de uitkomsten in A :

$$P(A) = \sum_{u_i \in A} P(u_i) .$$

We stellen bovendien $P(\varnothing) = 0$.

Op die manier is er een *kansfunctie of kansverdeling P* gedefinieerd die met elke gebeurtenis een kans associeert. Merk op dat $P\left(\{u_i\}\right) = P(u_i)$

<u>Fundamentele eigenschappen</u> (bewijs als oefening)

Voor gebeurtenissen $A, B \subset U$ geldt :

1. $P(U) = 1$

2. $P(A) \geq 0$

3. *Somregel voor disjuncte gebeurtenissen*

   $A \cap B = \varnothing \quad \Rightarrow \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

4. $A \subset B \quad \Rightarrow \quad P(A) \leq P(B)$

5. $P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A)$

6. *Algemene somregel*

   $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Deze eigenschappen blijven geldig voor oneindig aftelbare en overaftelbare uitkomstenverzamelingen.

3.3.2 Het Laplace-model

Beschouw een *eindige* uitkomstenverzameling $U = \{u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n\}$ waarbij *alle uitkomsten dezelfde kans* hebben. Dan geldt : $P(u_i) = \dfrac{1}{n} \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, n)$.

Met dergelijke situaties, die in de praktijk vaak optreden, heeft de Fransman Pierre-Simon Laplace (1749-1827) de waarschijnlijkheidsleer opgebouwd.

Voor elke gebeurtenis $A \subset U$ geldt dan : $P(A) = \frac{\# A}{n}$ of

$$P(A) = \frac{\text{aantal elementen in } A}{\text{aantal elementen in } U} \quad \text{of} \quad P(A) = \frac{\text{aantal gunstige uitkomsten}}{\text{aantal mogelijke uitkomsten}} .$$

Voor het tellen van het aantal gunstige en mogelijke uitkomsten is de combinatoriek zeer behulpzaam.

3.3.3 Kansbomen

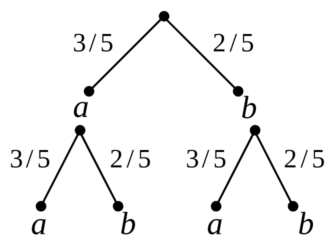
Een *samengesteld experiment* of *stochastisch proces* (het woord stochastisch is van Griekse oorsprong en betekent toevallig) bestaat uit een opeenvolging van enkelvoudige experimenten. Voorbeelden van enkelvoudige experimenten zijn : een muntstuk één keer werpen, een dobbelsteen één keer werpen, een rad één keer draaien, uit een urne één knikker halen, …

We bekijken het volgende voorbeeld :

In een vaas liggen 5 briefjes waarop telkens één letter staat : 3 briefjes met de letter *a* en twee briefjes met de letter *b*.

a) Trekkingen met terugleggen

Uit de vaas wordt lukraak een letter getrokken. Deze wordt genoteerd en teruggelegd. Vervolgens trekken we opnieuw een letter. Het verloop van een samengesteld experiment kan men overzichtelijk voorstellen met een *kansboom* :



We voorzien elke tak van de bijbehorende kans in het deelexperiment. Merk op dat de kansen bij de tweede trekking onafhankelijk zijn van het resultaat van de eerste trekking. We spreken over *onafhankelijke deelexperimenten*.

De uitkomstenverzameling van het samengesteld experiment wordt gegeven door $U = \{aa, ab, ba, bb\}$. Elke uitkomst correspondeert met een “weg” in de boom.

Om bijvoorbeeld $P(ab)$ te bepalen redeneren we als volgt. Stel N een *groot* aantal herhalingen van het samengesteld experiment.

Welk deel hiervan zal de weg "*ab*" volgen ?

Welnu, $\frac{3}{5}\cdot N$ van deze herhalingen zullen eerst a opleveren en $\frac{2}{5}$ van deze $\frac{3}{5}\cdot N$ gevallen zullen vervolgens b opleveren. Derhalve zullen er $\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot N$ herhalingen de weg "*ab*" volgen.

Deze intuïtieve redenering leidt tot de volgende belangrijke definitie.

De *productregel* voor kansen

De kans op een weg is gelijk aan het product van de kansen langs die weg.

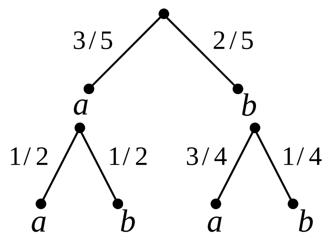
De productregel levert de volgende kansverdeling :

u	aa	ab	ba	bb
$P(u)$	9/25	6/25	6/25	4/25

Kansen drukken we vaak uit in percenten. Zo is $P(aa)=\frac{9}{25}=36\%$.

b) Trekkingen zonder terugleggen

Uit dezelfde vaas trekken we nu twee keer een letter, zonder de eerste letter terug te leggen. De bijbehorende kansboom en kansverdeling wordt dan :



u	aa	ab	ba	bb
$P(u)$	3/10	3/10	3/10	1/10

Merk op dat de kansen bij de tweede trekking afhankelijk zijn van het resultaat van de eerste trekking. We spreken over *afhankelijke deelexperimenten*.

3.4 Uitgewerkte voorbeelden

3.4.1 Gezinsplanning

Een koppel zou graag een meisje hebben en besluit derhalve kindjes te kopen tot ze een meisje hebben of tot ze 3 kinderen hebben. Schat via simulatie de kans dat het koppel een meisje zal hebben. Bereken vervolgens de exacte kans.

We maken hiertoe de volgende veronderstellingen :

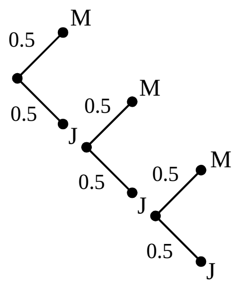
- P(jongen) = P(meisje) = 0.5
- de opeenvolgende geboortes zijn onafhankelijke “experimenten”, d.w.z. dat de kansen op een jongen of een meisje ongewijzigd blijven.

We coderen een jongen met 0, een meisje met 1 en simuleren 50 geboortes met **MATH**<PRB> **5:randInt(Ø,1,5Ø)**. Dit levert hier de volgende 27 gezinnen op met als kinderen :

01 01 000 001 1 1 1 01 1 001 1 01 1 1
1 000 01 001 1 000 1 001 1 01 01 1 001

Bij deze 27 gezinnen werd er 24 keer een meisje geboren. Via onze simulatie schatten we de kans dat het koppel een meisje heeft op $\frac{24}{27} = 0.889$.

De exacte kans kunnen we berekenen met de hieronder afgebeelde kansboom.



P(meisje) = P({M, JM, JJM})
= P(M) + P(JM) + P(JJM)
= $0.5 + 0.5^2 + 0.5^3 = 0.875$

Of sneller : P(meisje) = 1 - P(3 jongens) = 1 – P(JJJ)
= $1 - 0.5^3 = 0.875$.

3.4.2 Runs in binaire toevalsgetallen

Als experiment beschouwen we het 10 keer werpen van een muntstuk. Voor de simulatie coderen we munt met 1 en kop met 0.

We beschouwen opnieuw de 50 bits uit het vorige voorbeeld, maar gegroepeerd per tien bits : 0101000001 1110110011 0111100001 0011000100 1101011001.

De tweede groep vertoont een “run” met lengte 3; d.i. een blok van 3 opeenvolgende gelijke bits. De eerste groep is de enige groep waarvan de langste run lengte 5 heeft.

We benaderen de kans op de gebeurtenis “de langste run in een lukrake rij van 10 bits heeft lengte 5” via simulatie. Als ruwe schatting hebben we reeds 1/5 = 20 %.

Uiteraard moeten we het experiment dat bestaat uit het lukraak kiezen van 10 bits vaak herhalen om een goed idee te hebben over de kans. Daartoe herhalen we het experiment 50 keer.

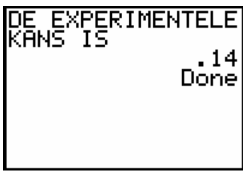
Om het geheugen van de **TI-83** niet te overbelasten, gaan we als volgt te werk :

> $0 \rightarrow T$ (T telt het aantal groepen met als langste run lengte 5)
>
> Herhaal 50 keer :
>
> Genereer een rijtje van 10 bits in L_1
> Bepaal de lengte S van de langste run in L_1
> Verhoog T met 1 als S = 5
>
> Bereken T/50

We schrijven een programma om dit te automatiseren :

```
PROGRAM:RUN
ClrHome                                  basisscherm wissen
0üT                                      initialisatie van T
For(I,1,50)                              50 keer herhalen
 randInt(0,1,10)üL1                      10 bits in L1
 1üS                                     initialisatie van S
 1üK                                     K telt de lengte van elke run
 1üJ                                     J is de positie van de bit in L1
 While J<10
  While (L1(J)= L1(min({J+1,10})) and J<10)
   K+1üK                                 K met 1 verhogen
   J+1üJ                                 J met 1 verhogen binnen de run
  End                                    einde van tweede While
  J+1üJ                                  J met 1 verhogen voor
  If K>S                                 nieuwe run
  KüS                                    S onthoudt de langste run
  1üK                                    K = 1 stellen voor volgende run
 End                                     einde van eerste While
 If S=5                                  als S=5 verhogen we T met 1
 T+1üT
End                                      einde For-lus
Disp "DE EXPERIMENTELE"
Disp "KANS IS"
Disp T/50
```

We verkregen bij een uitvoering van het programma als resultaat 0.14. De exacte kans is $\frac{63}{512} = 0.123$.



De simulatie gaf al een goed idee over deze kans.

Het is dus niet zo zelden dat er in een reeks van 10 worpen met een muntstuk een langste run van 5 keer kop of 5 keer munt optreedt !

Klasopgave

Benader de kans door de resultaten van een ganse klas te groeperen.

Wijzig het programma zodat je in het begin kan kiezen hoe vaak je het experiment wenst te herhalen (in bovenstaand programma is dit telkens 50 keer).

Benader de kans op een langste run van lengte 3 (exact : 185/512 = 0.361) en de kans op een langste run van lengte minstens 5 (exact : 111/512 = 0.217)

Opmerking

De *wet van de grote aantallen* garandeert dat de relatieve frequentie *op de lange duur* de exacte kans benadert.

Als men je vraagt een *lukraak* rijtje van 10 bits op te schrijven, zal je wellicht nooit een run met lengte 5 of meer durven opschrijven. De kans hierop is nochtans 0.217. Intuïtief heb je de neiging te geloven in de onbestaande "wet der kleine aantallen" waarbij de relatieve frequentie al vrij snel de exacte kans op 1 of 0 zou moeten benaderen.

Ziehier de kans op een langste run van kop (0) of munt (1) met lengte u :

u	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(u)$	$\frac{1}{512}$	$\frac{88}{512}$	$\frac{185}{512}$	$\frac{127}{512}$	$\frac{63}{512}$	$\frac{28}{512}$	$\frac{12}{512}$	$\frac{5}{512}$	$\frac{2}{512}$	$\frac{1}{512}$

3.4.3 Het verjaardagenprobleem

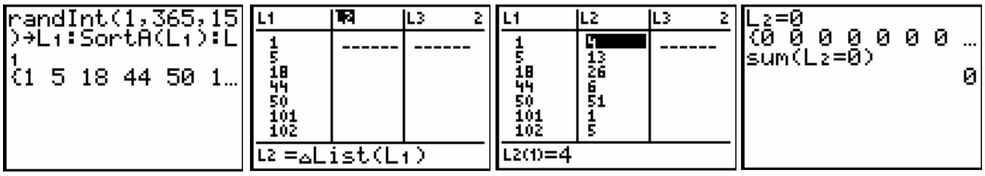
In een klas zitten 15 leerlingen (geen tweelingen). Bepaal de kans dat er minstens 2 van de 15 leerlingen dezelfde verjaardag hebben.

We veronderstellen dat een jaar bestaat uit 365 dagen, die als verjaardagen allemaal even waarschijnlijk zijn.

We simuleren het experiment als volgt.

We simuleren de verjaardagen van 15 personen en sorteren deze 15 dagen in stijgende volgorde in lijst **L**1. Je kan deze lijst manueel overlopen om na te gaan of er minstens twee gelijke getallen in zijn.

Via de lijst L2, de voorwaartse differenties van L1 gedefinieerd door $L2(k) = L1(k+1) - L1(k)$, volstaat het echter om nullen op te sporen.



We lichten het laatste plaatje nog even toe. Bijvoorbeeld de uitdrukking $\{1,5,7,12,5\} = 5$ is hetzelfde als de lijst $\{1 = 5, 5 = 5, 7 = 5, 12 = 5, 5 = 5\}$.

De **TI-83** werkt dit uit tot de lijst {0,1,0,0,1} waarbij 0 staat voor onwaar en 1 voor waar.

sum({0,1,0,0,1}), de som van de elementen uit de lijst {0,1,0,0,1}, levert als resultaat 2. Wat wil zeggen dat het aantal elementen uit de oorspronkelijke lijst {1,5,7,12,5} die gelijk zijn aan 5, twee bedraagt.

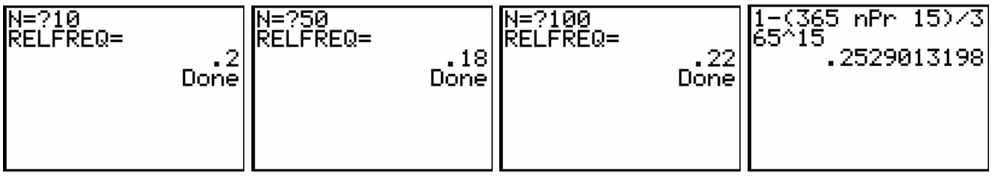
In bovenstaande simulatie waren er klaarblijkelijk geen gelijke verjaardagen. In de volgende plaatjes simuleerden we 18 bijeenkomsten van 15 lukraak gekozen personen. Vier keer waren er minstens 2 personen met dezelfde verjaardag.

Als benadering voor de gevraagde kans vinden we de relatieve frequentie van 4/18=0.22. Op 2 decimalen nauwkeurig is de exacte kans 0.25 (zie verder).

Het is niet moeilijk om een programma te schrijven met als input het aantal simulaties *N* en als output de relatieve frequentie of de experimentele kans:

```
PROGRAM:VERJAAR
ClrHome
Prompt N
0üS
For(I,1,N)
 randInt(1,365,15)ü L1
 SortA(L1)
 If  sum((¾List(L1)=0)ø0
 S+1üS
End
Disp "RELFREQ=",S/N
```

Een groter aantal simulaties impliceert niet noodzakelijk een betere kansbenadering (vergelijk *N*=10 met *N*=50 in onderstaande simulatie). De exacte kans voor dit probleem kun je berekenen zoals rechtsonder afgebeeld.



Hier valt het nog mee om de exacte kans te berekenen. Dit is echter niet altijd zo, zodat simulatie zich dan zeker opdringt (zie voorbeeld 3.4.5).

<u>Opgave</u>

In een zaal bevinden zich *k* personen. Hoe groot is de kans dat er minstens twee personen dezelfde verjaardag hebben ?

Stel een tabel op met de `TI-83` voor *k* = 2,3,4, … . Vanaf welke waarde van *k* wordt de kans groter dan 0.5 ?

3.4.4 Buren bij de lotto

Bij het lotto-spel worden elke week 6 winnende nummers uit de 42 getallen 1,2,3,…,42 getrokken (lukraak en zonder terugleggen).

Ziehier de resultaten van zo'n trekking : 4, 12, 13, 25, 27, 38.

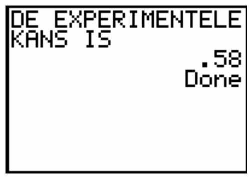
In deze trekking hebben we de buren 12 en 13.

Is dit zelden ? Wat is de kans op minstens 2 buren ?

We simuleren 50 lottotrekkingen met het volgende programma.

```
PROGRAM:LOTTO
ClrHome
0üT
For(I,1,50)
 Repeat sum(¾List(L1)=0)=0          Lijsten met identieke getallen negeren.
  randInt(1,42,6)üL1
  SortA(L1)
 End
 If sum(¾List(L1)=1)ø0              Zijn er buren in de gesorteerde lijst ?
 T+1üT
End
Disp "DE EXPERIMENTELE"
Disp "KANS IS"
Disp T/50
```

Een simulatie levert 0.58 als resultaat. De exacte kans is 0.557. Buren in de lotto zijn dus helemaal niet zelden. Een andere simulatie van 50 lottotrekkingen leverde 0.46 als resultaat. De wet der grote aantallen zegt jammer genoeg niet hoe vaak je het experiment moet simuleren om een betrouwbare experimentele kans te krijgen.



De exacte kans berekenen we als volgt.

Beeld je de getallen 1 tot 42 in als een rij van knikkers : de 6 getrokken cijfers als zwarte knikkers en de 36 andere als witte knikkers. Voor de complementaire gebeurtenis “geen buren” mogen er geen twee zwarte knikkers naast elkaar liggen.

Om zo een rij te vormen volstaat het 6 zwarte knikkers tussen de 36 witte knikkers te voegen. Hiervoor zijn er 37 plaatsen (links van elke witte knikker en rechts van de laatste witte knikker). Hieruit kiezen we 6 plaatsen. Bijgevolg geldt :

$$P\left(\text{minstens 2 buren}\right) = 1 - P(\text{geen buren}) = 1 - \frac{\binom{37}{6}}{\binom{42}{6}} = 0.557.$$

3.4.5 Het probleem van de garderobejuffrouw

Zes heren geven hun hoeden af bij de garderobe. De garderobejuffrouw geeft de hoeden later lukraak terug. Hoe groot is de kans dat er minstens één heer zijn eigen hoed krijgt ?

Hetzelfde probleem vinden we terug bij de volgende opgave. Een secretaris typt 6 brieven en adresseert 6 briefomslagen. Dan steekt hij de brieven lukraak in de briefomslagen. Hoe groot is de kans dat er minstens één brief in de juiste envelop komt ?

Het probleem is nu de opgave te vertalen of te coderen in een wiskundig model dat zich leent tot simulatie.

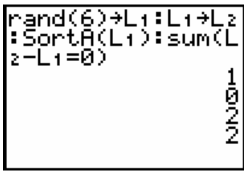
Nummer de heren (brieven) van 1 tot 6, nummer de hoeden (briefomslagen) ook van 1 tot 6 en zorg ervoor dat heer (brief) met nummer x hoort bij hoed (briefomslag) met nummer x.

Een lukrake keuze van de garderobejuffrouw levert een bijectie van $\{1,2,3,4,5,6\}$ (de heren) naar $\{1,2,3,4,5,6\}$ (de hoeden).

Minstens één heer krijgt zijn eigen hoed wanneer de gekozen permutatie van {1,2,3,4,5,6} minstens één “vast punt” heeft, bijvoorbeeld 4 gaat naar 4. Zo een permutatie kunnen we voorstellen door een rijtje van beelden, horende bij argumenten in natuurlijke volgorde.

Zo levert de permutatie (2,4,3,1,6,5) één vast punt op : 1 gaat naar 2, 2 naar 4, *3 naar 3*, 4 naar 1, 5 naar 6 en 6 naar 5. Het element 3 van de rij (2,4,3,1,6,5) staat op zijn natuurlijke plaats.

Om dit te simuleren volstaat het lukraak 6 (verschillende) getallen tussen 0 en 1 te genereren en te onderzoeken of er getallen bij zijn die op hun natuurlijke plaats staan. Zo levert de rij (0.87 , 0.45 , 0.92 , 0.68 , 0.38 , 0.15) of de permutatie (5 , 3 , 6 , 4 , 2 , 1) één vast punt.



Als relatieve frequentie vinden we 13/18 = 0,72.

De exacte kans is gelijk aan $1-(\frac{1}{0!}-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!})=0,6319$. Dit is niet zo eenvoudig aan te tonen.

Het bepalen van de exacte kans maakt gebruik van de reeksontwikkeling van Mac-Laurin van de exponentiële functie : $e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$.

De veralgemening voor *n* heren met *n* hoeden ligt voor de hand.

Algemeen is de exacte kans $1-\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$.

We krijgen als kans telkens een benadering van $1-\frac{1}{e}=0.6321$.

De gevraagde kans is dus steeds ongeveer $\frac{2}{3}$, onafhankelijk van *n* (met *n* >2).

Met bovenstaande simulatie kunnen we echter meer. Hiermee is het o.a. mogelijk de kans te benaderen dat er juist twee heren hun eigen hoed krijgen, enz.

3.5 Opdrachten

1. Hoe groot is de kans om bij het trekken van een kaart uit 52 kaarten een klaveren of een harten te trekken ?

2. Hoe groot is de kans dat bij het gooien met 2 dobbelstenen de som van het aantal ogen minstens 3 is ?

3. Hoe groot is de kans dat een getrokken kaart uit 52 een klaveren of een aas is?

4. Veralgemening van de somregel. Stel een formule op voor $P(A \cup B \cup C)$.

5. We gooien met drie muntstukken. Hoe groot is de kans op het gooien van minstens 1 keer munt ? Simuleer dit ook.

6. Hoe groot is de kans om met zes worpen van een dobbelsteen zes verschillende resultaten te krijgen ? Simuleer dit ook.

7. In een doos zitten 15 gloeilampen waarvan 10 goede en 5 slechte. Men neemt lukraak in één greep 3 lampen uit de doos. Wat is de kans dat

   (a) de 3 lampen slecht zijn ?
   (b) de 3 lampen goed zijn ?
   (c) één lamp slecht is en twee lampen goed zijn ?

   Wijzigen de oplossingen indien we de lampen één na één uit de doos nemen ? Benader de kans op 3 slechte lampen via simulatie.

8. Uit een groep van 10 vrouwen en 7 mannen kiezen we lukraak zes personen. Bereken de kans dat ten hoogste twee van de zes personen vrouwen zijn. Benader deze kans via simulatie.

9. Een dobbelsteen is aan een zijde verzwaard zodat de kans op zes ogen 1/2 is. De overige 5 uitkomsten zijn even waarschijnlijk. Bereken de kans

   (a) om een even aantal ogen te gooien,
   (b) om een aantal ogen te gooien dat deelbaar is door drie,
   (c) om tenminste vijf te gooien.

10. Op twee normale dobbelstenen heeft men op het zijvlak dat gewoonlijk zes ogen heeft er slechts vijf aangebracht. Bereken de kans dat de som van het aantal ogen bij het werpen van deze twee stenen minstens 9 is.

11. Bij het lotto-spel worden elke week 6 winnende nummers plus een bijkomend getal uit de 42 getallen 1,2,3,…,42 getrokken (lukraak en zonder terugleggen). Kies lukraak 6 getallen uit 1,2,…42.

Bepaal de kans om het volgende aantal winnende nummers te hebben :

(a) 3 (b) 4 (c) 5 (d) 5 plus bijkomend getal (e) 6

(f) Hoe groot is de kans dat je een prijs wint (minstens 3 winnende nummers) ?

Overtuig jezelf door simulatie dat je slechts zelden een prijs (meestal slechts 3 winnende nummers) wint.

12. Een oud gokspel bestaat erin met 4 dobbelstenen te gooien (of met één steen 4 keer na elkaar). Als er minstens één zes bij is, wint men. Toon aan dat de kans op winst groter is dan 50 %.

Een zekere Chevalier de Méré bedacht een andere versie. Vermits het werpen van een dubbele zes (kans 1/36) met twee stenen 6 keer moeilijker is dan één zes met één worp (kans 1/6), redeneerde hij als volgt.

Als men 4 keer moet gooien met één steen om met gunstige kans minstens één zes te hebben, dan volstaat het om 6 x 4 = 24 keer te gooien met twee stenen om met dezelfde kans minstens één dubbele zes te werpen. Hij verloor hierbij echter een groot deel van zijn fortuin.

Blaise Pascal (1623-1662) heeft toen de kans voor hem uitgerekend. Hoe groot is die kans om bij 24 worpen met twee stenen minstens één keer (6,6) te hebben ? Er wordt beweerd dat dit probleem de studie van de waarschijnlijkheidsleer heeft opgestart (1654).

13. Stel A en B gebeurtenissen met $P(A) = 3/8$, $P(B) = 1/2$ en $P\left(A \cap B\right) = 1/4$.

Bereken: (a) $P(A \cup B)$ (b) $P(\overline{A})$ en $P(\overline{B})$ (c) $P(\overline{A} \cap \overline{B})$

(d) $P(\overline{A} \cup \overline{B})$ (e) $P(A \cap \overline{B})$ (f) $P(B \cap \overline{A})$

14. Gegeven de kansen $P(A \cup B) = 3/4$, $P(\overline{A}) = 2/3$, $P\left(A \cap B\right) = 1/4$.

Bereken : (a) $P(A)$ (b) $P(B)$ (c) $P(A \cap \overline{B})$

15. In een donkere gang liggen 4 zwarte, 6 rode en 2 witte sokken in een lade. Er worden lukraak 2 sokken gekozen. Hoe groot is de kans dat ze dezelfde kleur hebben ?

16. Een urne bevat 3 zwarte en 5 witte ballen. Er worden 2 ballen na elkaar en zonder terugleggen getrokken. Wat is de kans dat de tweede bal zwart is ?

17. Een onderwijzer verloot een boek onder zijn 24 leerlingen door hen achtereenvolgens een getal te laten raden van 1 tot 24. Telkens er iemand geraden heeft zegt hij “verkeerd” of “juist”. De vijfde leerling raadt juist en krijgt het boek. Jantje die op de laatste bank zit roept: “Dat is niet eerlijk, ik heb niet eens mogen raden!” De meester beweert dat het wel eerlijk is omdat iedereen dezelfde kans heeft om het boek te winnen. Wie heeft gelijk ?

18. Uit elk van de onderstaande vazen wordt lukraak een getal getrokken en de drie getallen worden met elkaar vermenigvuldigd en met elkaar opgeteld .

Hoe groot is de kans dat het resultaat even is ?

2	3
4	5

4	5
6	7

1	2	
5	8	10

19. In een vaas liggen twee witte en drie zwarte knikkers. Twee spelers halen om beurt een knikker uit de vaas zonder terugleggen. Winnaar is diegene die eerst een witte knikker trekt. Hoe groot is de kans dat de eerste speler wint?

20. Tien jagers, die steeds raak schieten, wachten geduldig voor een rots op hun prooi. Plots landen er tien eenden op die rots. De jagers kunnen maar één keer schieten en schieten gelijktijdig. Elke jager kiest hierbij lukraak zijn slachtoffer.

Hoeveel eenden zullen er gemiddeld overleven per experiment, als dit experiment vaak herhaald wordt ? Leg uit waarom het theoretische gemiddelde 3.5 is.

21. Op een meerkeuzetoets van 10 vragen met elk vier alternatieven staan 10 punten : 1 punt per vraag, juist of fout. Een student antwoordt lukraak op elke vraag. Benader via simulatie de kans dat deze student minstens de helft haalt.

Tip : gebruik `int(Ø.25+rand)` voor simulatie van de score op één vraag.

22. Een spel bestaat uit het lukraak kiezen van 3 getallen tussen uit $\{0,1,2,...,99\}$ (herhaling is toegestaan). Men wint het spel als de som van deze drie getallen deelbaar is door 5. Bepaal de experimentele kans op winst d.m.v. simulatie.

23. Een moedige wiskundeleraar is bereid om tijdens de grote vakantie twee uur per dag bijles te geven aan zijn buurjongen. Zijn vader is een gokker en werpt na de bijles dagelijks een muntstuk op tot er drie keer kop achter elkaar verschijnt. Het totaal aantal worpen dat hiervoor nodig is, bepaalt het bedrag in Euro dat hij die dag aan de leraar geeft.

Voorspel hoeveel Euro de vader betaalt in 60 dagen d.m.v. simulatie.

24. In een vierkant met zijde 1 tekenen we een kwartcirkel met straal 1 en als middelpunt één van de hoekpunten van het vierkant. We kiezen lukraak een punt van het vierkant. De kans dat we binnen de kwartcirkel terecht komen is $\pi / 4$.

    Bepaal d.m.v. simulatie van dit experiment een benadering van π.

25. Benader $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ met de Monte Carlo-methode (cfr. vorige opgave).