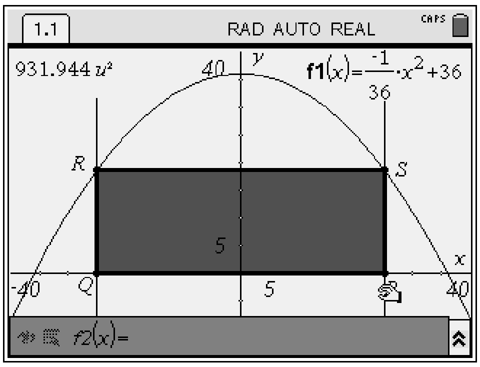
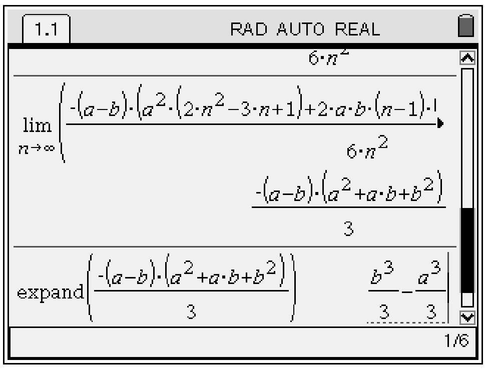
Cahiers T³ Europe
Vlaanderen nr. 15

Informatietechnologie in de wiskundeles

TI-Nspire™ CAS handheld: kennismaken met inspirerende voorbeelden

Etienne Goemaere
Guido Herweyers
Dominiek Ramboer





KATHOLIEKE UNIVERSITEIT LEUVEN

Informatietechnologie in de wiskundeles

TI-Nspire^{TM} CAS handheld:
kennismaken met inspirerende voorbeelden

Etienne Goemaere
Guido Herweyers
Dominiek Ramboer

T³ EUROPE

Inhoudsopgave

1. De visie achter TI-Nspire CAS …………………………………………………………………………… 2

2. Voorbeeld: met de ballon de lucht in ……………………………………………………………………. 3

3. Voorbeeld: de invloed van een parameter ………………………………………………………………11

4. Statistische toepassingen …………………………………………………………………………………16

4.1 Gevoeligheid van centrum- en spreidingsmaten …………………………………………………16

4.2 De normale verdeling………………………………………………………………………………..21

4.3 Steekproefvariabiliteit ………………………………………………………………………………..26

5. De Berlijnse Boog - futuristische architectuur boven de gracht ……………………………………….33

6. Computeralgebra aan het werk ……………………………………………………………………………...43

6.1 De afstand van een punt tot een rechte ……………………………………………………………..43

6.2 Eliminatie van parameters ……………………………………………………………………………..44

6.3 Een bepaalde integraal als limiet van een Riemann-som ………………………………………46

7. Besluit: de didactische meerwaarde van TI-Nspire CAS ……………………………………………47

1. De visie achter TI-Nspire CAS

Deze tekst is een inleiding tot de TI-Nspire CAS handheld. Er wordt gewerkt met versie 1.3 en de standaardinstellingen, behalve de taalinstelling die Nederlands (België) is.
Naast de handheld bestaat er ook een PC-versie van TI-Nspire CAS, tussen de softwareversie en de handheld kunnen bestanden (met extensie *tns*) worden uitgewisseld.

TI-Nspire CAS is opgebouwd rond de *samenwerking* van vijf verschillende toepassingen (of modules):

- “Rekenmachine”
  Dit is een module computeralgebra (CAS staat voor “Computer Algebra System”), gebaseerd op het pakket “DERIVE”. Naast de mogelijkheden van een numeriek rekentoestel kun je hier ook symbolisch rekenen met lettervormen. Gebruikers van de TI-92 , TI-89 of Voyage 200 zullen deze omgeving herkennen.

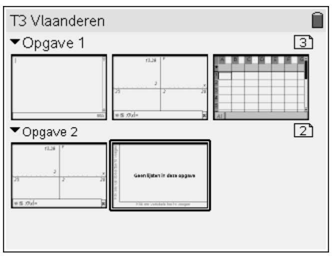
- “Grafieken en dynamische meetkunde”
  Volgende grafieken kunnen worden getekend in hetzelfde assenstelsel:
  → krommen met een cartesiaanse vergelijking $y = f(x)$
  → krommen in poolcoördinaten $r = f(\theta)$
  → parameterkrommen $x = f(t)$, $y = g(t)$
  → een puntenwolk van koppels.

  Bovendien kun je hier tevens dynamische meetkunde inzetten, gebaseerd op het pakket “CABRI” in het vlak (meetkundige constructies uitvoeren, meten van hoeken – lengte – oppervlakte, verslepen van punten, ….).

- “Lijsten en spreadsheet”
  Deze module kun je vergelijken met een Excel-werkblad met “relatieve” en “absolute” verwijzingen naar cellen. Er zijn minder “administratieve” mogelijkheden dan in Excel, men kan echter ook de functies inzetten die ter beschikking zijn in de module computeralgebra. Elke kolom van het werkblad is een lijst waarop je de lijstbewerkingen van de TI-84 Plus kan toepassen. Dit is dus een spreadsheet gericht op wiskundetoepassingen.

- “Gegevensverwerking en statistiek”
  De statistische behandeling van numerieke data in de TI-84 Plus werd uitgebreid met o.a. een gebruiksvriendelijke invoer van parameters voor verdelingen, “dotplots”, een dynamische aanpassing van regressiekrommen, …
  De invoer van data en statistische berekeningen gebeuren in een spreadsheetmodule (of een module rekenmachine), grafische voorstellingen zoals histogram, boxplot, … komen in een statistiekmodule.

- “Notities”
  Dit is een teksttoepassing met beperkte mogelijkheden van tekstopmaak. Uitdrukkingen kunnen worden berekend met computeralgebra, interactie tussen docent en student is mogelijk.



TI-Nspire werkt met *mappen* en *documenten* (of bestanden).
Een TI-Nspire document bevat minstens één “opgave” en elke opgave bestaat uit minstens één “pagina”. Een pagina bestaat uit één tot vier toepassingen naar keuze.

Het document hiernaast bevat opgave 1 met 3 pagina’s en opgave 2 met 2 pagina’s, elke pagina bevat één toepassing.

Binnen één opgave geldt:
→ op elk ogenblik werk je met één toepassing,
→ een variabele die werd gedefinieerd in de ene module wordt herkend in een andere module.

Elke toepassing is voorzien van overzichtelijke menu’s.

Met uitgewerkte voorbeelden (o.a. opgaven uit leerboeken van het secundair onderwijs) en extra opdrachten voor de lezer komt de samenwerking tussen de verschillende toepassingen tot uiting.

Naast de CAS-versie van TI-Nspire bestaat er ook een numerieke versie zonder computeralgebra (cfr. de TI-89 versus de TI-84 Plus).
De kunstmatige beperking tot een toestel zonder computeralgebra wordt vaak opgelegd omdat men o.a. vreest dat de leerlingen "hun formules" minder goed zullen kennen. Computeralgebra biedt echter de gelegenheid om formules te leren manipuleren, om snel en exact berekeningen uit te voeren zonder tijdverlies en rekenfouten. De student krijgt een "gevoel voor symbolen" en leert tevens computeralgebra in te zetten op het juiste ogenblik. Een pleidooi voor computeralgebra vind je in de publicatie "The Case for CAS", in pdf-formaat verkrijgbaar op www.t3vlaanderen.be

2. Voorbeeld: met de ballon de lucht in (uit Pienter, oefening rijen voor het vijfde jaar)

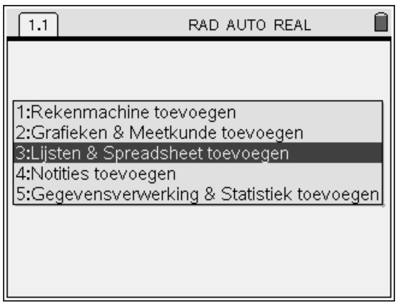
Het KMI laat een weerballon op. De eerste minuut stijgt deze ballon 500 meter. Elke volgende minuut stijgt de ballon 12% minder dan de minuut ervoor.
Beantwoord de volgende vragen en controleer met behulp van ICT.

a) Hoeveel meter is de ballon gestegen na 10 minuten?
b) In welke minuut stijgt de ballon voor het eerst minder dan 100 meter?
c) Na hoeveel minuten bereikt de ballon de grens van 4 kilometer?
d) Hoe hoog kan de ballon vliegen?

Druk off on : zet het toestel aan.
We nemen een nieuw document.
Druk
6: Nieuw document.

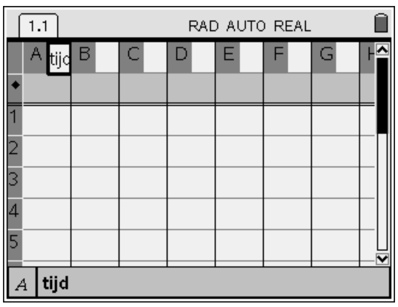
Indien het vorige document nog niet werd bewaard dan wordt dit eerst gevraagd.
Druk ▶ enter : we slaan het vorige document niet op.

Tip: met de pijltjestoets ▶ van het "Navpad" of tab ga je naar het volgende invoerveld,
met ◀ of CAPS tab naar het vorige invoerveld.



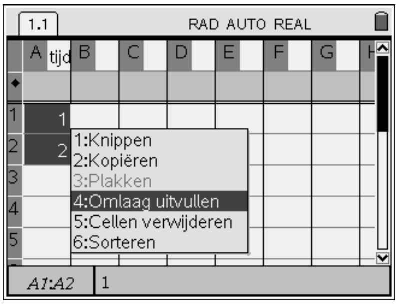
We voegen een nieuwe toepassing toe.
Selecteer
3: Lijsten & Spreadsheet

Men heeft de keuze tussen de vijf besproken modules.

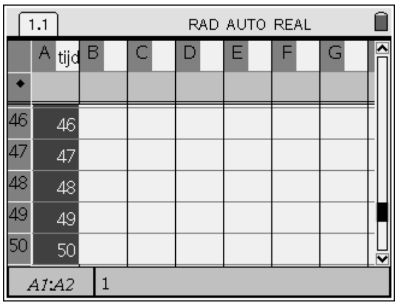


Selecteer met ▲ de plaats naast de grijze letter A op de eerste lijn, typ "tijd" in en druk enter .
De eerste kolom (of lijst) A heeft nu de naam "tijd".

Navigeer naar cel A1 (de eerste cel van kolom A) en druk
1 ▼ 2



Ga naar A1 en druk CAPS ⇧ (ingeduwd houden) en ▼
om de twee eerste cellen van kolom A te selecteren.



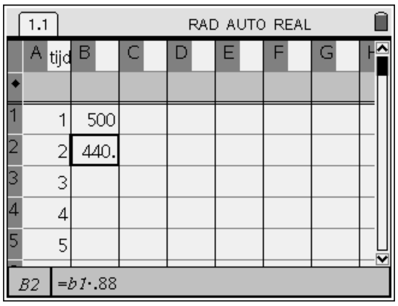
We breiden de kolom uit tot de cel A50

Druk ctrl menu

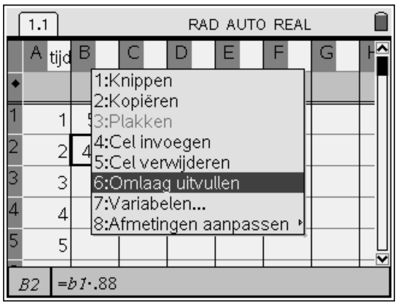
4: Omlaag uitvullen

Druk ▼ tot aan cel A50

Bevestig met enter



Druk ▶ om naar cel B1 te gaan, geef B1 de waarde 500.
Selecteer cel B2, druk = B 1 × 0 . 8 8 enter
B2 heeft nu de waarde 440.

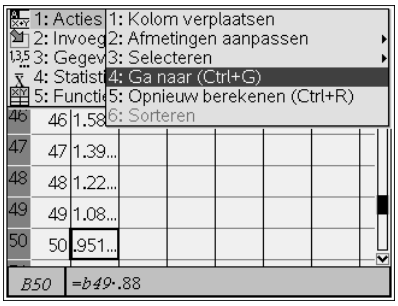


Met de geselecteerde cel B2 breid je kolom uit tot cel B50

Druk ctrl menu

6: Omlaag uitvullen en met ▼ tot aan cel B50.

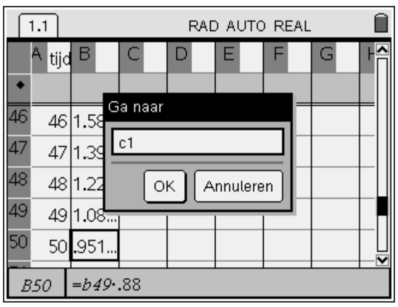
Tip: menu levert het *menu van de huidige module* (lijsten en spreadsheet)
Met ctrl menu verkrijgen we een *contextmenu* dat afhankelijk is van de positie of selectie op het scherm



Druk menu

1: Acties

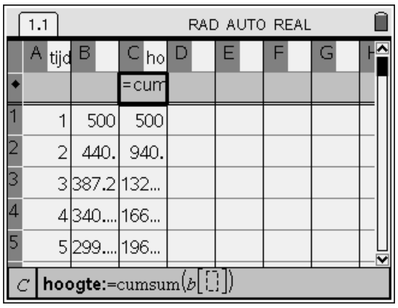
4: Ga naar



Ga naar cel C1.

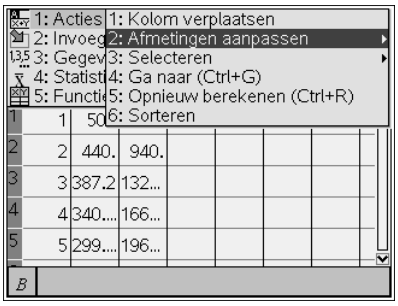
Ga één positie naar boven in de grijze lijn om kolom C te definiëren typ
H O O G T E : = C U M S U M (B ctrl [

Tip: gebruik b[] om te verwijzen naar kolom B,
haakjes worden automatisch gesloten.



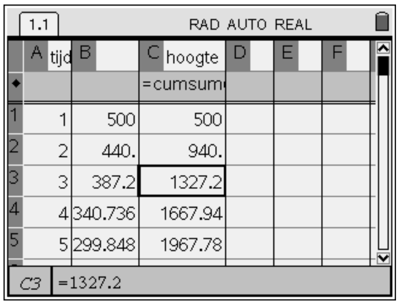
Pas de kolombreedte aan van de kolommen B en C met menu

1: Acties
2: Afmetingen aanpassen
1: Kolombreedte en ▶

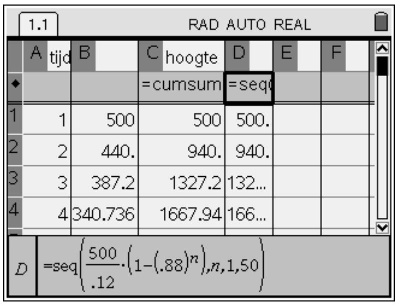


Kolom C is nu de cumulatieve som van kolom B,
Zo geldt bijvoorbeeld C3=B1+B2+B3.

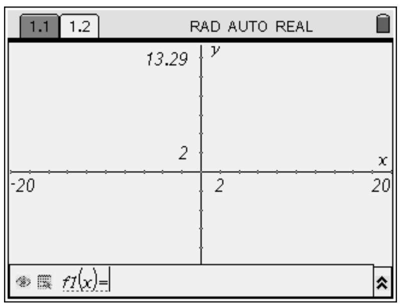
Beantwoord (a), (b) en (c) van de opgave door de lijsten te doorlopen.



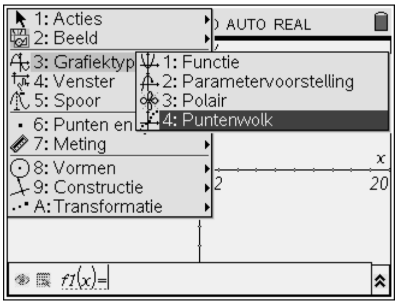
Met de formule van de som van de eerste *n* termen van een meetkundige rij $d_n = 500 \cdot \dfrac{1-0.88^n}{1-0.88} = 500 \cdot \dfrac{1-0.88^n}{0.12}$
definiëren we lijst D (zie rechts; "seq" staat voor sequence of rij)
Pas de kolombreedte van D aan en stel vast dat de kolommen C en D gelijk zijn.



We wensen nu een grafiek te maken van de hoogte in functie van de tijd.
Druk ⌂ 2 om een *nieuwe pagina* toe te voegen met de toepassing "grafieken en meetkunde".
Een assenstelsel verschijnt.

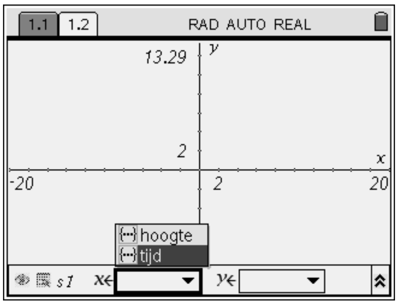


Druk menu
3: Grafiektype
4: Puntenwolk.

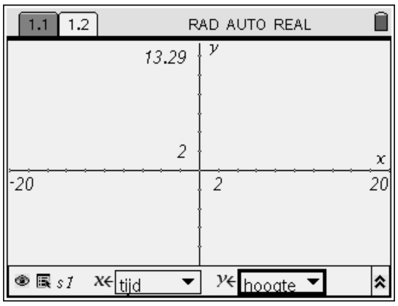


Het invoerveld naast *x* is geselecteerd, druk eerst enter om de lijsten te zien die reeds werden gedefinieerd, selecteer vervolgens de lijst “tijd” en druk enter

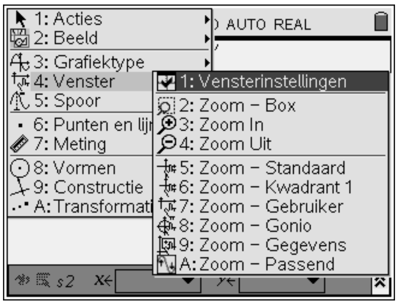
Tip: i.p.v. enter kun je hier ook de kliktoets gebruiken.



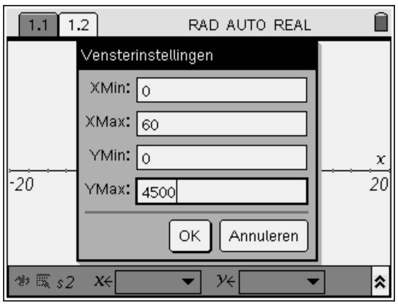
Met tab ga je naar het volgende invoerveld voor y, kies daar voor “hoogte”

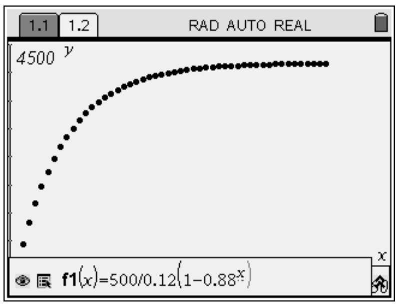


Je kiest zelf de geschikte vensterinstelling.
Druk menu
4: Venster
1: Vensterinstellingen.

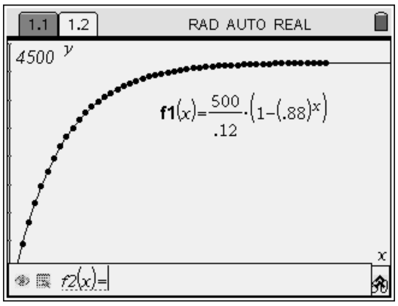


Stel Xmin=0 , Xmax=60, Ymin=0, Ymax=4500, bevestig met enter .
De grafiek verschijnt, kies vervolgens het grafiektype functie, typ het corresponderende functievoorschrift in voor de continue functie f1(x) en druk enter



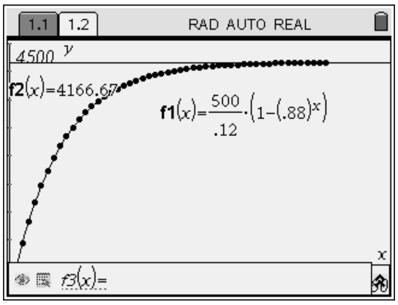


Bespreek de overgang van het discrete naar het continue model

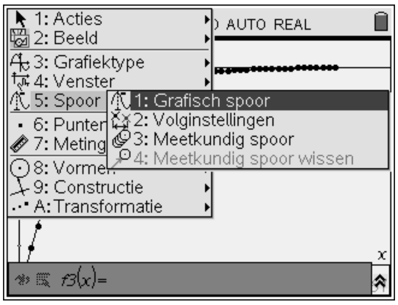


De limiethoogte is klaarblijkelijk $\frac{500}{0.12} = \frac{12500}{3} \simeq 4166.67$ meter

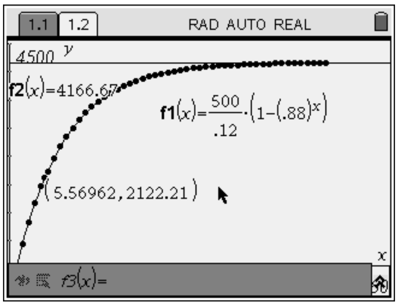
Teken de asymptoot f2(x)= 4166.67



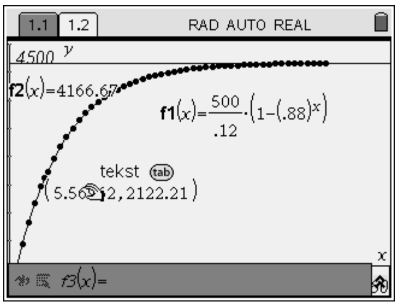
Druk menu
5: Spoor
1: Grafisch spoor
om het spoor van de grafiek van f1 te volgen (met ▲▼ kun je een grafiek selecteren en met ◀ ▶ overloop je een grafiek)



Druk enter om een punt van de grafiek van f1 vast te leggen.
We verlaten het grafisch spoor met esc.

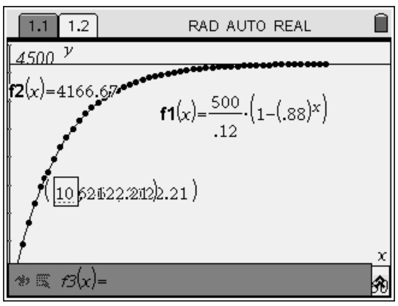


Navigeer over de x-coördinaat van het punt tot een open hand verschijnt.

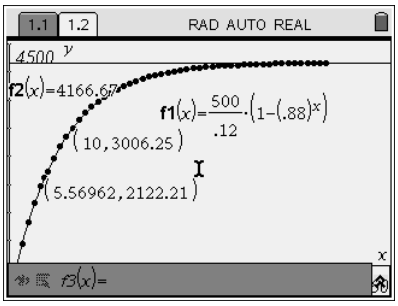


Hoe hoog is de ballon na 10 minuten?

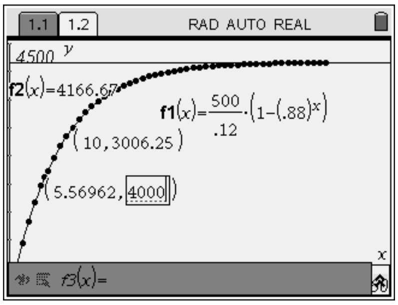
Druk enter enter of om de x-coördinaat te wijzigen,
gebruik clear om cijfers te verwijderen en typ 10 in als nieuwe x-coördinaat.



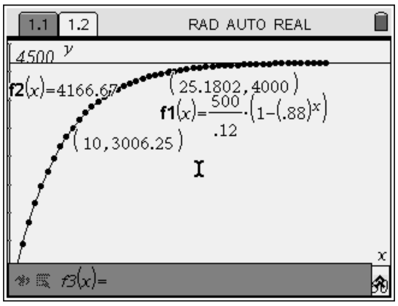
enter levert het nieuwe gezochte punt; na 10 minuten is de ballon 3006.25 meter hoog.



Je kan echter ook de y-coördinaat wijzigen om de x-coördinaat te bepalen: na hoeveel minuten is de grens van 4000 meter bereikt?

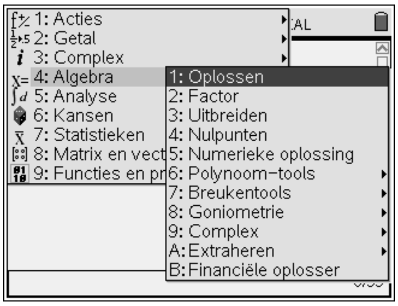


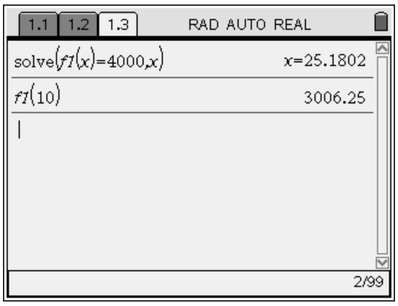
Antwoord: na 25.18 minuten

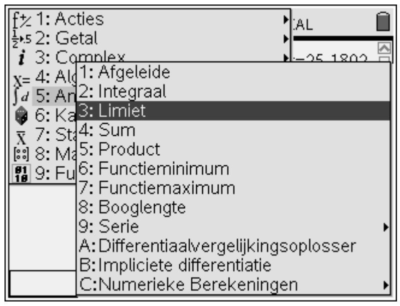


Om het probleem algebraïsch aan te pakken voegen we met home 1 een pagina toe met de toepassing rekenmachine.

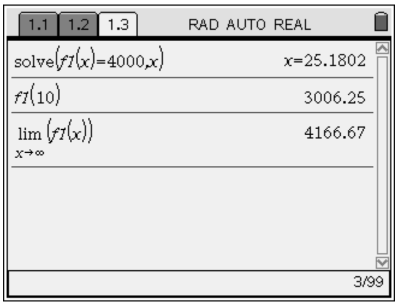
Met menu **4: Algebra, 1: Oplossen** verkrijgen we de functie solve en met menu **5: Analyse, 3: Limiet** bereken je een limiet; gebruik tab om naar het volgende invoerveld te gaan. De sneltoets ctrl i levert het symbool ∞.

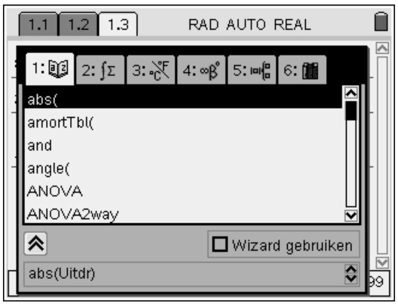


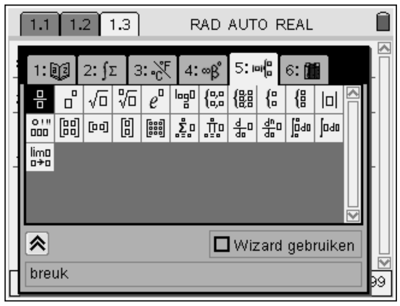


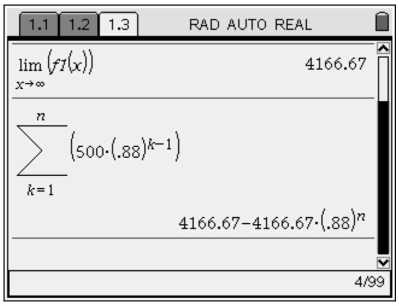


Onderzoek de catalogus met [catalogustoets] en de verschillende rubrieken 1 tot 6





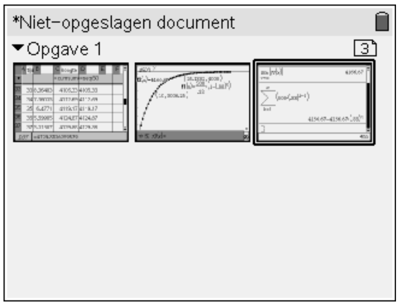




Duw esc om terug naar de rekenmachinemodule te gaan en bereken de hoogte na *n* minuten door sommatie van de meetkundige rij.

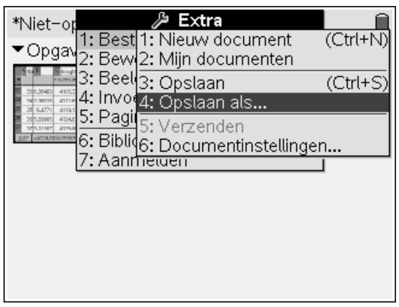
Bovenaan zie je dat we ons bevinden op pagina 1.3 , dit is pagina 3 van opgave 1.

Tip:
met ctrl 7 gaat de cursor eerst naar het begin van uitdrukking,
vervolgens brengt ctrl 7 je naar het begin van de pagina.
Met ctrl 1 gaat de cursor eerst naar het einde van een uitdrukking,
vervolgens brengt ctrl 1 je naar het einde van de pagina.



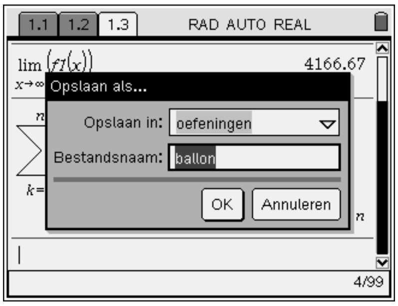
Met ctrl ◀ ▶ navigeer je van pagina naar pagina,

ctrl ▲ levert een overzicht over de verschillende opgaven en pagina's van het document.



Met ctrl [home] **1: Bestand, 4: Opslaan als …** enter sla je het bestand op.

De map noemen we “oefeningen” en het bestand “ballon”



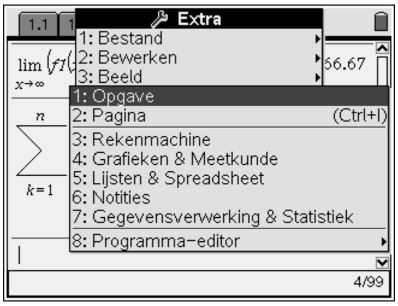
Voeg tenslotte nog een nieuwe opgave toe aan het bestand met
ctrl **4: Invoegen, 1: Opgave** enter

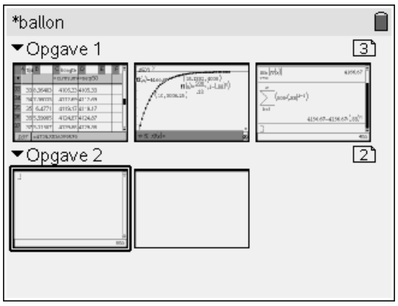
Definieer een lege pagina “rekenmachine” en een lege pagina “notities”.

Deze pagina’s krijgen de nummers 2.1 en 2.2.

Eventueel kan gebruik gemaakt worden van de sneltoets ctrl I om een nieuwe pagina in te voegen.

Variabelen worden enkel binnen één opgave herkend, zo kan de variabele *x* verschillende waarden hebben in de opgaven 1 en 2.





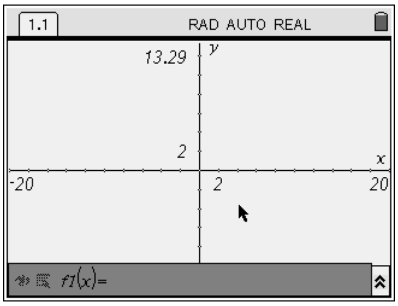
Opdracht: gewichtsproblemen … (Pienter -TSO)

Onze buurvrouw weegt 95 kg. Op een bepaald moment is het haar te veel en ze besluit een streng dieet te volgen dat haar massaverlies met 2 kg per maand zou moeten opleveren. De buurman, die 105 kg weegt, is solidair met zijn buurvrouw en volgt een dieet waarbij men hem een massaverlies van 2 % per maand belooft.

a Stel de formules op die de massa van onze buren weergeeft in functie van de tijd.
b Teken beide grafieken met ICT.
c De buurvrouw wil stoppen met haar dieet als ze nog slechts 60 kg weegt. De buurman wil doorgaan tot hij een massa van 75 kg heeft behaald. Wie bereikt als eerste het vooropgestelde doel?

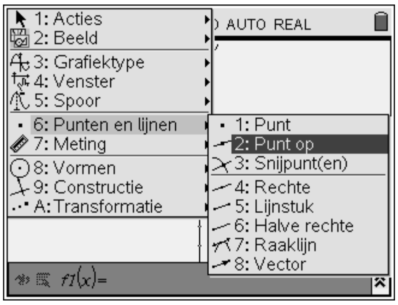
3. Voorbeeld: de invloed van een parameter

Bespreek de invloed van de parameter *b* van de tweedegraadsfunctie $f(x) = ax^2 + bx + c$

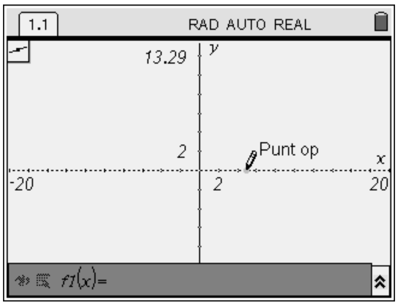


We illustreren eerst wat de invloed is van *b* in $f(x) = x^2 + bx + 3$.

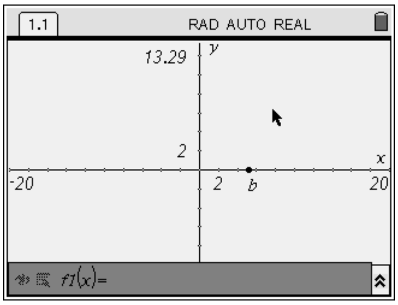
Open een nieuw bestand met home **6:Nieuw document** en selecteer **2: Grafieken & Meetkunde toevoegen**, met esc ga je van het invoerveld voor de functies naar het grafisch scherm.



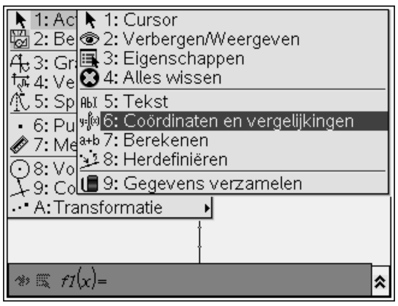
Druk menu
6: Punten en lijnen
2: Punt op
Druk enter



Navigeer met de cursor naar de x-as tot er “punt op” verschijnt
Opgepast: zorg ervoor dat de positie niet samenvalt met de positie van een schaalstreepje.

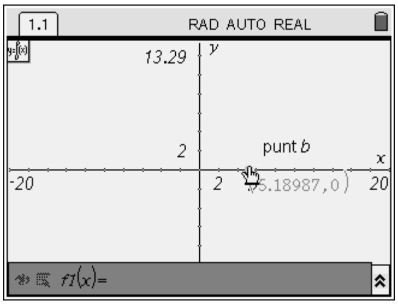


Druk enter B , het punt wordt getekend en krijgt de naam b



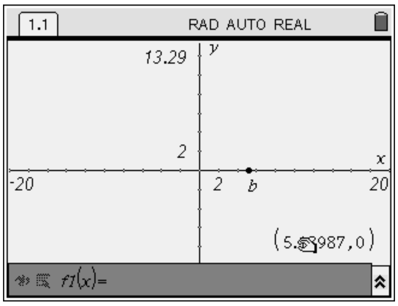
Druk menu
1: Acties
6: Coördinaten en vergelijkingen

Navigeer naar punt b en druk enter enter esc
De coördinaten van b staan op het scherm.

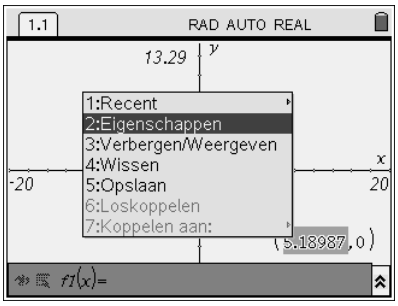


Navigeer naar de coördinaten tot een open hand verschijnt met de vermelding “tekst”, sluit de hand met ctrl en versleep de coördinaten naar een andere positie, druk esc om de positie te verankeren.

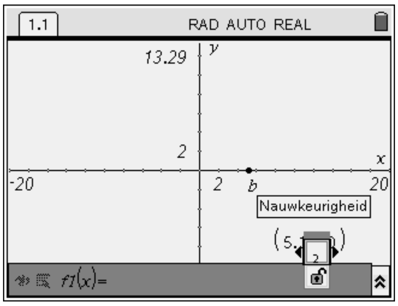
Tip: een open hand sluit je ook door een tijdje te blijven indrukken.



Navigeer naar de x-coördinaat en selecteer deze met de kliktoets , vervolgens ga je naar het contextmenu ctrl menu
2: Eigenschappen enter

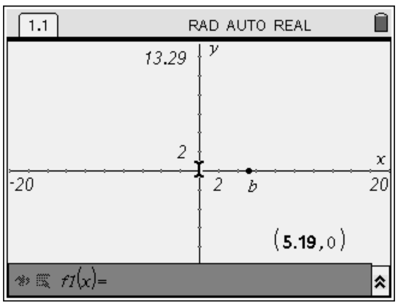


Kies een nauwkeurigheid van 2 decimalen en bevestig met enter

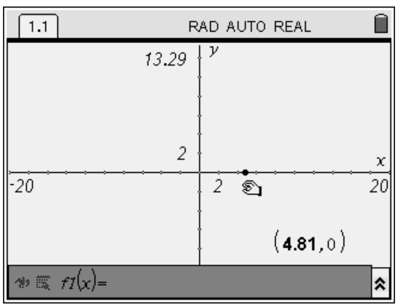


Selecteer de x-coördinaat opnieuw en sla deze met ctrl menu
5: Opslaan op in de variabele b : overtyp “var” met B enter , de x-coördinaat verschijnt nu in het vet als waarde *gekoppeld* aan de variabele .

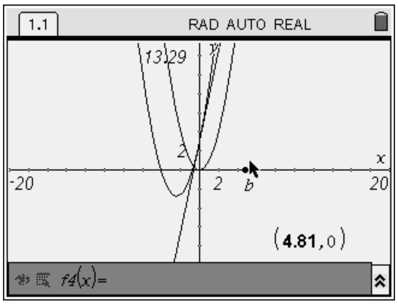
Tip: sto▸ var slaat tevens een variabele op.



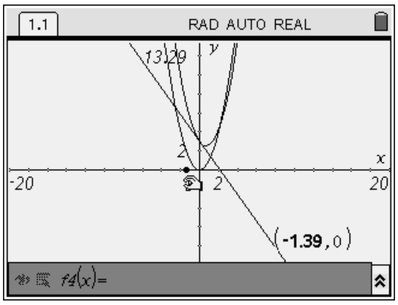
Versleep het punt b op de x-as, de x-coördinaat wijzigt mee en toont de actuele waarde van de variabele b.



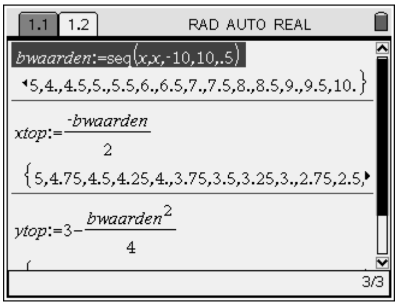
Ga met tab naar het functieveld.
Definieer $f1(x) = x^2$, $f2(x) = b \cdot x + 3$ en de somfunctie $f3(x) = x^2 + b \cdot x + 3$ (expliciet *b* met *x* vermenigvuldigen!)
Druk esc en verwijder de voorschriften van de functies, selecteer hiertoe het “label” met en verwijder dit met clear



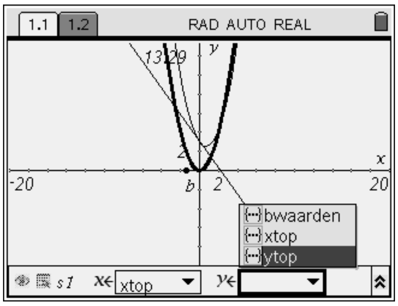
Versleep het punt b op de x-as en observeer de grafiek van f3:
de parabool $y = x^2 + bx + 3 = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + 3 - \frac{b^2}{4}$ is een verschuiving van $y = x^2$ en glijdt langs de kantelende rechte $y = bx + 3$ die de parabool raakt in het vaste punt $(0,3)$.



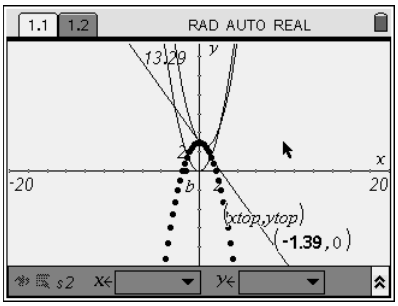
Observeer nu de top $\left(-\frac{b}{2}, 3 - \frac{b^2}{4}\right)$ van $y = x^2 + bx + 3$
Open een nieuwe pagina “rekenmachine” en definieer hierin de rijen $bwaarden := seq(x, x, -10, 10, 0.5)$, $xtop := \frac{-bwaarden}{2}$,
$ytop := 3 - \frac{bwaarden^2}{4}$

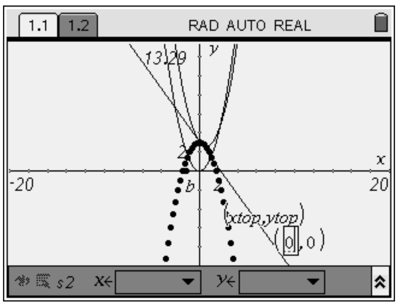


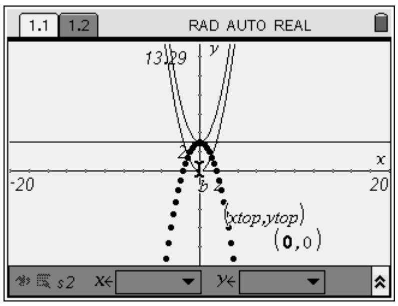
Ga terug naar de grafiektoepassing met ctrl ◀, kies het grafiektype puntenwolk, kies xtop voor x en ytop voor y



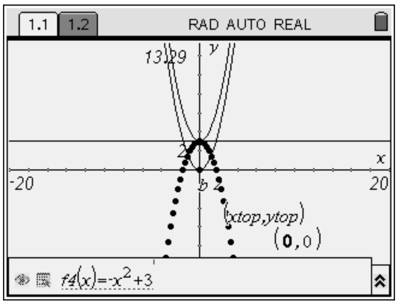
De paraboooltoppen schijnen zelf op een parabool te liggen, wijzig vervolgens de waarde van b naar 0 op het grafisch scherm:

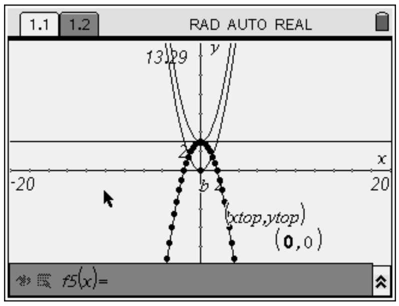






We vermoeden dat de meetkundige plaats van de toppen het spiegelbeeld is van de parabool $y = x^2 + 3$ t.o.v. zijn topraaklijn $y = 3$. De grafiek van $y = -x^2 + 3$ bevestigt dit:





Het korte bewijs verloopt als volgt:

De toppenparabool heeft als parametervergelijking $\begin{cases} x = -\dfrac{b}{2} \\ y = 3 - \dfrac{b^2}{4} \end{cases}$, met b als parameter.

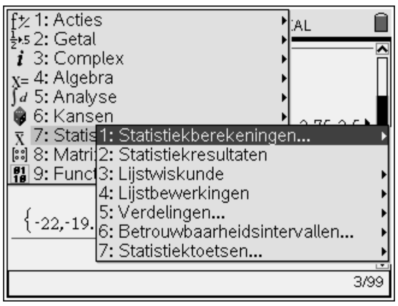
Eliminatie van b levert inderdaad de vergelijking $y = 3 - x^2$.

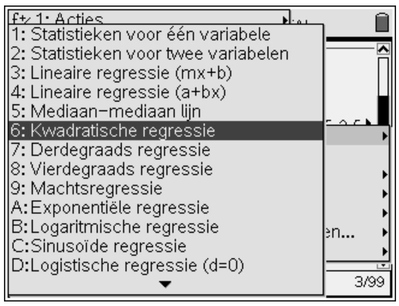
Opmerkingen:

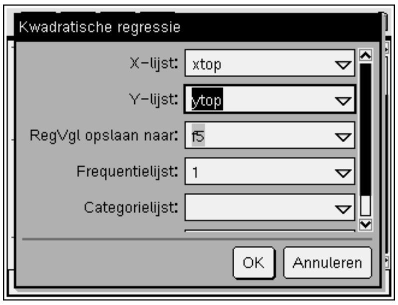
1) De punten $\left(-\dfrac{b}{2}, 3 - \dfrac{b^2}{4}\right)$ en $\left(\dfrac{b}{2}, 3 + \dfrac{b^2}{4}\right)$ hebben als midden het vaste punt $(0,3)$;
de toppenparabool $y = 3 - x^2$ is ook het spiegelbeeld van $y = 3 + x^2$ t.o.v. het punt $(0,3)$.

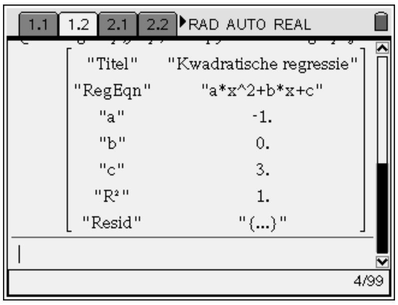
2) De vergelijking van de toppenparabool kan ook worden gevonden door een kwadratische regressie uit te voeren op de puntenwolk der toppencoördinaten.
Ga hiertoe naar pagina 1.2 van het document.

Druk menu
7: Statistiek
1: Statistiekberekeningen
6: Kwadratische regressie



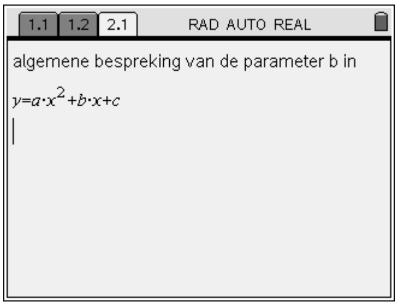




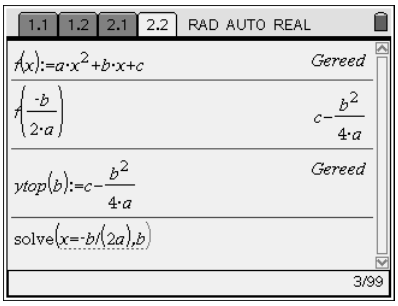


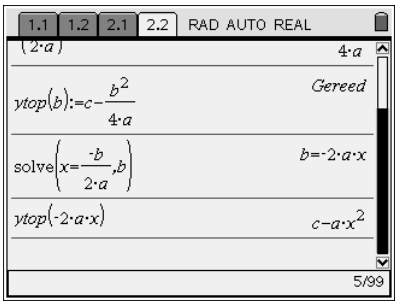
Open een nieuwe opgave met een pagina "notities"
Typ de tekst rechts in en voeg een "uitdrukkingenvak" in voor de vergelijking

Druk menu
2: Invoegen
1: Uitdrukkingenvak



Open een pagina "rekenmachine" en voer de volgende instructies uit:



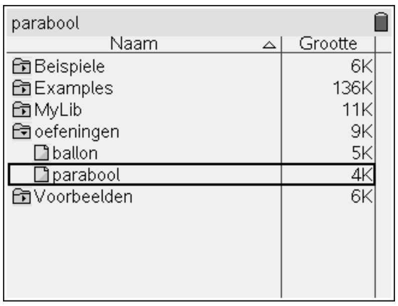


We besluiten algemeen:

Voor vaste a en c raakt de parabool $y = ax^2 + bx + c$ aan $y = bx + c$ in het vaste punt $(0, c)$.

Als b varieert dan beschrijft de top van $y = ax^2 + bx + c$ een parabool met vergelijking $y = -ax^2 + c$, dit is het spiegelbeeld van de parabool $y = ax^2 + c$ t.o.v. de rechte $y = c$.

Sla het bestand op onder de naam "parabool" , met (home) **7: Mijn documenten**, verkrijg je een overzicht van de opgeslagen mappen en bestanden:



Hetzelfde overzicht verkrijg je ook door vanuit een pagina van het document twee keer ctrl ▲ te drukken. Je gaat terug omlaag in de hiërarchie van de documentenstructuur met ctrl ▼

4. Statistische toepassingen

4.1 Gevoeligheid van centrum- en spreidingsmaten.

Gegeven zijn de afstanden (in mijl) naar verschillende Amerikaanse steden vanuit Baltimore (Maryland).

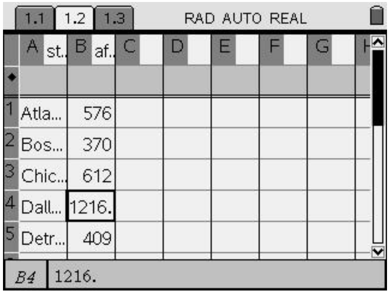
Stad	Afstand	Stad	Afstand
Atlanta	576	Miami	946
Boston	370	New Orleans	998
Chicago	612	New York	189
Dallas	1216	Orlando	787
Detroit	409	Pittsburgh	210
Denver	1509	St.-Louis	737

Aan de hand van bovenstaande gegevens willen we de gevoeligheid van centrum- en spreidingsmaten bestuderen.

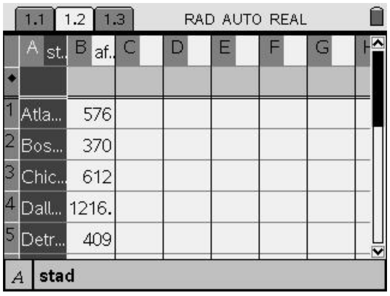
We maken een nieuw document aan door ctrl N in te drukken en kiezen voor **3: Lijsten en Spreadsheet toevoegen**.

Met ▲ zorgen we dat we naast de kolomletter staan en vullen in **stad**.

Druk een aantal keren op ▼ en vul de namen van de steden in. Pas op begin de naam met ", anders wordt de tekst gezien als een naam van een variabele.

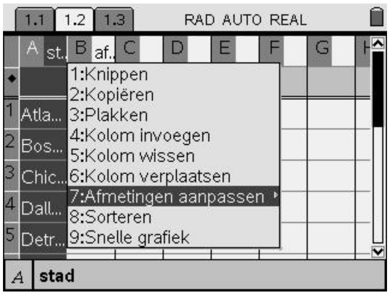


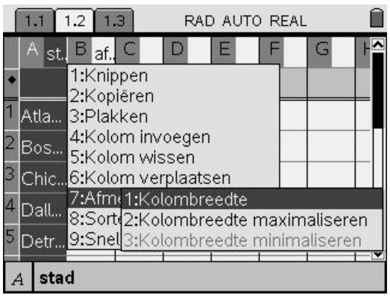
Oefening: Volg dezelfde werkwijze voor de afstanden. De kolomnaam is nu **afst**.

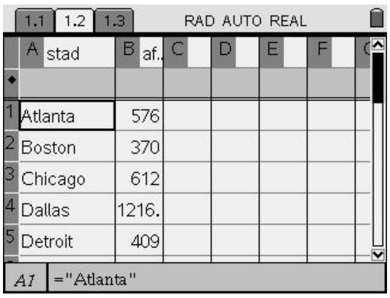


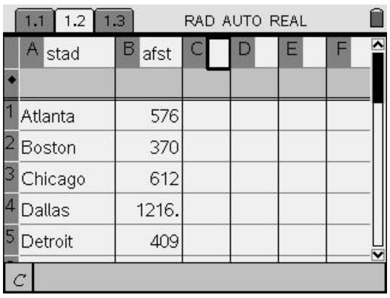
De kolombreedte kan aangepast worden zodat de gegevens volledig zichtbaar zijn. Dit gaat zo:

- Selecteer een volledige kolom door ▲ na elkaar in te toetsen totdat de volledige kolom een donkere achtergrond krijgt.
- Kies (druk daarom ctrl menu in) **7: Afmeting aanpassen**, **1: Kolombreedte**
- Met de toetsen ◀ en ▶ kan de breedte van de kolom aangepast worden. Druk om de breedte vast te leggen.



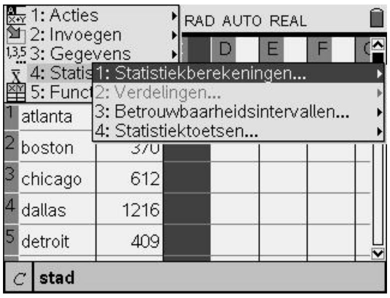


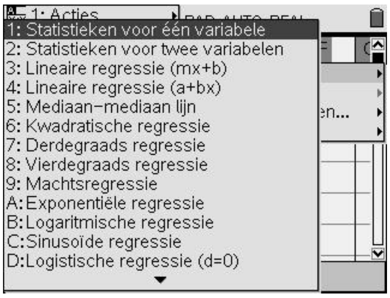


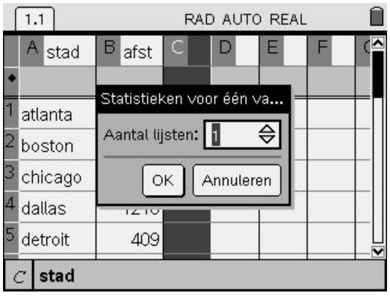


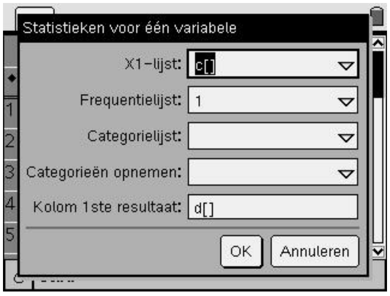
Nu de gegevens ingevuld zijn, kunnen de statistische kengetallen berekend worden.

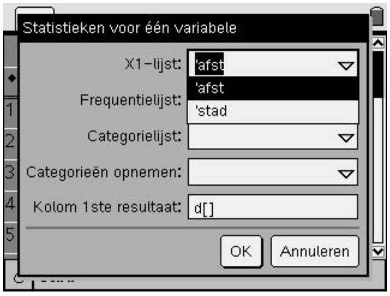
- Druk (menu)
  4: Statistiek
  1: Statistiekberekeningen
  1: Statistiek voor één variabele.
- Druk (enter) want het gaat over 1 lijst namelijk de lijst met afstanden.
- Vervang in **X1-lijst** c[] door afst. Druk (tab) totdat 'afst geselecteerd staat en druk (klik) .
- Druk (tab) tot aan "Kolom 1ste resultaat" . Zorg dat dit kolom C is (c[]) en druk (enter).

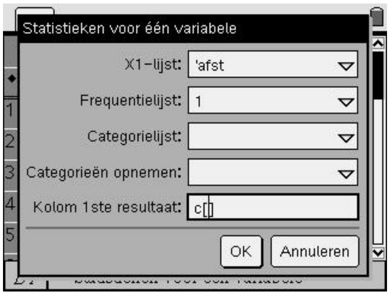




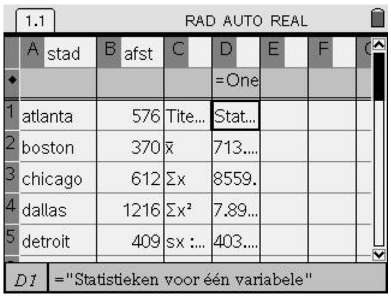






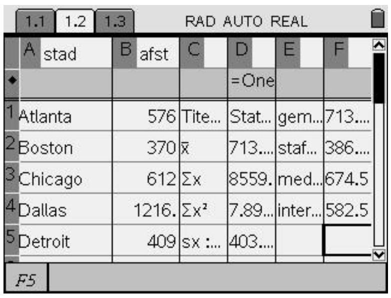


De statistische grootheden worden berekend en verschijnen in de spreadsheet vanaf kolom C.



In de kolommen E en F zorgen we dat de statistische grootheden die we willen bestuderen verzameld worden:

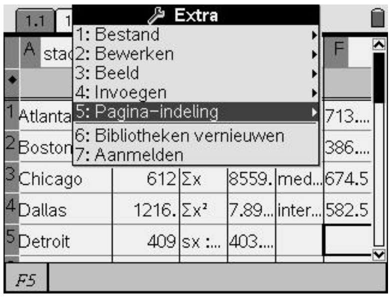
cel E1: "gem	cel F1: =d[2]
cel E2: "stafw	cel F2: =d[6]
cel E3: "med	cel F3: =d[10]
cel E4: "interkw	cel F4: =d[11]-d[9]



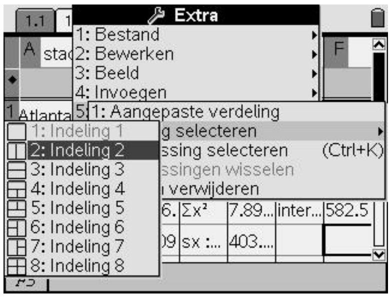
We wensen in hetzelfde venster een dotplot en een boxplot van de gegevens te maken, samen met de gewenste statistische kengetallen.

Daarvoor zullen we de paginalay-out moeten aanpassen.

Dit gebeurt als volgt:

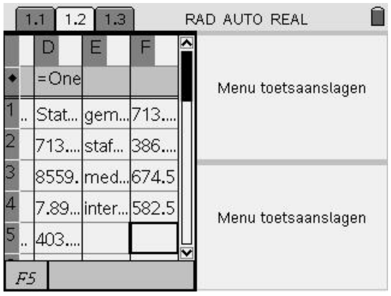


- Selecteer 🔧 (druk ctrl 🏠),
  5: pagina-indeling
  2: indeling selecteren
  7: indeling 7
  Druk 🖱 of druk enter



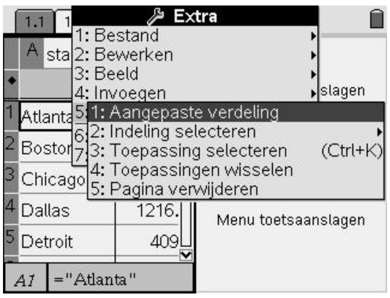
Met ctrl tab of ⧉ kunnen we tussen de verschillende deelvensters navigeren.

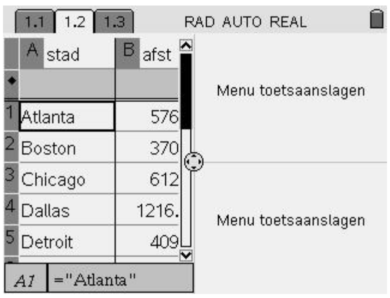
Eerst passen we de afmetingen van het grote deelvenster aan. We gaan het venster versmallen.
Zorg dat het venster geselecteerd is. Het venster is omkaderd met een zwarte rand.

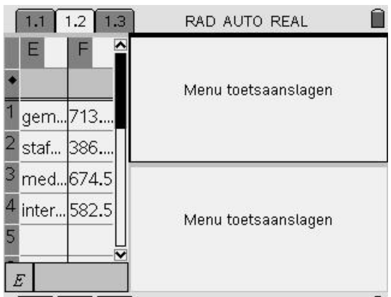


- Selecteer 🔧 (druk ctrl 🏠),
  5: pagina-indeling
  1: aangepaste indeling.

- Met de cursorknop kunnen we de afmetingen van het venster aanpassen. Eindig met een druk 🖱 ter bevestiging.

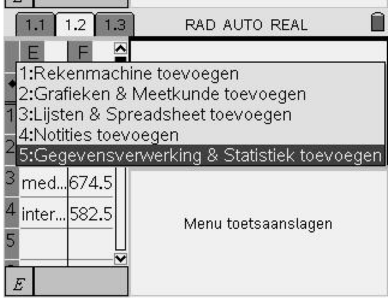






- Selecteer het deelvenster rechtsboven met ⧉ (druk ctrl tab). Dit merk je door de zwarte rand rond het deelvenster.

- Druk menu
  5: Gegevensverwerking & Statistiek toevoegen

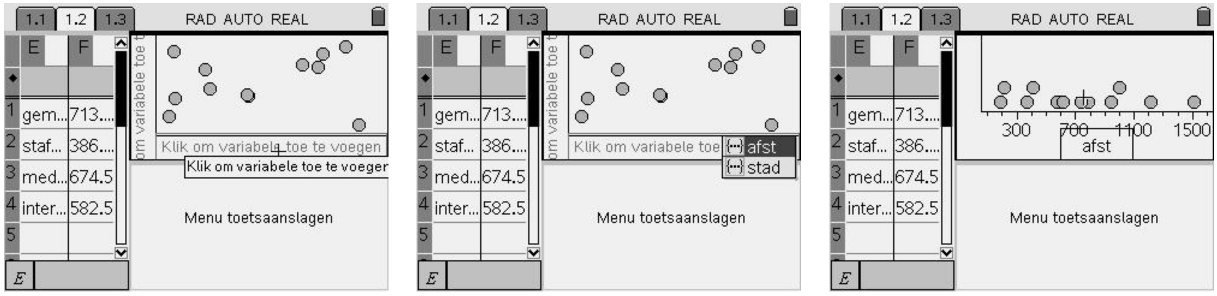


- Verplaats de cursor naar de onderrand van het deelvenster totdat de boodschap “**Klik om variabele toe te voegen**” verschijnt.

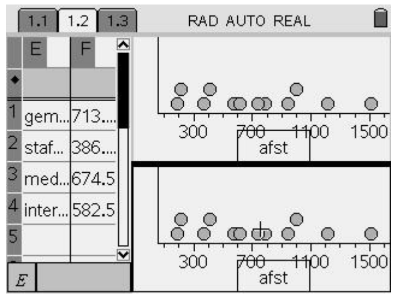
- Druk 🖱 en selecteer de juiste variabele, hier ‘afst.

- Druk 🖱 om te bevestigen.

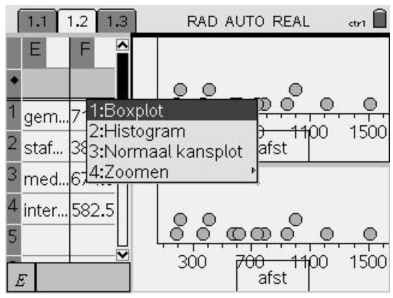
- Een dotplot verschijnt in het deelvenster.



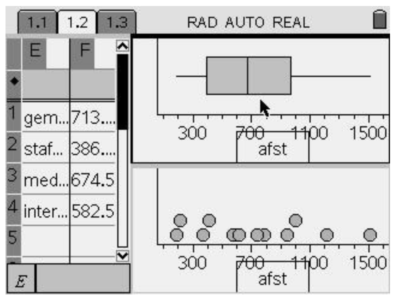
Oefening: Herhaal hetzelfde voor het deelvenster rechtsonder.



In beide vensters krijgen we hetzelfde plaatje. We willen echter bovenaan een boxplot krijgen en onderaan mag de dotplot blijven.



- Keer terug naar het deelvenster rechtsboven met (druk ctrl tab).
- Druk (druk ctrl menu)
  1: Boxplot
- Druk om te bevestigen.



Nu kunnen we de gevoeligheid van deze statistische kengetallen onderzoeken.

Daarvoor selecteren we de dotgrafiek. Het is nu namelijk mogelijk om een dot te selecteren en die te verslepen binnen de grafiek. Daarbij worden alle andere gegevens die afhankelijk zijn van die waarde mee veranderd.

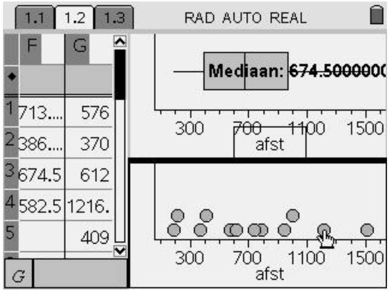
Let op:

De oorspronkelijke gegevens worden mee aangepast. Indien je de oorspronkelijke gegevens wil bewaren dan moet je die binnen de spreadsheet kopiëren onder een andere naam.

- Selecteer de gegevens door op de eerste cel te staan van het bereik en ▲ of ▼ te drukken tot het einde van het bereik aangeduid is.
- Druk ctrl C en verplaats de cursor naar de gewenste plaats
- Druk ctrl V om de gegevens naar die plaats te kopiëren.

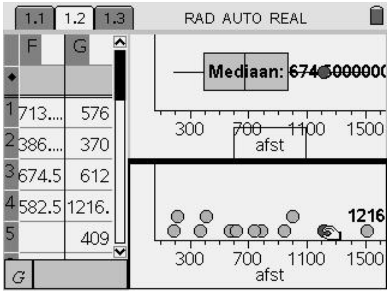
- Selecteer een dot (een gegeven) en druk om te bevestigen. De kleur van de dot is veranderd.

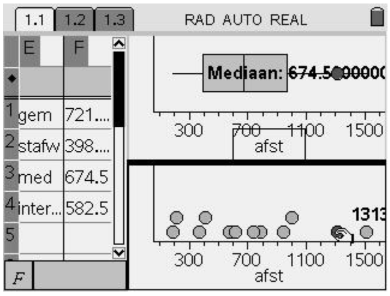
- Door in te drukken zijn we in staat om de dot te verplaatsen. Gebruik hiervoor de ▶ of ◀ van de cursorknop.



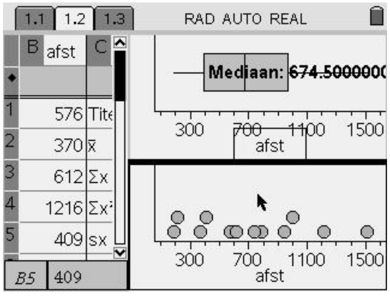
Wanneer we dit doen met de meetwaarde 1216 dan zien we de waarde veranderen. Kijken we in de kolom F van de spreadsheet dan veranderen enkel de gemiddelde waar en de standaardafwijking. De andere waarden blijven constant.

Indien we de waarde willen herstellen moeten we dit doen door in de spreadsheet de correcte waarde opnieuw in te voeren.





Willen we de dot deselecteren dan klikken we buiten het gebied van de dotjes.



Opdracht:

Bestudeer de gevoeligheid van de statistische kengetallen verder door andere waarden de veranderen.

Oefening: (uit Delta Statistiek 3/4 lesuren)

In 1797 begon de Engelse geleerde Cavendish aan een reeks ambitieuze experimenten om de “wereld te wegen”. Hij schrok er niet voor terug met eigen middelen een extra gebouw te laten optrekken om het grote apparaat dat hij daartoe construeerde te kunnen huisvesten. In 1798 had hij 29 zorgvuldige herhalingen van zijn experiment uitgevoerd. De cijfers hieronder drukken de dichtheid van de aarde uit als veelvouden van de dichtheid van water.

De relatieve dichtheid van de aarde

5,50	5,61	4,88	4,07	5,26	5,55	5,36	5,29	5,58	5,65
5,57	5,53	5,62	5,29	5,44	5,34	5,79	5,10	5,27	5,39
5,42	5,47	5,63	5,34	5,46	5,30	5,75	5,86	5,85	

Stel de metingen grafisch voor:
- in een dotgrafiek,
- in een histogram met dichtheidsschaal,
- in een boxplot met uitschieters.

Bereken de statistische kengetallen gemiddelde, mediaan, standaardafwijking en interkwartielafstand.

4.2 De normale verdeling

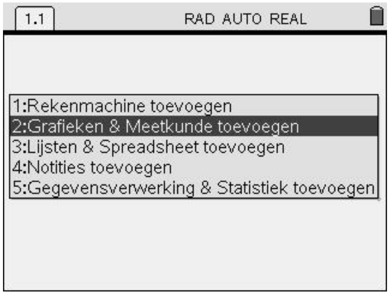
In een bedrijf worden elke dag 1 000 fietswielassen gemaakt met een diameter van 8 mm. De gefabriceerde assen zijn normaal verdeeld met een gemiddelde waarde van 8 mm en een standaardafwijking van 0,003 mm.
Wielassen waarvan de diameter groter is dan 8,006 mm of kleiner dan 7,994 mm worden afgekeurd.

Hoeveel wielassen worden er gemiddeld per dag afgekeurd?

Na verloop van tijd stelt men vast dat de wielassen met een diameter tussen 7,994 mm en 7,997 mm te veel speling veroorzaken in de naaf.
Hoeveel wielassen moet men dan per dag afkeuren?

(uit Delta Statistiek 3/4 lesuren)

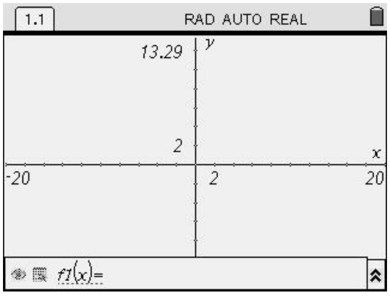
We willen voor deze oefening een grafische voorstelling van de normale verdeling maken waarbij de gewenste oppervlakte gearceerd en berekend wordt. Daarna berekenen we de juiste antwoorden in een tekstbestand.



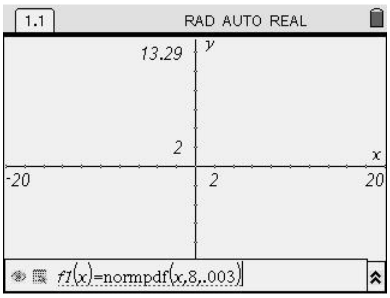
We openen een nieuw document.

- Druk ctrl N
  2: Grafieken & Meetkunde toevoegen

- Druk om te bevestigen.



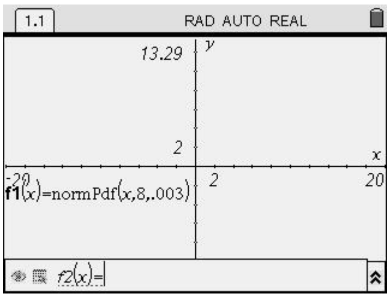
We voeren het functievoorschrift in van de normale dichtheidsfunctie met de gemiddelde waarde 8 en standaardafwijking 0,003.



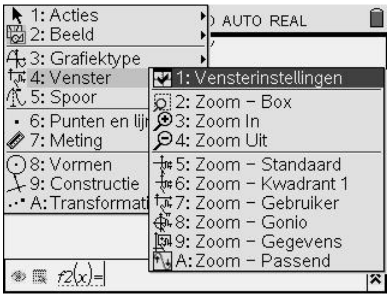
- Voer in bij f1(x) (onderaan het scherm)
  normpdf(X,8,0.003) (haakjes hoeven niet gesloten te worden daar zorgt de rekenmachine wel voor)

- druk enter

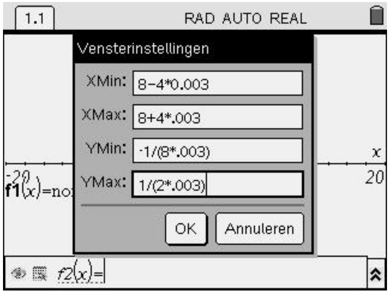
We zien weinig veranderen. Alleen wordt er in het scherm een label geplaatst horende bij de ingevoerde normale dichtheidsfunctie.



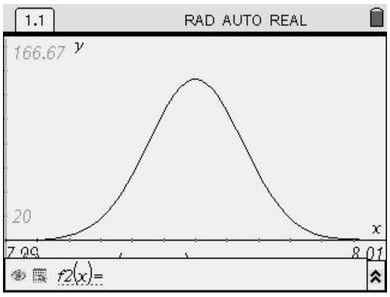
De vensterinstellingen dienen nog aangepast te worden zodat de normale dichtheidsfunctie optimaal in het grafische scherm getoond wordt.



- Druk menu
  1:Vensterinstellingen

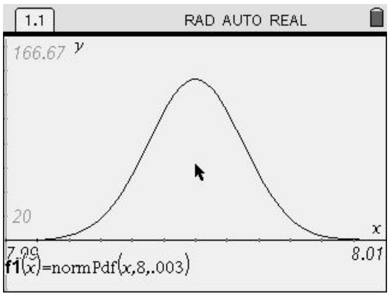


- Klik om te bevestigen. Er verschijnt een invulvenster. Vul de volgende waarden in.
  Xmin: 8 – 4 * 0.003 Ymin: -1/(8 * 0.003)
  Xmax: 8 – 4 * 0.003 Ymax: 1/(2*0.003)
  Deze waarden zijn niets anders dan $\mu - 4 \cdot \sigma$, $\mu + 4 \cdot \sigma$, $\frac{-1}{8 \cdot \sigma}$ en $\frac{1}{2 \cdot \sigma}$.
  Met de tab–toets springen we van de ene in te vullen waarde naar de andere. Wanneer de laatste waarde ingevuld is sluiten we af met enter.

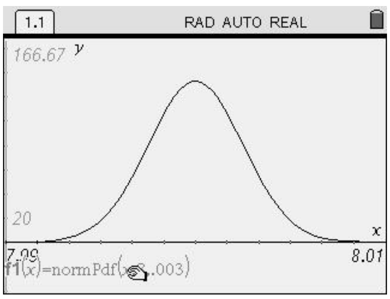


De grafiek van de normale dichtheidsfunctie wordt getekend.

Er wordt automatisch een label bij de grafiek geplaatst. Dit is hier niet zichtbaar omdat het label verstopt zit achter de invoerregel voor functievoorschriften.



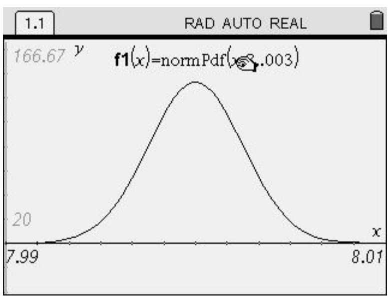
Deze invoerregel kunnen we laten verdwijnen door ctrl G in te drukken.



Indien het label niet op de goede plaats staat of overbodig is, kunnen we dit verplaatsen of zelfs verwijderen.

- Zorg dat het label geselecteerd is.
  Verplaats daarom de cursor naar het label.

- Hou ingedrukt totdat het handje zich sluit. We hebben het label nu geselecteerd.

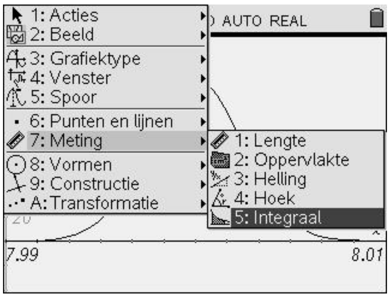


- Door met de cursorknop te bewegen kunnen we het label over het grafisch venster verplaatsen. Klik om de plaats van het label te bevestigen.

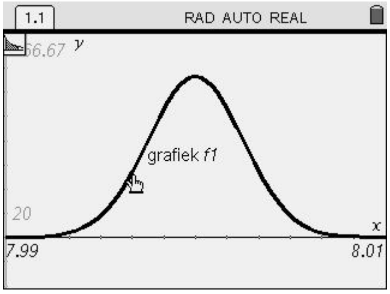
  of

  Druk ctrl menu ()
  4: Wissen
  Druk om het label te laten verdwijnen.

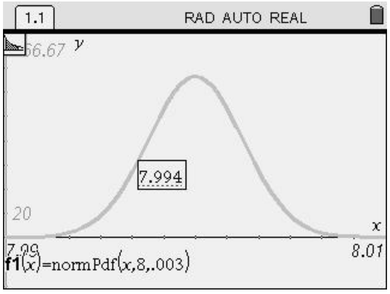
We willen nu de oppervlakte arceren onder de normale dichtheidsfunctie tussen de grenzen 7,994 en 8,006.



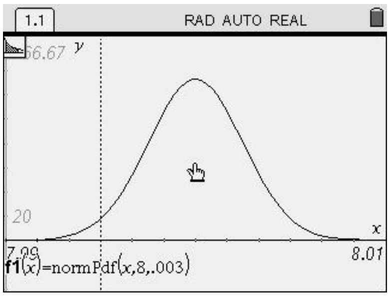
- Druk menu
  7: Meting
  5: Integraal
  en druk .



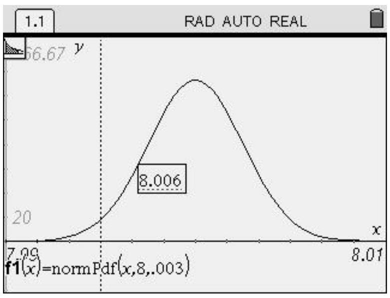
- Selecteer de grafiek van de normale dichtheidsfunctie.



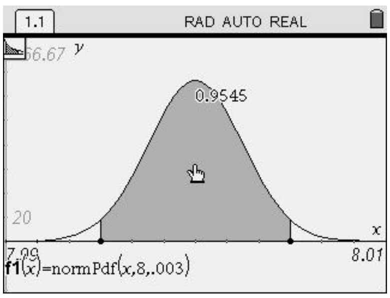
- Tik de ondergrens in en druk enter.



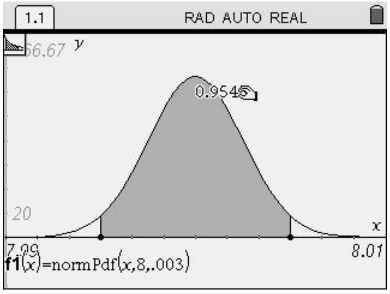
Er verschijnt een verticale lijn die de ondergrens van het te arceren gebied aangeeft.



- Tik daarna de bovengrens in en druk enter.

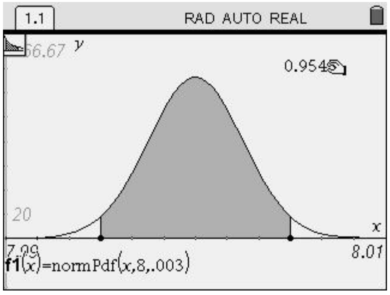


Het gewenste gebied wordt gearceerd en de waarde van de oppervlakte wordt aangegeven in de grafiek.

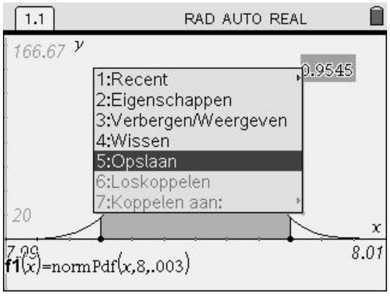


We kunnen de waarde van de oppervlakte toekennen aan een variabele zodat we naar die waarde kunnen verwijzen vanuit elke pagina binnen het document.

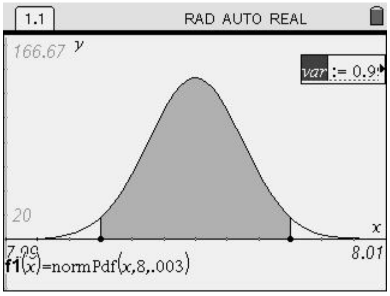
- Selecteer de waarde en hou die vast met het handje. Druk daarvoor op totdat het handje zich sluit.

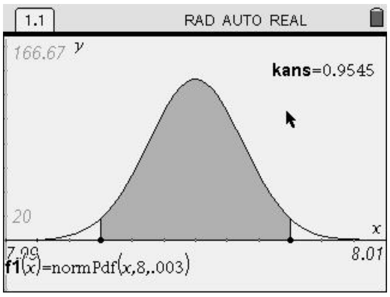


- Verplaats de waarde naar een lege plaats binnen het grafisch venster.



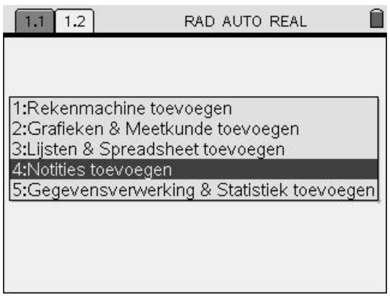
- Druk ctrl menu of ( )
  5: Opslaan
  en druk om te bevestigen.





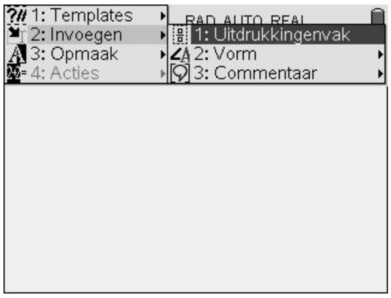
- Vul nu de naam van de variabele in, bijvoorbeeld **kans**.
  Druk enter om te bevestigen.

We maken binnen hetzelfde document een nieuwe pagina aan. In deze nieuwe pagina willen we het antwoord geven op de vraag.

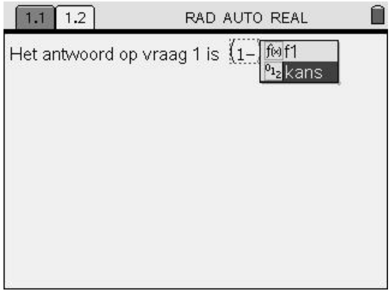


- Druk ctrl I
  4: Notities toevoegen
  Druk om te bevestigen.

- We voeren de volgende tekst in: “Het antwoord op vraag 1 is”

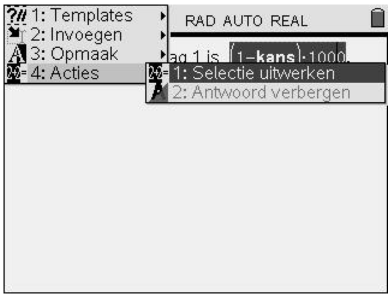


- Druk menu
  2: Invoegen
  1: Uitdrukkingenvak
  Druk

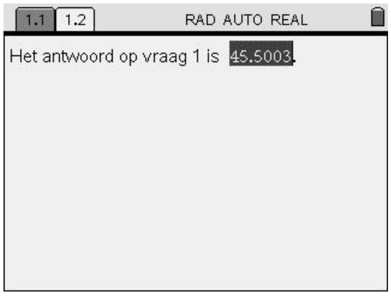


- Vul in **(1-** en druk sto▸ var.
  Selecteer de variabele kans en klik
  Vervolledig de uitdrukking met **)*1000**
  Sluit af met enter.

- Selecteer de volledige rekenkundige uitdrukking door de CAPS ⇧ –toets ingedrukt te houden terwijl ◀ of ▶ ingedrukt worden.



- Druk menu
  4: Acties
  1:Selectie uitwerken
  Druk



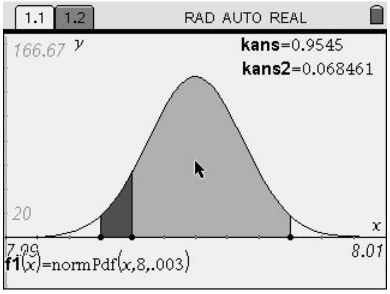
- De geselecteerde uitdrukking is vervangen door het resultaat van de berekening.

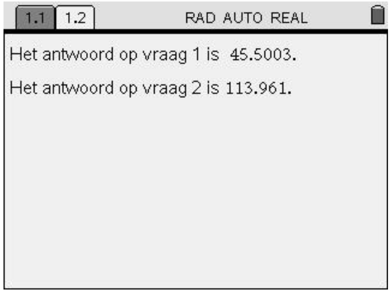
Let wel:

Wanneer de waarde van de variabele verandert, wordt de waarde van de uitdrukking niet mee aangepast. Het verband tussen de uitdrukking en de variabele is verloren gegaan bij het uitrekenen van de uitdrukking.

Oefening:

Probeer op een analoge manier het antwoord op vraag 2 te zoeken en te formuleren in de pagina notities.





Opmerking:

Indien je enkel in de resultaten geïnteresseerd bent, kunnen alle berekeningen rechtstreeks uitgevoerd worden in de toepassing Rekenmachine. Probeer dit zelf eens.

Opdracht:

Bij volwassenen gebruikt men vaak de Wechsler Adult Intelligence Scale als IQ-test. De leeftijdsgroep 60-64 scoort gemiddeld 90 met een standaardafwijking van 25; de leeftijdsgroep 20-34 heeft als gemiddelde 110 met dezelfde standaardafwijking. Lien is 33 en heeft een score van 130; haar moeder, 61 jaar, heeft volgens de test een IQ van 110. Wie scoort, relatief gezien, het best t.o.v. de eigen leeftijdsgroep?

(Delta Statistiek 3/4 lesuren)

4.3 Steekproefvariabiliteit

Dit voorbeeld is gebaseerd op een opgave uit Van Basis tot Limiet 6 Statistiek uitgebreid.

Opgave:

Bij een fabrikant van toasters vertonen 8 % van de geproduceerde toestellen een defect.

Aan de hand van een simulatie willen we het fenomeen steekproefvariabiliteit illustreren.

Het aselect nemen van 1 toaster uit de totale productie van toasters kunnen we simuleren met de functie **rand()**. Deze functie genereert een getal tussen 0 en 1. Indien de waarde van dit gegenereerde getal kleiner is dan of gelijk is aan 0,08, kunnen we dit beschouwen als een “defecte toaster” uit de populatie.

- **rand() ≤ 0.08** voeren we in op rekenmachinepagina. Het ≤-teken krijgen we door ctrl $<$ in te voeren.
- Het resultaat van deze uitdrukking is ofwel

  false: het gegenereerde getal is groter dan 0,08. In onze context betekent dit een toaster zonder defect.

  ofwel

  true: het gegenereerde getal is kleiner dan of gelijk aan 0,08, wat staat voor een defecte toaster.

Het aselect nemen van een steekproef van n toasters uit de populatie van geproduceerde toasters kunnen we simuleren door de instructie rand() n keer te laten uitvoeren.

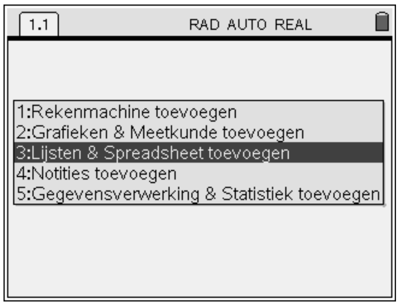
- **rand(n)**: genereert n getallen tussen 0 en 1.

Het komt er nu op aan te weten hoeveel defecte toasters onder de n genomen toestellen zitten. Hiervoor moeten we wat kunstgrepen toepassen.

De instructie sumif brengt redding. Dit is een voorwaardelijke somopdracht.

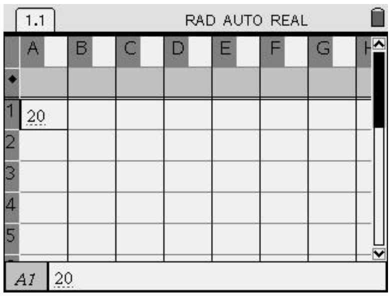
sumif({1,2,3,4,5},?<3,{10,50,40,30,70}) levert als resultaat *60* op. De instructie controleert in de eerste lijst welke getallen aan de voorwaarde (< 3) voldoen. Daarna worden de gelijkstandige getallen met de getallen die voldoen aan de voorwaarde, uit de tweede lijst opgeteld. Op deze manier kunnen we tellen hoeveel defecte toestellen aanwezig zijn in de genomen steekproef als we de tweede lijst opvullen met 1'tjes.

Daarbij is het voor deze toepassing nuttig om op een gebruiksvriendelijke manier het aantal elementen in een steekproef te kunnen aanpassen. Daar we de steekproefvariabiliteit willen bestuderen zal het van belang zijn de historistiek van een aantal waarden bij te houden wanneer de steekproefgrootte verandert.

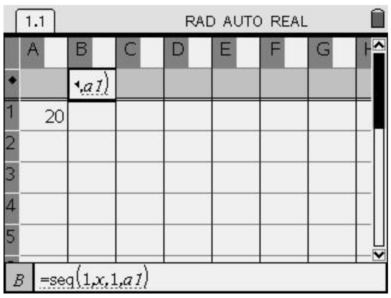


We openen een nieuw document.

- Druk ctrl N
  3: Lijsten & Spreadsheet toevoegen
  Druk

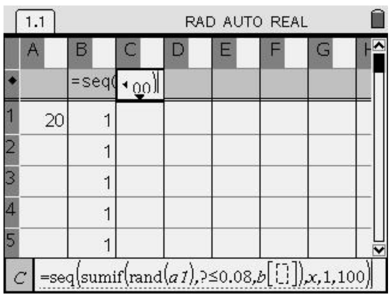


- In de eerste cel van kolom A (A1), voeren we de steekproefgrootte bijvoorbeeld 20 in.



- In kolom B maken we een lijst even groot als de steekproef maar waarbij alle elementen 1 zijn. Vergeet niet dat een instructie wordt vooraf gegaan door een gelijkheidsteken.

  =seq(1,x,1,a1) enter
  a1 verwijst naar de waarde in de cel a1,
  x is een telvariabele.



- In de kolom C zullen we nu 100 keer een steekproef van 20 toasters nemen, selecteren en tellen hoeveel defecte toestellen er onder zitten.

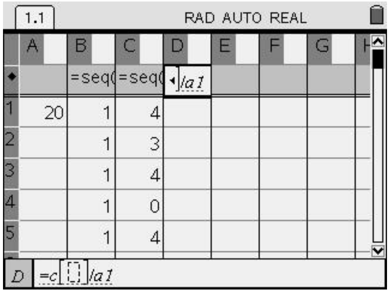
  =seq(sumif(rand(a1),? ≤ 0.08,d[ ]),x,1,100) enter

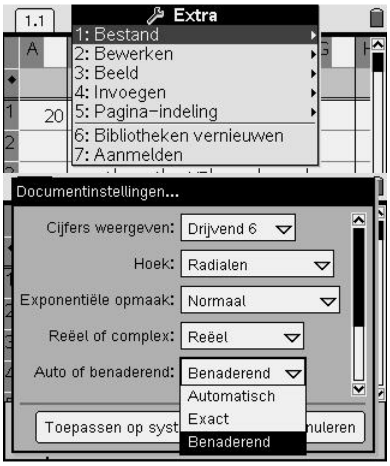
- In de kolom D berekenen we voor de verschillende steekproefen de proportie van de defecte toasters.
  =c[ ]/a1

  Indien de getallen als decimale getallen moeten voorgesteld worden, verander de documentinstelllingen.

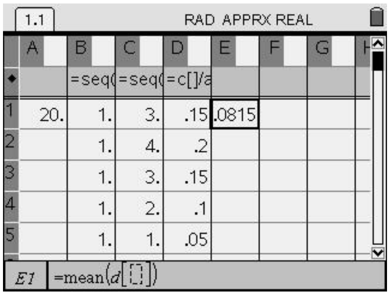
  Druk ctrl ⌂ (of 🔧)
  1: Bestand
  6: Documentinstellingen

  Gebruik de tab–toets om de rubriek Auto of benaderend te selecteren. Met de ▼–toets kan dan Benaderend aangeduid worden. Sluit af door tweemaal op enter te drukken.

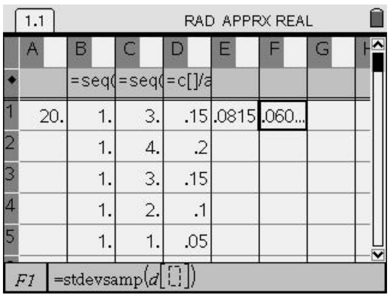




- In de cel E1 berekenen we de gemiddelde waarde van de steekproefproporties
  =mean(d[ ])



- In de cel F1 berekenen we de standaardafwijking van de steekproefproporties
  =stdevsamp(d[ ])



We willen nu een historiek van de steekproefgrootte, de gemiddelde proportie, de theoretische waarde en de schatter van de theoretische waarde van de standaardafwijking van de steekproefproportieverdeling in een tabel bijhouden. De formules zijn

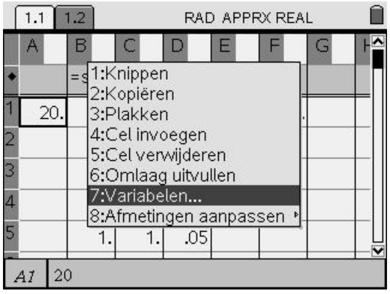
$\sigma = \sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}$ met p de theoretische proportie,

$schatter = \sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$ met $\hat{p}$ de benaderende waarde van de proportie (gemiddelde steekproefproportie.

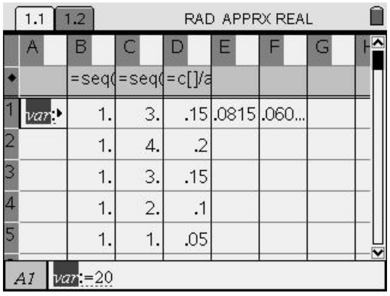
We openen een nieuwe pagina binnen hetzelfde document, met als toepassing Lijsten & Spreadsheet.

- Druk ctrl I
  3: Lijsten & Spreadsheet toevoegen.

Eerst moeten we nog variabelen koppelen aan de waarden die we willen overnemen van de eerste spreadsheet in de tweede.

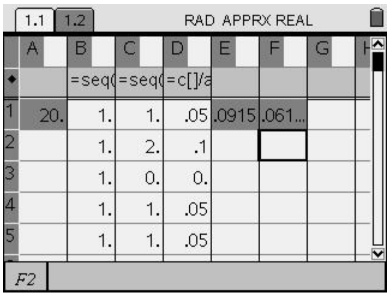


- Druk ctrl ◀ (of ⬚).
- Selecteer cel a1
- Druk ctrl menu (of ⬚)
  7: Variabelen
  1: Var opslaan

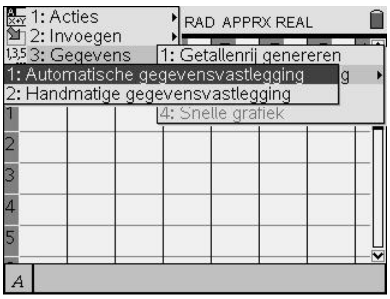


- Vul als variabelenaam **stgr** (steekproefgrootte) in.

Doe nu hetzelfde voor de cellen e1 en f1 en geef deze cellen respectievelijk als variabelenaam **stp** en **stsx**.



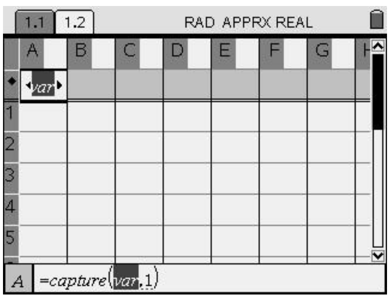
Wanneer aan een cel een variabele wordt toegekend kleurt dit vakje op.

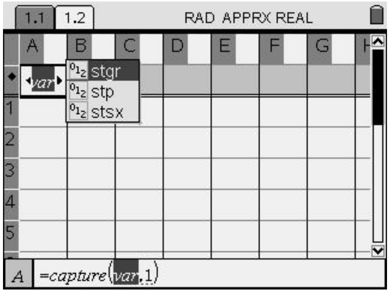


Met ctrl ▶ (of ⬚) keren terug naar de tweede pagina in het document.

In de kolom A gaan we de waarde van de steekproefgrootte (**stgr**) weergeven. We capteren de waarde van de variabele **stgr** vanuit de eerste spreadsheet naar de tweede spreadsheet.

- Zorg dat de cursor in het vakje juist onder de kolomletter staat.
- Druk menu
  3: Gegevens
  2: Gegevensvastlegging
  1: Automatische gegevensvastlegging.

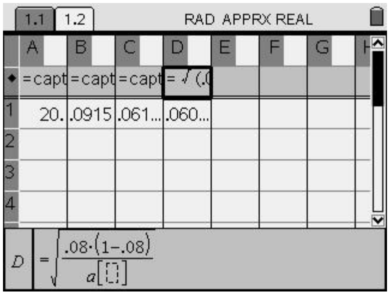




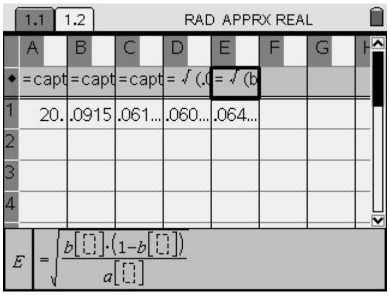
Nu nog enkel de naam van de variabele invullen.

- Druk sto→ var
- Selecteer de correcte naam ▼ en ▲ te gebruiken en bevestig door enter in te drukken.
- Sluit de operatie af door enter in te drukken.

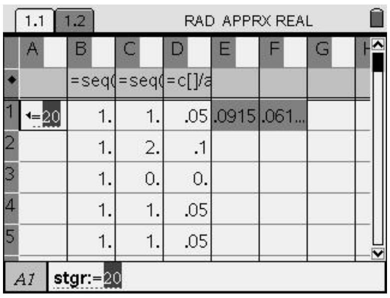
Op een analoge manier kunnen ook de andere twee variabelen in de spreadsheet gecapteerd worden.



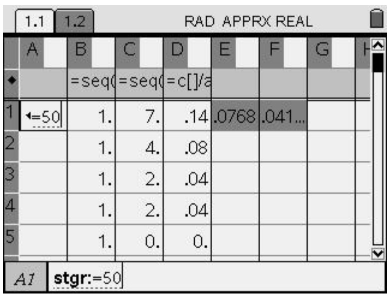
In de kolom D berekenen we de theoretische standaardafwijking met behulp van de populatieproportie.

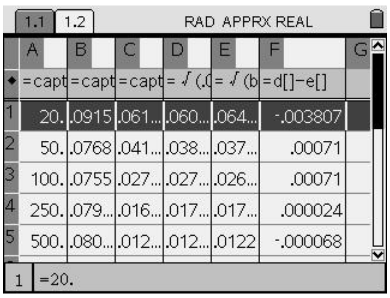


In de kolom E berekenen we dezelfde uitdrukking maar dit keer met de steekproefproportie.

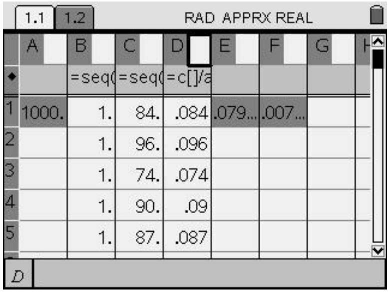


Om de tabel op te stellen keren we terug naar de oorspronkelijke (eerste) pagina. In de cel a1 kunnen we nu achtereenvolgens de waarde veranderen in 50, 100, 250, 500. Door in te drukken wordt alles herberekend. In de tweede pagina van het document worden nu alle veranderingen in de variabele bijgehouden.

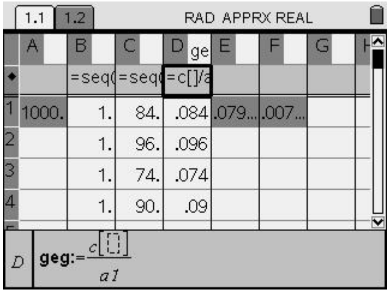




Wensen we een grafische voorstelling te maken van de resultaten dan kunnen we beter de kolom D een naam geven, bijvoorbeeld **geg**. Op die manier zijn we in staat om de gegevens op te roepen vanuit een andere pagina.

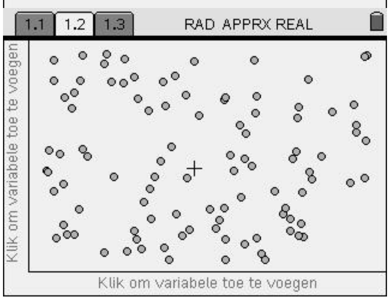


- Druk ▲ totdat het vakje naast de kolomletter D is geselecteerd.

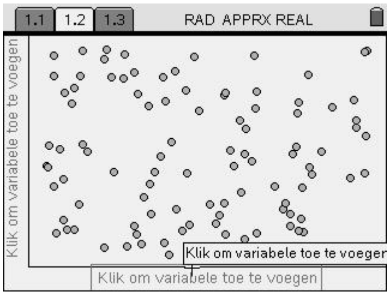


- Toets de naam in en bevestig met enter.

Open een nieuwe pagina met de toepassing "Gegevensverwerking & Statistiek".



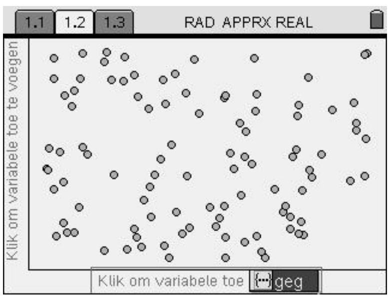
- Druk ctrl I
5: Gegevensverwerking & Statistiek toevoegen.
Druk om te bevestigen.

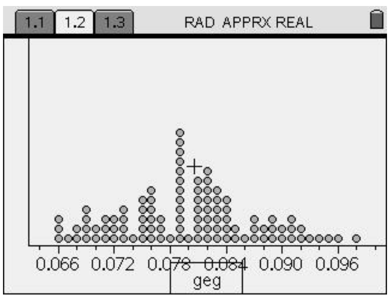


Beweeg de cursor naar de onderrand van het venster door ▲ of ▼ of ▶ of ◀ in te drukken.

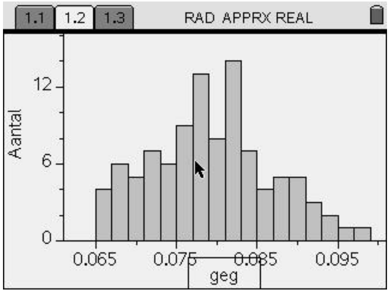
Druk
Dan verschijnt een lijst met mogelijke gegevenslijsten.

- Selecteer de gepaste lijst en klik ter bevestiging. Dan krijgen we een dotplot van de gegevenslijst.



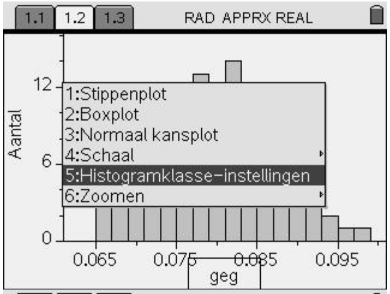


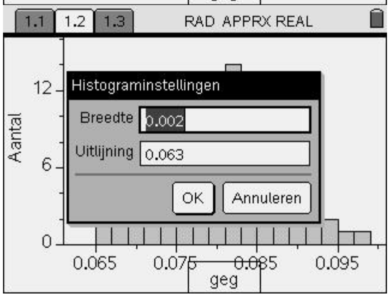
We willen een histogram in plaats van een dotplot. We moeten van grafiektype veranderen. Dit gaat als volgt.



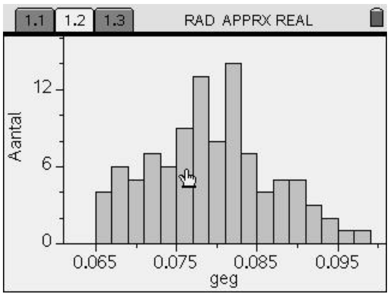
- Druk ctrl menu (of)
  2: Histogram
  Druk .

De startwaarde en de klassenbreedte bij een histogram kunnen aangepast worden.

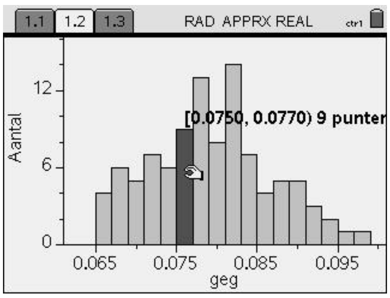




- Druk ctrl menu (of)
  5: Histogramklasse-instellingen
  de gewenste breedte invullen bij Breedte
  de startwaarde invullen bij Uitlijning



Wensen we de gegevens van een bepaalde klasse te kennen dan bewegen we de cursor naar de desbetreffende klasse. De cursor verandert van verschijning, in een handje.



- Druk ctrl om de klasse te selecteren.

Dan verschijnen in de grafiek de klassengrenzen en het aantal waarden in de klasse. Klik en beweeg de cursor buiten het bereik van het histogram en klik nogmaals om de klasse te deselecteren.

Oefening:

Simuleer een steekproeftrekking van 200 waarden uit een normaal verdeelde populatie met gemiddelde waarde 10 en standaardafwijking 1,5. Gebruik hierbij de functie randnorm(μ,σ,n). Maak van de verzamelde gegevens een histogram en teken de bijhorende normale dichtheidsfunctie erbij. (Teken het histogram en de normale dichtheidsfunctie in de toepassing Gegevensverwerking & Statistiek.) Controleer het normaal verdeeld zijn door de “normaal kansplot” te tekenen.

5. De Berlijnse Boog - futuristische architectuur boven de gracht

In Hamburg werd in 1998 het startschot gegeven voor de bouw van een kantoorgebouw met een futuristische architectuur: "Der Berliner Bogen" (de Berlijnse Boog). Het kantoorgebouw is gebouwd boven een gracht. Zo kon extra bouwgrond worden verkregen in de dichtbebouwde stad Hamburg.

Enkele gegevens over het kantoorgebouw:
- bruto oppervlakte ca. 52.000 m²;
- gebouwd boven een retentiebassin voor regen- en huishoudelijk afvalwater;
- 22 stalen dragers dragen de last van de glazen omhulling en dienen als draagconstructie voor de verdiepingsvloeren;
- binnenafmetingen ca. 140 m x 72 m;
- hoogte binnenste boog 36 meter;
- ca. 14.000 m² grote glazen gevel;
- 8 etages (bovengronds);
- ca. 32.000 m² te verhuren oppervlakte;
- plaats voor meer dan 1.000 werkplekken;
- 190 parkeerplaatsen

Onderstaande is een bewerking van Einheit 2 Der Berliner Bogen (*Ursula Schmidt, Bärbel Barzel, Kathrin Richter en Sabine Wüllner*) uit T³-AKZENTE Aufgaben mit TI-Nspire ™/TI-Nspire CAS.

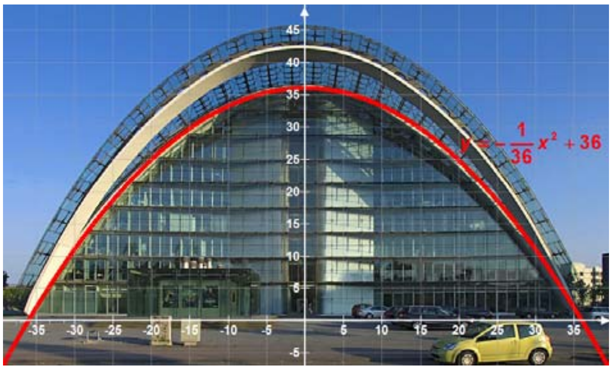
(CL2007NSPIRECASHR1/D
NSCAS/SL/1E5/G
ISBN 978-934064-74-4)

Een architect uit Sjanghai zou graag het paraboolvormig dak kopiëren en daaronder een balkvormig bureaucomplex onderbrengen.
De binnenafmetingen 140 m x 72 m, alsook de hoogte van de binnenste boog, wil hij daarbij behouden .

Welke afmetingen moet de rechthoek onder de boog hebben, opdat het volume van het bureaucomplex maximaal zou zijn?

We tekenen een assenstelsel waarvan

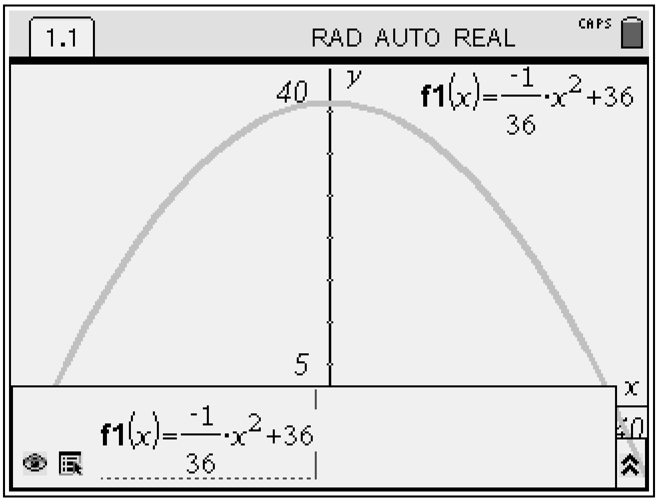
- de y-as door de top van de parabool gaat;
- waar de x-as samenvalt met de bodem.



Het dak wordt dan beschreven door een parabool die door de punten (-36,0), (36,0) en (0,36) gaat.

Dus
$$y = -\frac{1}{36}(x+36)\cdot(x-36)$$
$$= -\frac{1}{36}x^2 + 36$$

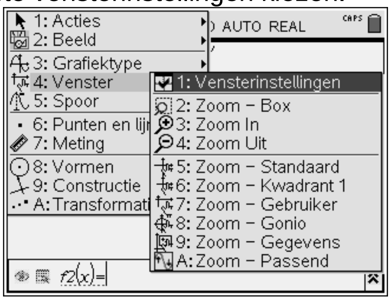
We openen op onze handheld een nieuw document en daarin kiezen we voor
2. Grafieken en Meetkunde toevoegen



We definiëren de functie

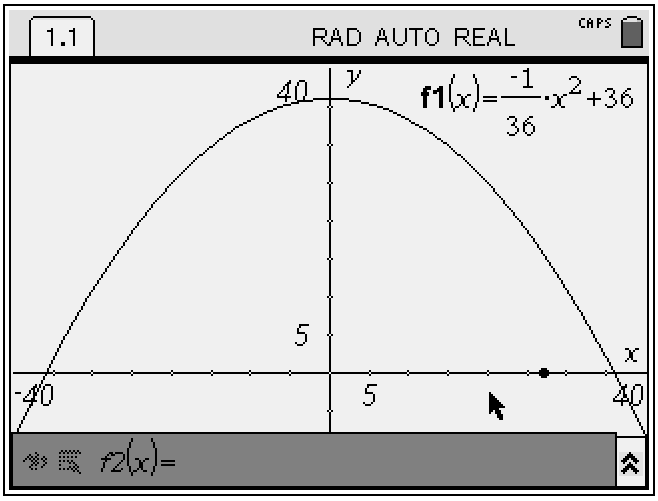
$$f_1(x) = -\frac{1}{36}x^2 + 36$$

Via (menu) en het kiezen van **4:Venster** , **1:Vensterinstellingen** en (tab) kunnen we de juiste vensterinstellingen kiezen.



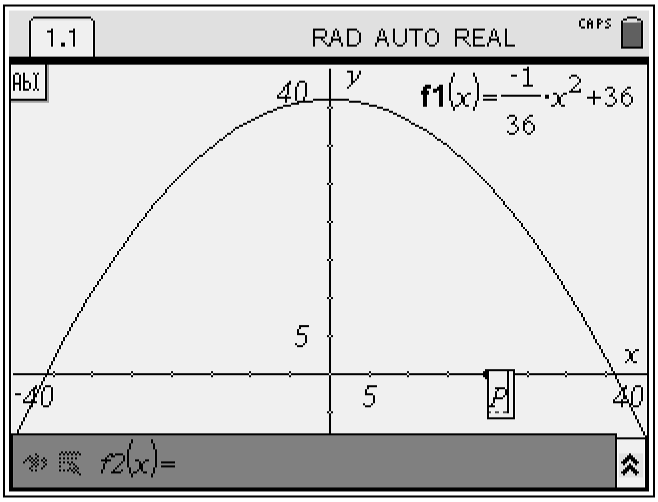
Op de x-as tekenen we een punt :

- we drukken (menu) ,
- we kiezen **6:Punten en lijnen**
- we kiezen **2:Punt op**
- we bewegen met de cursor tot in de omgeving van de parabool
(er verschijnt een pen en de tekst "Punt op")
(niet op een maatstreepje leggen)
- we drukken



Om het punt te benoemen:

- we bewegen de cursor naar het punt tot we een zien, we drukken op (enter) zodat een verschijnt
- drukken we op (menu) ;
- kiezen voor **1:Acties** ;
- en kiezen daar voor **5:Tekst**.



Om de hoofdletter P in te geven

- drukken we eerst op ;
- op Ⓟ ((CAPS ⇧)Ⓟ);
- en tenslotte op (enter).

Als alles naar behoren uitgevoerd werd, dan verschijnt bij het aanwijzen van het punt met de cursor niet zomaar “Punt” maar “Punt **P**”

Om de tekst op de juiste plaats te zetten:

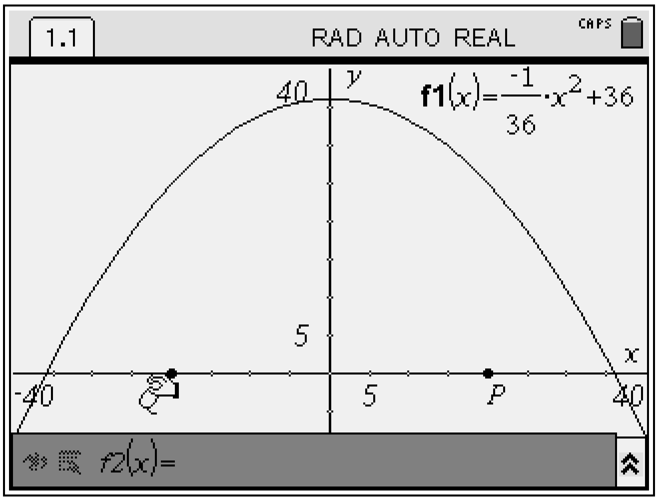
- druk (esc)
- beweeg met de cursor naar de tekst tot een verschijnt en
- druk een tijdje op tot het handje zich sluit.

Nu kunnen we de tekst verplaatsen naar de plaats die we willen.

We spiegelen nu het punt P ten opzichte van de x-as:

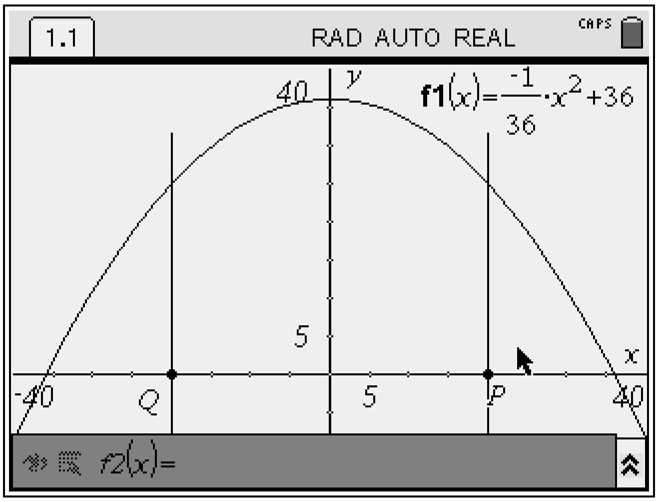
- we drukken (menu) ;
- we kiezen **A:Transformatie**;
- we kiezen **2:Spiegeling**;
- we bewegen de cursor met de pijltoetsen naar het punt P (er verschijnt en de tekst “ punt *P* ”);
- we drukken (het punt knippert);
- we bewegen de cursor nu naar de y-as (tot die knippert) en drukken (enter)

We benoemen dit punt als Q op dezelfde manier als we deden bij P.



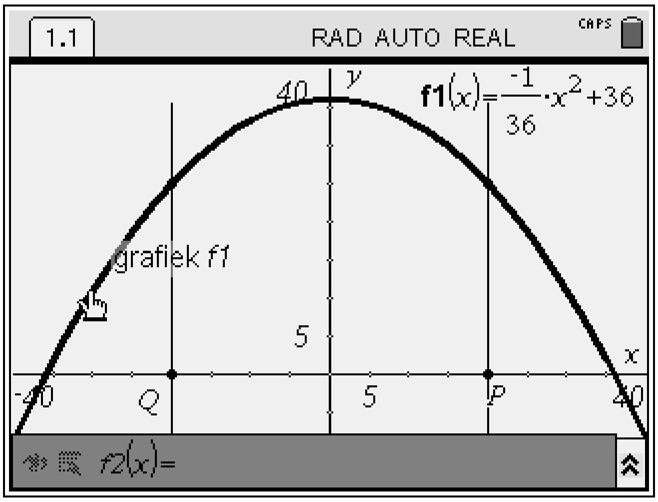
We tekenen door P en door Q de loodrechte op de x-as:

- we drukken (menu);
- we kiezen **9:Constructie**;
- we kiezen **1:Loodrecht**;
- we bewegen naar het punt P en; drukken tweemaal ;
- we bewegen naar het punt Q en; drukken tweemaal
  en vervolgens op (esc).



We bepalen van beide loodrechten de doorsnede met de parabool:

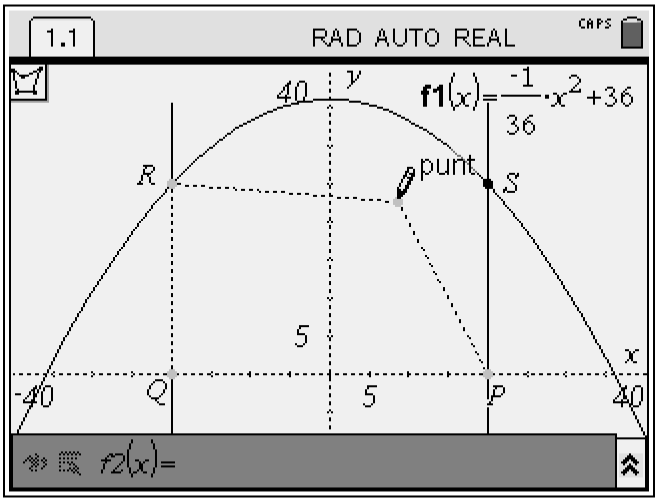
- we drukken (menu)
- we kiezen **6:Punten en lijnen**
- we kiezen **3:Snijpunten**
- we wijzen met de cursor:
  - o de ene loodlijn aan en drukken
  - o de parabool aan en drukken
- de andere loodlijn aan en drukken
- de parabool aan en drukken en (esc)



We benoemen deze punten als R en S op dezelfde manier als we deden bij P.
We verplaatsen de tekst naar de plaats die we willen.

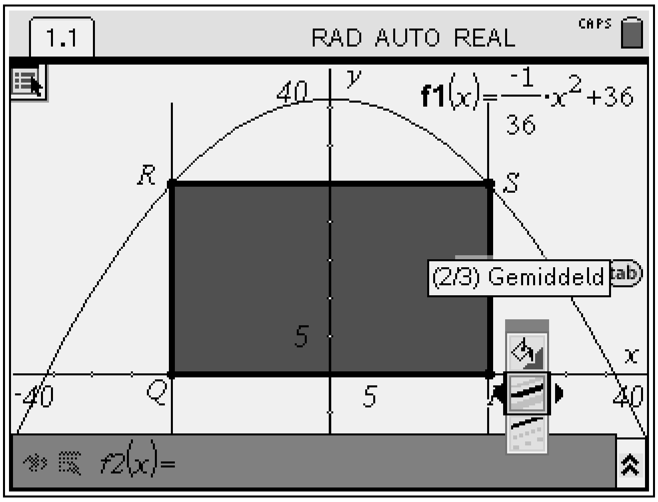
We tekenen door de punten P, Q, R en S een veelhoek
(niet kiezen voor een rechthoek):

- we drukken (menu)
- we kiezen **8:Vormen**
- we kiezen **4:Veelhoek**
- we duiden met de cursor achtereenvolgens de punten P, Q , R en S aan en drukken telkens
- om de constructie te beëindigen drukken we en (esc).



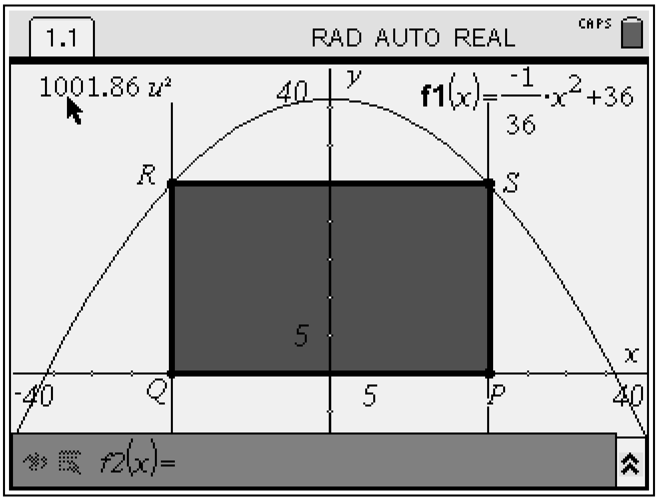
We vullen de veelhoek op:

- we drukken menu
- we kiezen **1:Acties**
- we kiezen **3:Eigenschappen**
- we bewegen de cursor naar een zijde van de rechthoek (tot we de tekst “veelhoek PQRS” zien) en drukken
- om de opvulkleur te veranderen gebruiken we de pijltoetsen ▶ (we kiezen bijvoorbeeld (6/7) donkergrijs)
- om de dikte van de zijden te veranderen drukken we eerst ▼ en dan ▶ en sluiten af met enter



We berekenen de oppervlakte van de veelhoek:

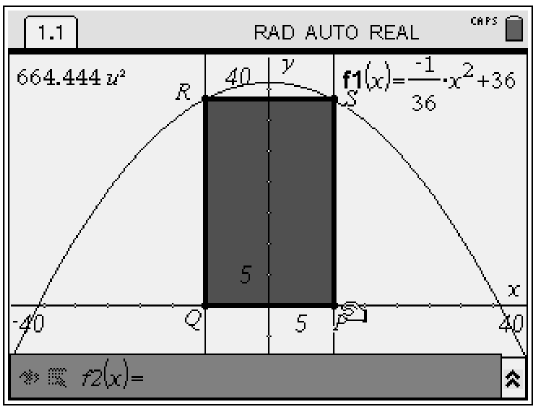
- we drukken menu
- we kiezen **7:Meting**
- we kiezen **2:Oppervlakte**
- we bewegen de cursor naar een zijde van de rechthoek tot de veelhoek opflikkert we drukken tweemaal en vervolgens esc.
- we verplaatsen de maat van de oppervlakte naar de linkerbovenhoek

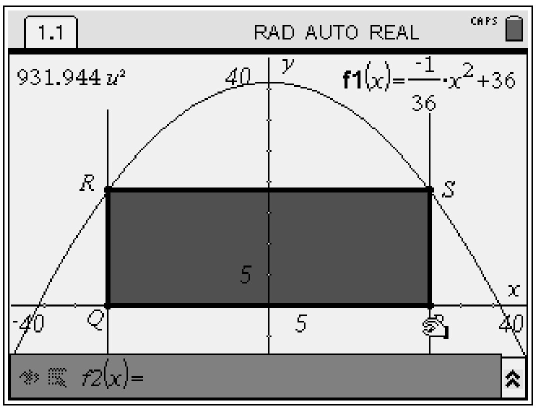


We kunnen het punt P beetpakken en verplaatsen met de pijltoetsen.

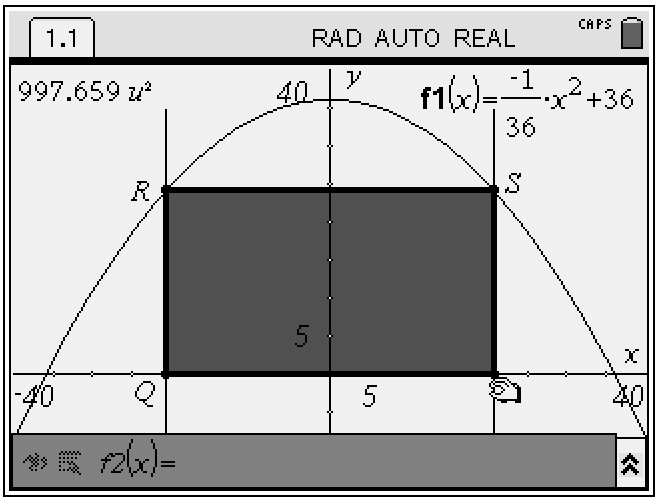
(Herinner: we bewegen de cursor tot in de omgeving van het punt P , tot een verschijnt zien (desnoods tab gebruiken tot de tekst “punt P” als label verschijnt) en drukken een tijdje op tot het handje zich sluit of drukken ctrl het handje sluit dan onmiddellijk.

Normaal zal de oppervlakte linksboven zich mee aanpassen.



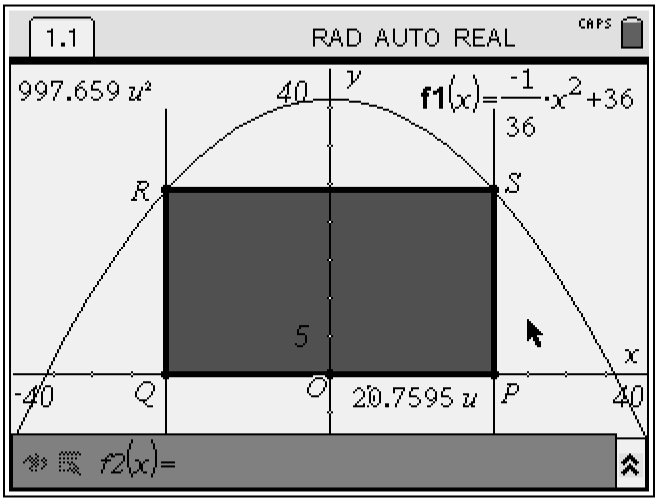


Door het geduldig uitproberen kunnen we zo een punt vinden waar de oppervlakte maximaal wordt.



Om de x-coördinaat van het punt P (en dus de helft van de basis) te kennen van die rechthoek met maximale oppervlakte definiëren we

- het punt O als snijpunt van x-as en y-as
  - o we drukken menu;
  - o we kiezen **6:Punten en lijnen**;
  - o we kiezen **3:Snijpunten**;
  - o we wijzen de x-as aan en drukken ;
  - o we wijzen de y-as aan en drukken ;
  - o we benoemen het snijpunt als punt O.
- we meten het lijnstuk OP
  - o we drukken menu;
  - o we kiezen **7:Meting**;
  - o we kiezen **1:Lengte**;
  - o we wijzen met de cursor het punt O aan en drukken op ;
  - o we wijzen met de cursor het punt P aan en drukken tweemaal op ;
  - o we verplaatsen het label met de lengte goed zichtbaar.



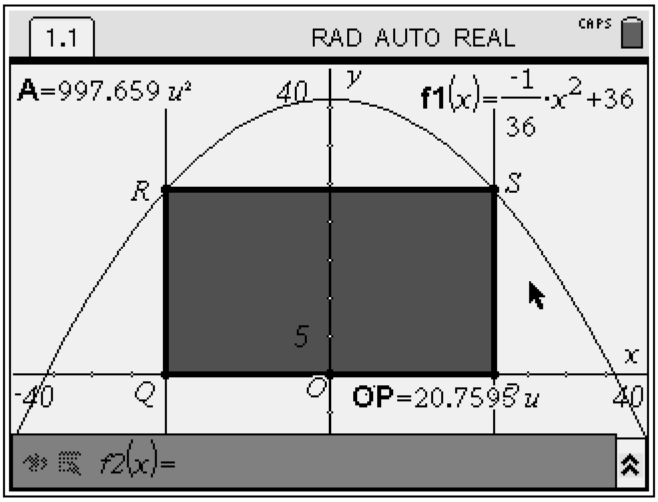
<u>Opmerking</u>:

Om de lengte van een lijnstuk op te meten is het niet noodzakelijk om het lijnstuk fysisch te tekenen. Het is voldoende om de twee punten aan te duiden.

We selecteren het label met de lengte van het lijnstuk OP en drukken op .
We drukken in , kiezen voor **1:Var opslaan**, drukken op en voeren de naam OP in.

Opmerking:

De namen van variabelen zijn niet hoofdlettergevoelig. Alle namen worden opgeslagen onder kleine letters.

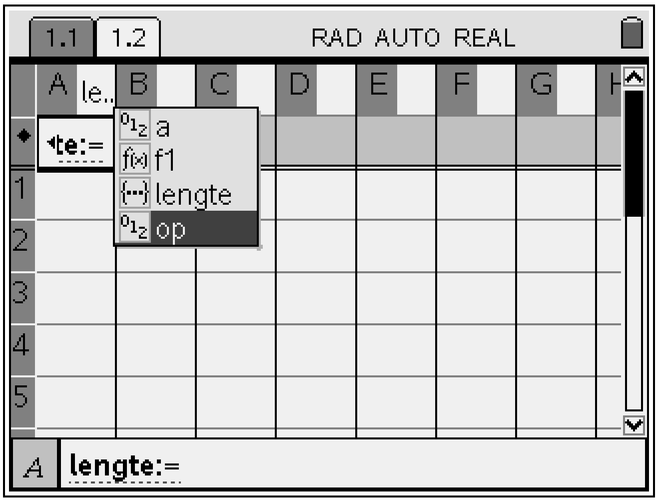


We voeren een Lijsten & spreadsheettoepassing in:

- we drukken
- we drukken **3:Lijsten & …**

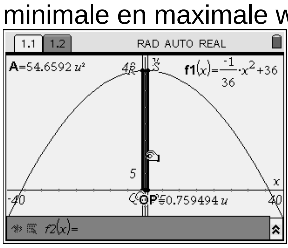
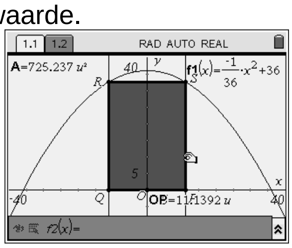
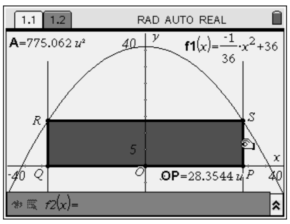
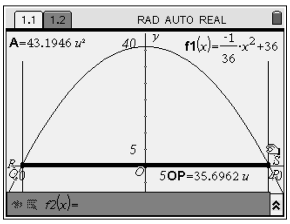
We benoemen de eerste kolom met “lengte” door met de pijltoets ▲ tot helemaal bovenaan te gaan en op te drukken en de tekst “lengte” in te tikken. We beëindigen de ingave door op te drukken.
We staan nu in cel eronder en drukken

- kiezen **3:Gegevens**
- kiezen **2:Gegevensvastlegging**
- kiezen **1:Automatische gegevensvastlegging**
- drukken en selecteren met de pijltoetsen de variabele *op* en
- drukken tweemaal op ;

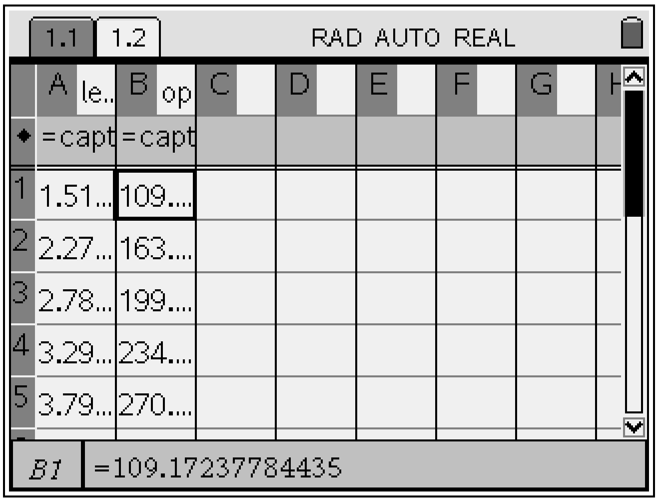


Hetzelfde herhalen we voor de tweede kolom die we de naam oppervlakte meegeven en die we koppelen aan de variabele a

Met keren we nu terug naar het grafisch scherm en slepen daar het punt P tussen zijn minimale en maximale waarde.

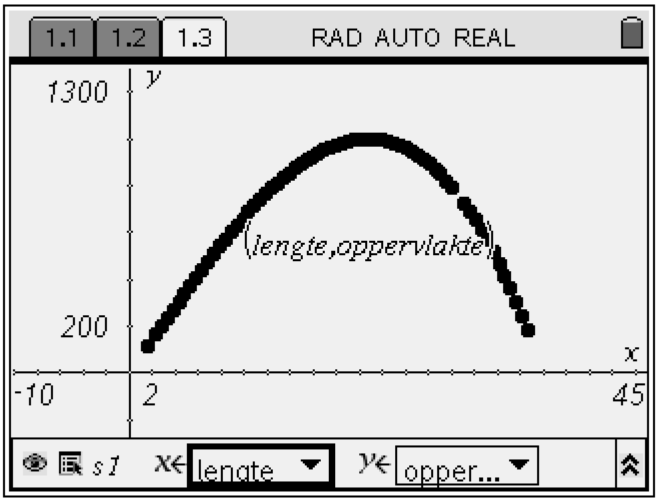
Gaan we nu opnieuw naar ons lijst toepassing (met ctrl) dan zien we dat de twee lijsten ingevuld zijn.



We drukken en voegen een Grafiektoepassing in.
We drukken menu , kiezen **3:Grafiektype** en kiezen **4:Puntenwolk**.
We drukken menu , kiezen **4:Venster**, kiezen **1:Vensterinstellingen** en kiezen een gepast venster voor een grafische voorstelling van de lijsten A en B:
xMin =-10 xMax = 45 yMin = -500 yMax = 1300.

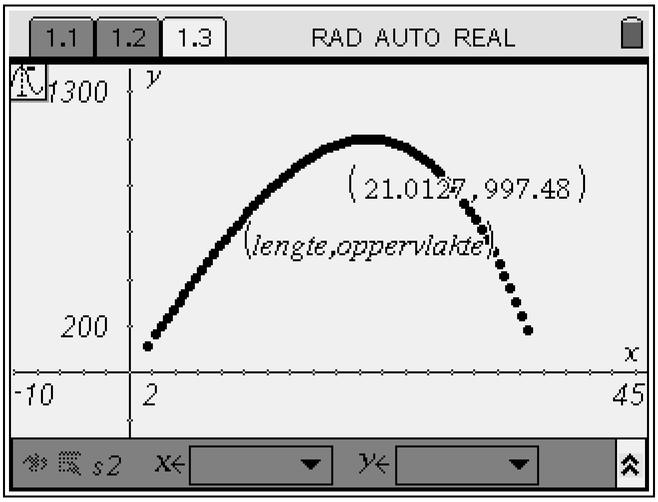
We kiezen nu voor x en y de juiste lijst:

- we drukken en als lengte geselecteerd is drukken we nogmaals op ;
- met een druk tab springen we naar y;
- we drukken en als oppervlakte geselecteerd is drukken we nogmaals op .



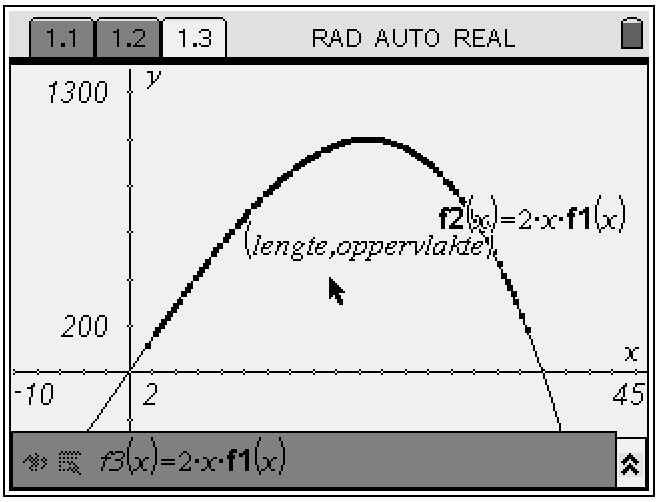
We drukken op menu , kiezen **5:Spoor** en kiezen voor **1:Grafisch spoor**.
Met de pijltoetsen kunnen we nu naar het hoogste punt van het diagram bewegen.

Daar lezen we af dat de oppervlakte van de rechthoek maximaal is als $|OP| = 21{,}0127$
De zijde meet dus ongeveer 42,0254 m.



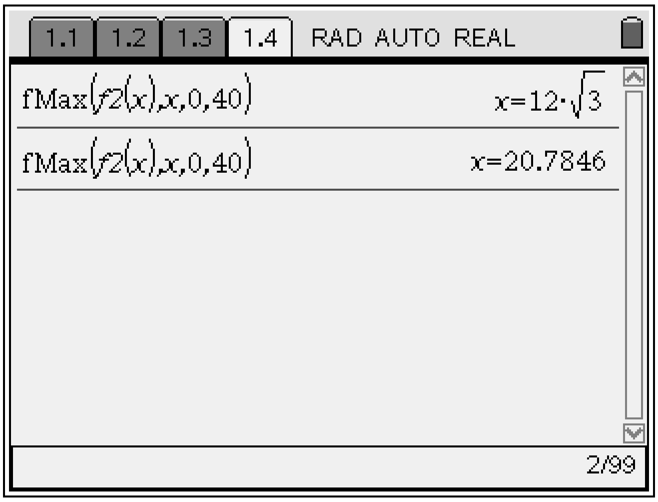
Uiteraard is dit maar een benadering. Het maximum dat afgelezen wordt komt uit de aangemaakte tabellen en deze waren op hun beurt het gevolg van het slepen van een punt.

Als we bedenken dat de oppervlakte van de rechthoek ontstaat door de basis $\left(2 \cdot |OP| = 2x\right)$ te vermenigvuldigen met de hoogte $\left(f_1(x) = -\frac{1}{36}x^2 + 36\right)$ dan wordt die oppervlakte beschreven door de derdegraadsfunctie $\left(f_2(x) = 2x \cdot f_1(x) = -\frac{1}{18}x^3 + 72x\right)$.
We laten deze functie tekenen in een grafisch venster.

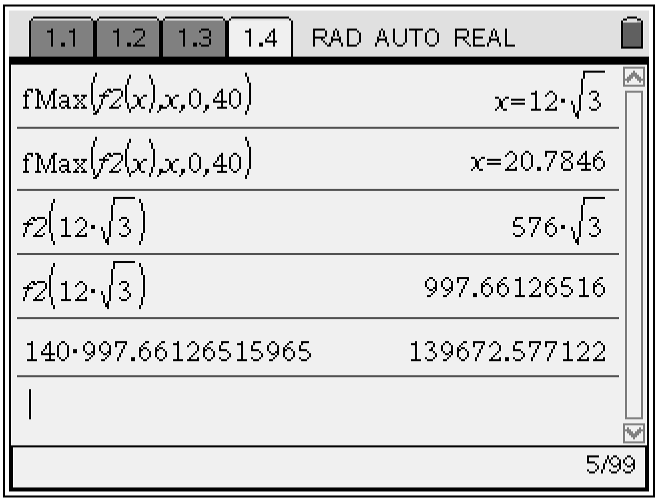


In een nieuw rekenvenster kunnen we bepalen waar het lokaal maximum van deze functie bereikt wordt:

- we drukken menu
- we kiezen **5:Analyse**
- we kiezen **7:Functiemaximum**
- we tikken tussen de haakjes f2(x),x,0,40
- we drukken enter voor het exacte resultaat, of ctrl enter voor een decimale benadering.



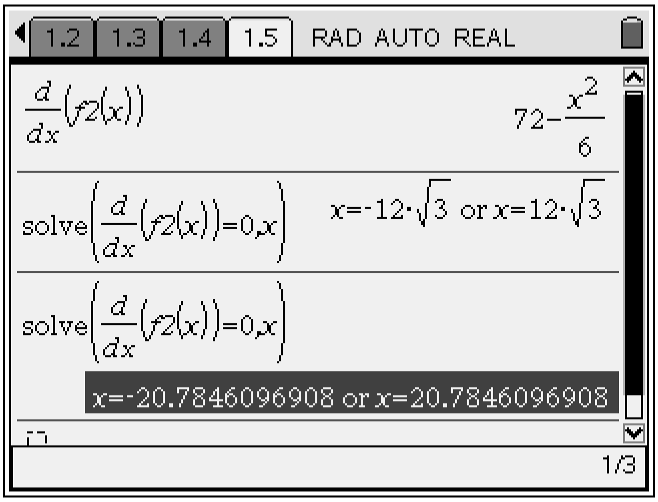
De maximale oppervlakte is dat de functiewaarde van die oplossing voor f_2



De maximale inhoud van het bureaucomplex is dus 139 672,577 m³.

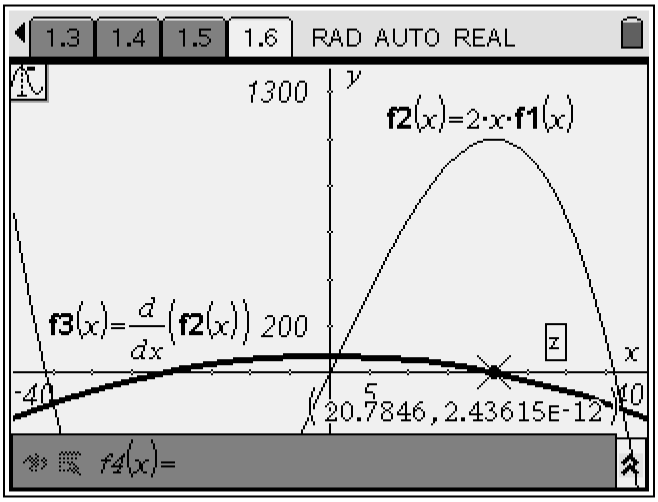
We kunnen het maximum ook vinden door de afgeleide functie van de oppervlaktefunctie te berekenen, de nulwaarden ervan te berekenen en het tekenverloop van die afgeleide te controleren:

- we drukken (menu)
- we drukken **5:Analyse**
- we drukken **1:Afgeleide**
- we vullen x en $f_2(x)$ in op de juiste plaats
- we drukken (enter)
- we geven het commando $\text{solve}\left(\frac{d}{dx}\left(f_2(x)\right)=0,x\right)$ in



We laten de afgeleide functie tekenen en kijken waar die afgeleide functie overgaat van positief naar negatief.
(We passen eerst het grafisch venster aan zodat beide gevonden nulpunten te zien zijn).
Om het commando van afgeleide bij f_3 te verkrijgen

- drukken we (catalog),
- drukken we (2),
- selecteren we **Afgeleide** en
- drukken op (click).



6. Computeralgebra aan het werk

In deze paragraaf illustreren we enkele toepassingen met computeralgebra.
Het werken met de TI-Nspire CAS handheld is ondertussen reeds voldoende gekend, de opeenvolgende handelingen en in te drukken toetsen worden hier dan ook niet meer vermeld.

6.1 De afstand van een punt tot een rechte

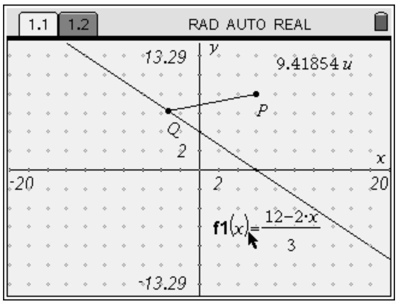
In het vierde jaar bepaalt men de formule voor de afstand van een punt *P* tot een rechte *r*. Dit is de lengte van het kortste lijnstuk dat het punt met de rechte verbindt.
Eerst wordt de vergelijking van de loodlijn door *P* op *r* gezocht, dan het snijpunt *S* van de loodlijn met *r*, tenslotte wordt de afstand van *P* tot *S* bepaald.

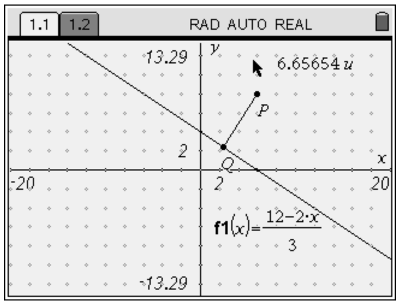
Met een ComputerAlgebraSysteem (CAS) kun je echter rechtstreeks op zoek gaan naar de kortste verbinding tussen *P* en *r* , m.b.v. de afstandsformule tussen twee punten.

We illustreren dit eerst voor een concreet gegeven punt *P*(6,8) en rechte $r \leftrightarrow 2x+3y-12=0$.

Stel $Q(x,y)$ een willekeurig punt van r , dan is $y=\dfrac{12-2x}{3}$ (1)

Men kan alvast grafisch op zoek gaan naar de kortste afstand door het punt Q te verplaatsen:

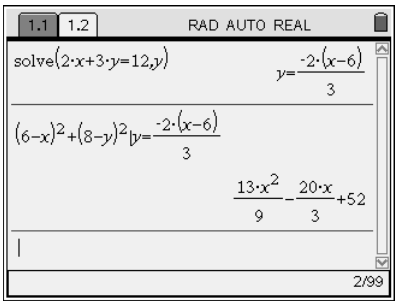


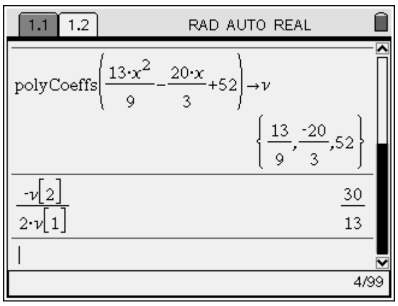


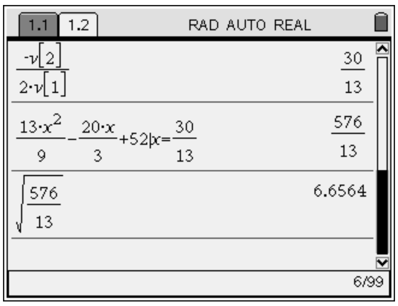
De afstand van *P* tot Q is minimaal als het kwadraat van de afstand minimaal is:

$$d(P,Q)^2=(6-x)^2+(8-y)^2 \quad (2)$$

substitutie van (1) in (2) levert een tweedegraadsfunctie $f(x)=ax^2+bx+c$ waarvan we de extreme waarde $f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$ bepalen.
Het rekenwerk verloopt snel en zonder fouten met computeralgebra:

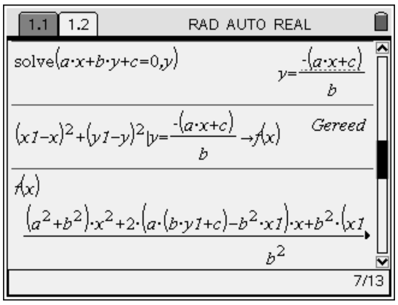


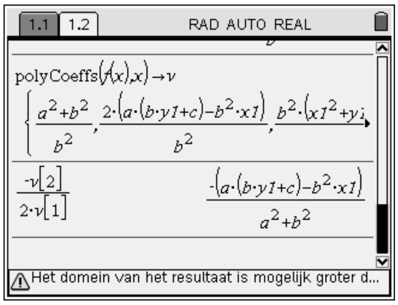


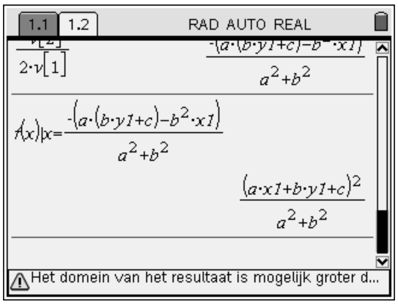


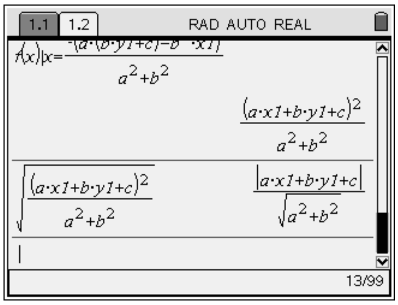
Dit levert de afstand $d(P,r)=\sqrt{\dfrac{576}{13}}\simeq 6.66$

Dezelfde werkwijze kunnen we nu volgen om algemeen de afstand te bepalen van een punt $P(x_1, y_1)$ tot een rechte $r \leftrightarrow ax + by + c = 0$









Hiermee hebben we de afstandsformule $d(P,r) = \dfrac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ bewezen (voor $b \neq 0$)

6.2 Eliminatie van parameters

Uitgaande van de parametervergelijkingen van een vlak illustreren we de eliminatiemethode om een cartesiaanse vergelijking te vinden.

Dankzij computeralgebra is het mogelijk om rechtstreeks parameters te elimineren, zonder gebruik van determinanten. Hierdoor kan men het onderwerp eliminatie vroeger behandelen, op een wijze die bovendien de betekenis van elimineren verduidelijkt.

Beschouw het vlak α met parametervergelijkingen

$$\begin{cases} x = 6 - 4r + s \\ y = 9 + 12r + 3s \quad \text{(met } r, s \in \mathbb{R}\text{)} \quad (1) \\ z = 1 + 5r + 5s \end{cases}$$

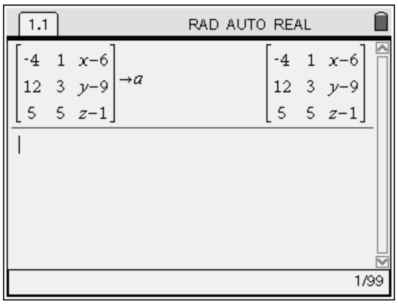
Kiezen we bijvoorbeeld $r = 1$ en $s = 0$ dan vinden we een punt $(x, y, z) = (2, 21, 6)$ van het vlak.

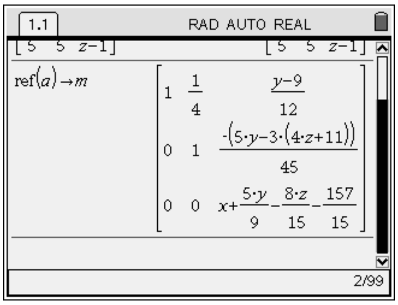
Omgekeerd zal een gegeven punt (x, y, z) op het vlak gelegen zijn als het stelsel (1) een oplossing heeft voor r en s.

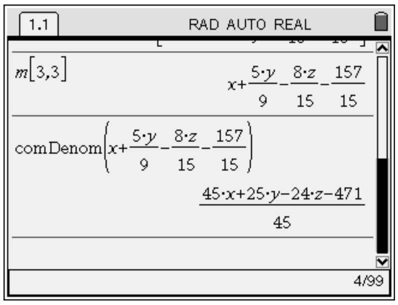
Om dit na te gaan herschrijven we (1) als

$$\begin{cases} -4r+s=x-6 \\ 12r+3s=y-9 \\ 5r+5s=z-1 \end{cases} \quad (2)$$

De computeralgebra van TI-Nspire herleidt de uitgebreide matrix van het stelsel met elementaire rijoperaties correct tot een echelonmatrix:







De echelonmatrix laat duidelijk zien dat het stelsel (2) een oplossing heeft voor r en s als en slechts als de coördinaten (x,y,z) voldoen aan $x+\frac{5y}{9}-\frac{8z}{15}-\frac{157}{15}=0$ of $45x+25y-24z-471=0$, dit is de cartesiaanse vergelijking van het vlak α.

We hebben de parameters r en s *geëlimineerd*.

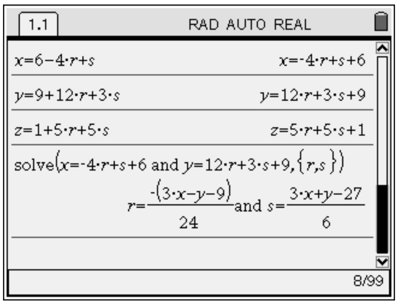
Het concept eliminatie komt duidelijk tot uiting: een voorwaarde opstellen waaraan de coördinaten (x,y,z) van een willekeurig punt moeten voldoen opdat het stelsel (2) een oplossing zou hebben voor r en s.

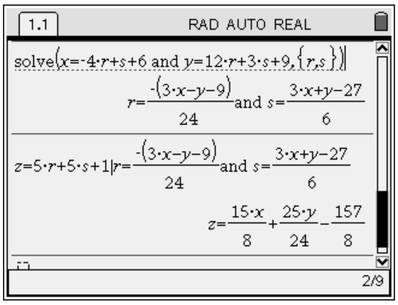
Deze eliminatie kan ook op een rechtstreekse en voor de leerling conceptueel eenvoudige wijze gebeuren zonder het gebruik van matrices en elementaire rijoperaties.

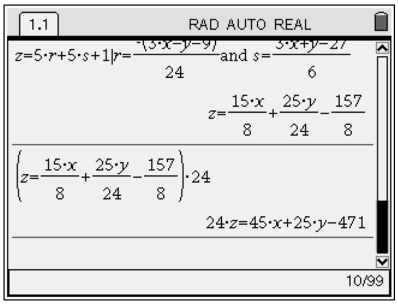
Hiertoe volstaan de opdrachten "solve" en "|" (substitueer) van TI-Nspire.
Substitutie en oplossen naar een letter zijn algebraïsche basistechnieken, die manueel echter snel leiden tot veel rekenwerk en het maken van fouten.

We beginnen met het ingeven van de drie vergelijkingen van het stelsel (1). We gebruiken de eerste twee vergelijkingen om ze op te lossen naar *r* en *s*. Je kunt een stelsel invoeren in de solve-instructie door de vergelijkingen te verbinden met "and". De vergelijkingen kun je eenvoudig kopiëren in de solve-instructie door ze eerst met de pijltjestoetsen te selecteren en vervolgens enter te drukken.
De variabelen *r* en *s* die we willen berekenen uit dat stelsel plaatsen we tussen accolades.

Vervolgens substitueren we deze uitdrukkingen in de derde vergelijking. Ook hier moeten we bijna niets intikken, maar kopiëren we de berekende uitdrukkingen.







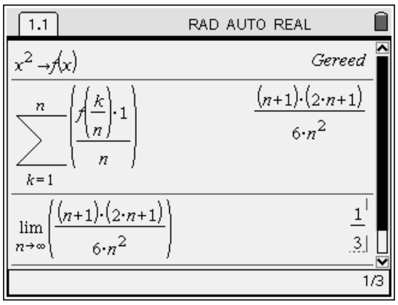
We vinden opnieuw de vergelijking $45x+25y-24z-471=0$ voor het vlak α.

6.3 Een bepaalde integraal als limiet van een Riemann-som

Als eerste voorbeeld berekenen we $\int_0^1 f(x)\,dx$ met $f(x) = x^2$.

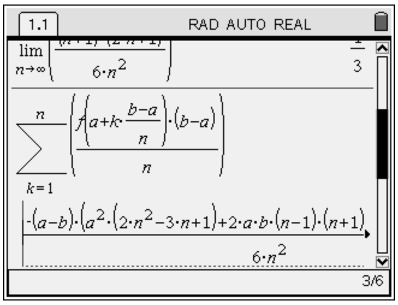
Hiertoe verdelen we het interval $[0,1]$ in n deelintervallen met lengte $\frac{1}{n}$.

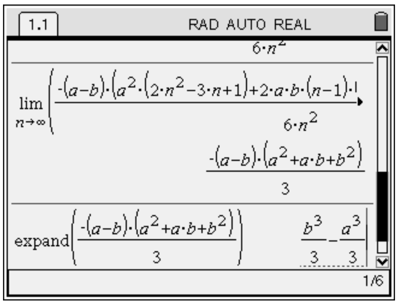
Als Riemann-som kiezen we $\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}$, waarbij de functiewaarde telkens op het einde van elk deelinterval wordt bepaald. De limietovergang voor $n \to \infty$ levert vervolgens de bepaalde integraal:

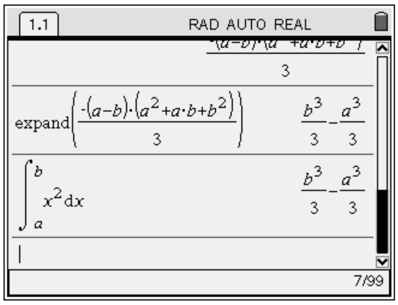


Vervolgens bepalen we $\int_a^b f(x)\,dx$ met $f(x) = x^2$.

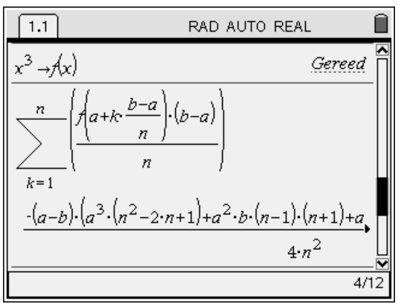
De Riemann-som wordt nu $\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\cdot\frac{b-a}{n}\right)\cdot\frac{b-a}{n}$

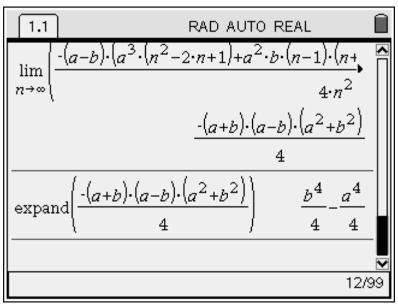






Tenslotte zoeken we $\int_a^b f(x)\,dx$ met $f(x) = x^3$.





Veralgemeen het resultaat.

7. Besluit: de didactische meerwaarde van TI-Nspire CAS

TI-Nspire CAS is een groepering van werkbladen, notities, statistiek, computeralgebra, grafieken en dynamische meetkunde. Nu is het mogelijk om al het goede van deze pakketten te combineren.

Zo kan een probleem eerst concreet grafisch of numeriek worden verkend. Dit kan gebeuren aan de hand van instructies die meegegeven worden in notities. In notities bestaat verder de mogelijkheid om vragen op te stellen waarvan het antwoord verborgen wordt. Ook redeneringen kunnen worden opgebouwd en weergegeven.
Na de verkenning van het probleem kan men de exacte of benaderende oplossing bepalen volgens de klassieke wegen van de wiskunde en de inzet van het computeralgebrasysteem (of CAS).

Bij contextuele vraagstukken kunnen eenheden worden ingevoerd.

TI-Nspire bezit ook een dynamisch aspect voor wat statistiek betreft. Dit is in andere statistische pakketten zoals SPSS en Minitab niet voorhanden. Hierbij is het mogelijk om individuele waarnemingen te selecteren en te verslepen. Op die manier kan men invloeden bestuderen op de verschillende statistische kengetallen. In een handomdraai kan zo geïllustreerd worden dat het rekenkundig gemiddelde en de standaardafwijking gevoelig zijn voor zeer kleine of zeer grote waarden. Door gewoon de minimale of de maximale waarde te verslepen, kan men onmiddellijk waarnemen hoe de waarden van het rekenkundig gemiddelde en de standaardafwijking worden beïnvloed terwijl de mediaan en de interkwartielafstand onveranderd blijven.
Ook de invloed van data op een regressiekromme kan zo dynamisch worden getoond.

Een andere meerwaarde is dat er een softwareversie en een handheldversie bestaan die met elkaar compatibel zijn. Dit betekent dat een document gemaakt met de handheld kan worden overgezet naar de computer met de softwareversie en daar verder kan worden bewerkt. Ook omgekeerd is dit mogelijk.

Voor grafische oplossingen van problemen is het voor de leerkracht interessanter die eerst uit te voeren op de computer omdat het scherm groter is en handiger om bepaalde elementen te selecteren met de muis. Wanneer de toepassing met de software gemaakt is, kan het document zonder problemen overgezet worden naar de handheld van de leerlingen.

7. Besluit: de didactische meerwaarde van TI-Nspire CAS

TI-Nspire CAS is een groepering van werkbladen, notities, statistiek, computeralgebra, grafieken en dynamische meetkunde. Nu is het mogelijk om al het goede van deze pakketten te combineren.

Zo kan een probleem eerst concreet grafisch of numeriek worden verkend. Dit kan gebeuren aan de hand van instructies die meegegeven worden in notities. In notities bestaat verder de mogelijkheid om vragen op te stellen waarvan het antwoord verborgen wordt. Ook redeneringen kunnen worden opgebouwd en weergegeven.
Na de verkenning van het probleem kan men de exacte of benaderende oplossing bepalen volgens de klassieke wegen van de wiskunde en de inzet van het computeralgebrasysteem (of CAS).

Bij contextuele vraagstukken kunnen eenheden worden ingevoerd.

TI-Nspire bezit ook een dynamisch aspect voor wat statistiek betreft. Dit is in andere statistische pakketten zoals SPSS en Minitab niet voorhanden. Hierbij is het mogelijk om individuele waarnemingen te selecteren en te verslepen. Op die manier kan men invloeden bestuderen op de verschillende statistische kengetallen. In een handomdraai kan zo geïllustreerd worden dat het rekenkundig gemiddelde en de standaardafwijking gevoelig zijn voor zeer kleine of zeer grote waarden. Door gewoon de minimale of de maximale waarde te verslepen, kan men onmiddellijk waarnemen hoe de waarden van het rekenkundig gemiddelde en de standaardafwijking worden beïnvloed terwijl de mediaan en de interkwartielafstand onveranderd blijven.
Ook de invloed van data op een regressiekromme kan zo dynamisch worden getoond.

Een andere meerwaarde is dat er een softwareversie en een handheldversie bestaan die met elkaar compatibel zijn. Dit betekent dat een document gemaakt met de handheld kan worden overgezet naar de computer met de softwareversie en daar verder kan worden bewerkt. Ook omgekeerd is dit mogelijk.

Voor grafische oplossingen van problemen is het voor de leerkracht interessanter die eerst uit te voeren op de computer omdat het scherm groter is en handiger om bepaalde elementen te selecteren met de muis. Wanneer de toepassing met de software gemaakt is, kan het document zonder problemen overgezet worden naar de handheld van de leerlingen.

Grafische rekentoestellen zijn nu in de wiskundelessen goed ingeburgerd als leermiddel ter ondersteuning van numerieke en grafische representaties van problemen. Daarnaast worden ICT hulpmiddelen als dynamische meetkunde, computeralgebra en statistische software ingezet onder diverse vormen.

Rekening houdend met de evoluties in ICT en de gebruikservaring in de wiskundeles werd intussen gewerkt aan een nieuwe versie van de grafische/symbolische rekentoestellen.
Dit cahier is een kennismaking via eenvoudige voorbeelden met een veelbelovende nieuwe technologie voor de wiskundeles, namelijk de TI-Nspire™ CAS handheld.

De computerversie en de handheld versie zijn identiek, zodat de computer en vlot inzetbare "handheld" volledig door elkaar gebruikt kunnen worden. Tussen beide versies kun je bestanden uitwisselen. De van de computer bekende werkorganisatie met "mappen" en "bestanden" wordt ook in de "hand-held" toestellen aangewend.

Een andere wijziging is de integratie van verschillende werkgebieden. TI-Nspire™ CAS omvat vijf modules:
• computeralgebra,
• grafieken en dynamische meetkunde,
• lijsten en spreadsheets,
• data en statistiek,
• nota's.

In vergelijking met de ondertussen gebruikelijke grafische rekenmachine biedt deze handheld dus de extra mogelijkheden van symbolisch rekenen en is dynamische meetkunde direct beschikbaar bij bijvoorbeeld grafieken van functies. De vijf modules werken op een vlotte manier nauw met elkaar samen. De inzet van deze modules in de wiskundeles wordt besproken vanuit didactisch standpunt.

Om een wiskundig probleem aan te pakken kun je deze verschillende modules in opeenvolgende pagina's in één bestand inzetten en laten samenwerken, waarbij variabelen in de ene pagina herkend worden in de andere pagina. Dit biedt verrassend nieuwe mogelijkheden om problemen in diverse representaties te analyseren. Zo kan je bijvoorbeeld wisselen tussen symbolische en grafische of numerieke oplossingen. Aan de hand van voorbeelden (bv. ICT-opgaven uit handboeken van het secundair onderwijs) laten we zien dat deze supplementaire mogelijkheden een meerwaarde kunnen bieden voor wiskundelessen.

Uiteraard moet de leerling zelf leren beslissen welke vragen aan het systeem worden voorgelegd en hoe de antwoorden verder gebruikt worden. Tijdens de T3-nascholingen met dit cahier zullen dan ook de mogelijkheden en moeilijkheden van ICT-gebruik in de wiskundeles aan bod komen.

Maart 2008