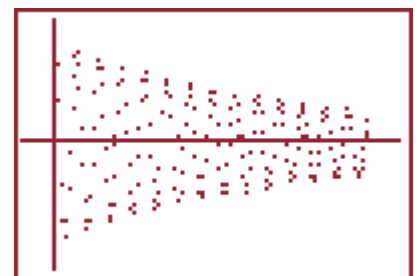
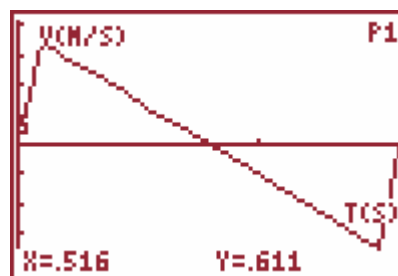


Modelleren

vanuit experimenteel verkregen data

Dominiek Ramboer



Modelleren vanuit experimenteel verkregen data

Dominiek Ramboer



T³ EUROPE

Inleiding

In de nieuwste opvattingen van de pedagogie wordt steeds meer de klemtoon gelegd op het sociaal-constructivisme. Drie doelstellingen komen daarbij uitgesproken op de voorgrond:

- de leerling betrekken en confronteren met hun leerproces;
- de leerling sociale vaardigheden bijbrengen;
- vertrekken vanuit realistische en levensechte situaties.

Vandaar het idee om een tweetal projecten uit te werken waarmee aan die drie doelstellingen in meer of mindere mate kan worden tegemoet gekomen.

Een tweede reden voor het schrijven van deze cahier is een manier te illustreren om vakoverschrijdend bezig te zijn. De twee uitgewerkte projecten kunnen een aanleiding zijn om met andere vakken, zoals fysica in deze voorbeelden, samen te werken.

Het eerste project handelt over botsingen. Daarbij komen begrippen als valbeweging, verticale worp en demping uit de fysica aan bod. Het tweede project behandelt trillingen. De wet van Hooke, het massa-veersysteem, de slingerbeweging en gedempte trillingen zijn hier de begrippen die verband houden met het vak fysica.

De projecten vertrekken van een praktische proef die moet uitgevoerd worden. Het materiaal dat nodig is om de proef uit te voeren wordt vooraf beschreven. Na het uitvoeren van het experiment beschikken de leerlingen over concrete meetresultaten. Aan de hand van deze data wordt naar een model, een functioneel verband gezocht passend bij het experiment.

Het is de bedoeling dat leerlingen in groepjes van 3 tot 4 personen samenwerken en de gegeven opdrachten uitvoeren en de vragen beantwoorden. Daarna maken de leerlingen over het geheel een verslag waarin de meetresultaten, de grafieken, en de conclusies verwerkt worden.

Niettegenstaande heel wat begrippen uit de fysica besproken worden, ligt de klemtoon toch nog op het wiskundig aspect van de zaak.

Een eerste bijlage behandelt op een beknopte manier de werking van de CBR en CBL samen met de grafische rekenmachine. Een tweede bijlage gaat specifiek over evaluatie. Er wordt hierin een suggestie geformuleerd op welke manier een projecten als deze kunnen geëvalueerd worden. De antwoorden op een selectie van vragen en opdrachten zijn opgenomen in een andere bijlage. Tenslotte wordt in de laatste bijlage nog een voorstel gedaan om andere functionele verbanden

op deze manier aan te brengen. Hierbij is rekening gehouden met de basisuitrusting die voorhanden is bij aankoop van een CBR en CBL.

Op de website van T³ Vlaanderen, www.t3vlaanderen.be, zullen ook een aantal bestandjes staan met lijsten van meetresultaten waarbij de grafieken van die gegevens de gewenste grafieken benaderen.

Indien er opmerkingen, suggesties of vragen zijn, kunnen die altijd gemaild worden naar ramboerd.d@edpnet.be, waarvoor dank bij voorbaat.

Veel plezier

Inhoud

Project 1: De botsende bal.....	5
Benodigdheden:.....	5
Instructies:.....	5
DEEL 1 De parabolische baan	8
DEEL 2 Energie	12
DEEL 3 Snelheid.....	14
DEEL 4 Exponentieel verband.....	20
Project 2: Trillingen	27
Benodigdheden.....	27
DEEL 1 De veerkracht	27
DEEL 2 Massa-veersysteem	33
DEEL 3 Gedempte harmonische trilling.....	42
DEEL 4 De wiskundige slinger.....	47
Bijlage 1: Het werken met de CBR en de CBL.....	49
1 De CBR (Calculator-Based Ranger)	49
2 De CBL (Calculator-Based Laboratory)	52
Bijlage 2: Evaluatie van het project	54
Evaluatie bij de uitvoering van het project.....	54
Bijlage 3: De antwoorden of grafische voorstellingen.....	60
Botsingen.....	60
Trillingen.....	61
Bijlage 4: Voorstellen om vanuit concrete meetresultaten van fysische proeven tot wiskundige modellen te komen.....	64

Botsende ba



Project 1: De botsende bal

Benodigheden:

- Een CBR-toestel
- Een grafische rekenmachine type TI83 plus of TI84 plus
- Een bal

Instructies:

- Verbind de CBR met het rekentoestel. Zorg ervoor dat de kabel goed verbonden is.

```
APPS 100%
1: Finance...
2: CBL/ CBR
3: Cabri Jr
4: CalcSheet
5: Conics
6: CtlgHelp
7↓ DataMate
```

- Druk APPS en selecteer 2:CBL/CBR.
- Druk een willekeurige toets om het introductiescherm te verlaten en selecteer 3:Ranger

```
CBL/ CBR APP:
1: GAUGE
2: DATA LOGGER
3: RANGER
4: QUIT
```

- Druk op ENTER om het beginscherm te passeren.
- Selecteer daarna 3:applications.

```
MAIN MENU
1: SETUP/SAMPLE
2: SET DEFAULTS
3: APPLICATIONS
4: PLOT MENU
5: TOOLS
6: QUIT
```

- Stel de eenheid in op meter en druk ENTER.

```

UNUSE
0:METERS
2:FEET

```

- Selecteer 3:Ball Bounce. Volg de instructies op die gegeven worden door het programma.

```

3:BALL BOUNCE
1:DIST MATCH
2:VEL MATCH
3:BALL BOUNCE
4:MAIN MENU

```

IF DESIRED,
DETACH CBR

HOLD BALL \geq
0.5 METER
UNDER CBR

[ENTER]

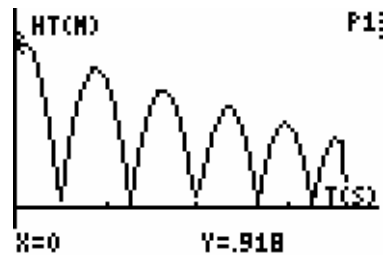
PRESS [TRIGGER] :
ON CBR TO START

REPEAT IF
DESIRED, THEN
REATTACH CBR AND
PRESS [ENTER]

- Na het uitvoeren kun je de CBR weer aansluiten aan het rekentoestel. De meetresultaten worden dan naar de rekenmachine overgebracht.

TRANSFERRING...

- Na overbrengen van de gegevens wordt onmiddellijk de grafiek getekend.



Eenmaal tevreden over de verkregen grafiek, kun je verder gaan met deel 1.

DEEL 1 De parabolische baan

Het is de bedoeling één op- en neergaande beweging van de bal uit de gegevens te selecteren. Zo'n elementaire beweging is een samenstelling van een verticale worp en een valbeweging. We weten uit de fysica dat deze bewegingen beschreven kunnen worden door een tweedegraadsfunctie in de tijd. Ook de samenstelling van deze twee bewegingen kan dus door een tweedegraadsfunctie in de tijd beschreven worden. We krijgen dus als afstand-tijdgrafiek een parabool.

Werkwijze:

- 1 Probeer aan de hand van de tracemogelijkheid één parabool te doorlopen van links naar rechts. We starten bij het laagste punt en we noemen dit x_{\min} . We noteren de coördinaten in onderstaande tabel.
We schuiven naar rechts tot de top van de beweging bereikt is en noteren de coördinaten in dezelfde tabel.
Wanneer dit gebeurd is, bewegen we de cursor verder naar rechts en komen uiteindelijk een laagste punt tegen. Ook van dit punt noteren we de coördinaten (x_{\max})

	t	y
x_{\min}		
Top		
x_{\max}		

- 2 Verlaat het programma Ranger nu.

```

RANGER MENU
1: DIST-TIME
2: VEL-TIME
3: ACCEL-TIME
4: PLOT TOOLS
5: REPEAT SAMPLE
6: MAIN MENU
QUIT

```

De verschillende meetresultaten worden opgespaard in 4 lijsten: L1 = tijd, L2 = afstand, L3 = snelheid en L4 = versnelling.

Het is hier interessant om van deze lijsten een reserve te maken zodat we altijd de originele gegevens nog ter beschikking hebben. We kiezen hiervoor passende namen zoals T, D, V en AC.

```

L1→LT          L4→LAC
{0 .043008 .086...  {2.89455 -1.558...
L2→LD          █
{.917679 .92303...
L3→LV
{.062244 .09097...
█
  
```

- 3 Druk WINDOW en vul de t-waarden uit bovenstaande tabel in voor x_{\min} en x_{\max} . Druk daarna op GRAPH om de grafiek te zien. Het kan gebeuren dat je eerst op ZOOM moet drukken en daarin 9:ZoomStat moet selecteren.

```

WINDOW
Xmin=█516096
Xmax=1.290182
Xscl=2
Ymin=-.15733568
Ymax=1.08283968
Yscl=1
Xres=1
  
```



Opdrachten:

- 1 Voor een parabool zijn twee vormen van vergelijkingen gebruikelijk:

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$y = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

Welke is te verkiezen in deze oefening?

Wat is de betekenis van de parameters a , α , β ?

- a : _____

- α : _____

- β : _____

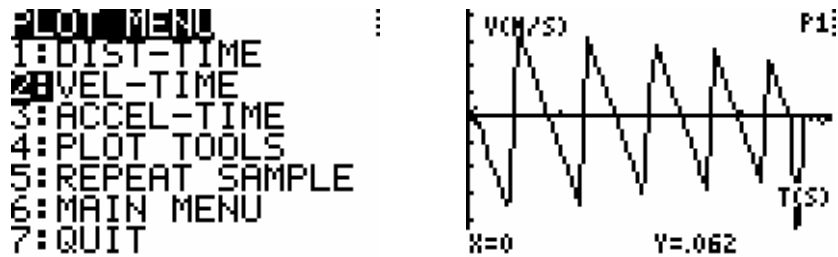
Spaar de x-coördinaat van de top in de variabele H en de y-coördinaat in de variabele K op. Geef aan de variabele A de waarde -1 . Waarom juist negatief en niet positief?

- 2 Voer de volgende vergelijking $A(x-H)^2 + K$ in als Y1. Druk op GRAPH. Vergelijk de vorm van de oorspronkelijke parabool met de nieuwe. De waarde van A zal waarschijnlijk moeten worden aangepast. Druk 2nd MODE (Quit) en spaar een andere waarde op in A en probeer opnieuw. Herhaal deze procedure totdat de parabolen elkaar nauwkeurig genoeg volgen. Neem aanvankelijk een toename van -1 naar het einde toe neem je liefst een kleinere waarde.

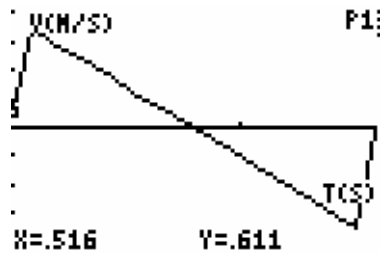
De waarde van A is dan _____

3 De vergelijking van de parabool wordt dan gegeven door:

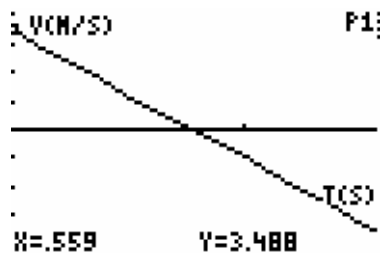
4 Activeer opnieuw het programma Ranger en selecteer nu het snelheid-tijddiagram.



5 Verlaat het programma Ranger. Activeer de windowinstellingen en vul de t-waarden van x_{min} en x_{max} in. Druk GRAPH.



Zoals je in bovenstaande figuur kunt zien, kan het handig zijn om de minimale en



maximale waarde van x van het venster aan te passen om die vervelende verbindinglijn kwijt te zijn.

6 Welke grafiek krijgen we dan? Kun je dit verklaren.

7 Druk TRACE. Bepaal de coördinaten van twee punten die op de snelheidsgrafiek gelegen zijn.

Bepaal de richtingscoëfficiënt m en het snijpunt van de grafiek met de y-as (q)

De vergelijking van de grafiek is dan: _____

	x	y
punt1		
punt2		

8 Voer de bekomen vergelijking in onder de functievariabele Y2 en vergelijk de grafiek met het snelheidsdiagram. Wat vind je van de benadering?

9 Herhaal de ganse procedure voor een tweede parabool.

	t	y
X _{min}		
Top		
X _{max}		

De waarden zijn:

A: _____

H: _____

K: _____

De vergelijking van de parabool wordt dan $y =$ _____

Vergelijk de berekende parabool met de gegeven parabool. Wat zijn de bevindingen?

	x	y
punt1		
punt2		

De waarden zijn:

m: _____

q: _____

De vergelijking van de snelheidsgrafiek wordt $y =$ _____

Vergelijk de berekende grafiek met de reeds verkregen snelheidsgrafiek. Wat zijn de bevindingen? _____

Conclusies

1

Vergelijken	afstandsgrafiek	snelheidsgrafiek
eerste botsing		
tweede botsing		

2 Wat beïnvloedt de verandering in de snelheid van de bal?

3 Welk verband bestaat er tussen de helling van de snelheidsgrafiek en de coëfficiënt van de kwadratische term van de vergelijking van de afstandsgrafiek?

4 Welke kracht wordt geassocieerd met dit getal?

DEEL 2 Energie

De totale energie van een systeem is de som van de kinetische energie (energie door beweging) en de potentiële energie (energie door de plaats).

Een botsing wordt elastisch genoemd als er geen verlies is aan totale energie. De wrijving wordt hier niet in rekening genomen. Indien er geen behoud van energie is, spreekt men van inelastische botsingen.

Vragen

1 Wanneer heeft de bal de grootste potentiële energie? Wat is de kinetische energie op die plaats?

2 E_p is maximaal: _____

3 E_k op die plaats is _____

4 Wanneer heeft de bal de grootste kinetische energie? Wat is de potentiële energie op die plaats?

E_k is maximaal: _____

E_p op die plaats is _____

5 Blijft de totale energie constant over de gehele beweging?

6 De formules voor kinetische en potentiële energie zijn:

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 \qquad E_p = mgh$$

waarbij m: de massa van het voorwerp

v: de snelheid van het voorwerp

g: de zwaartekrachtversnelling

h: de hoogte t.o.v. een referentievlak, hier het terugkaatsingsoppervlak (de grond)

7 Bepaal de hoogtes van een vijftal terugkaatsingen.

	h	E_p	$\frac{E_{p,i}}{E_{p,i-1}}$
1			
2			
3			
4			
5			

Valt er iets op in de laatste kolom?

8 Bepaal de tijdsintervallen van een vijftal terugkaatsingen.

	t_{\min}	t_{\max}	$\Delta t = t_{\max} - t_{\min}$
1			
2			
3			
4			
5			

Valt er een bepaalde regelmaat te bespeuren?

9 Bereken voor de reeds gevonden hoogtes de verhouding tussen de hoogtes.

	h	$\frac{h_i}{h_{i-1}}$
1		
2		
3		
4		
5		

Bereken ook de gemiddelde verhouding van de hoogtes. Deze is _____ .
De hoogtes vormen dus een rij. Welk soort rij is het?

Bepaal de totaal afgelegde weg van de bal vanaf het moment dat hij losgelaten wordt totdat hij tot stilstand gekomen is.

DEEL 3 Snelheid

- 1 Selecteer één botsing om verder te analyseren. Dit gebeurt als volgt
 - Ga terug naar het PLOT MENU door ENTER in te drukken.
 - Selecteer 4:Tools
 - Onder PLOT TOOLS selecteer je 1:SELECT DOMAIN.

```
MAIN MENU          :      PLOT MENU          :
1: SETUP/SAMPLE    :      1: DIST-TIME          :
2: SET DEFAULTS    :      2: VEL-TIME           :
3: APPLICATIONS    :      3: ACCEL-TIME        :
4: PLOT MENU       :      4: PLOT TOOLS         :
5: TOOLS           :      5: REPEAT SAMPLE     :
6: QUIT            :      6: MAIN MENU        :
                   :      7: QUIT             :

PLOT TOOLS        :
1: SELECT DOMAIN   :
2: SMOOTH DATA    :
3: PLOT MENU       :
```

- Geef de linkergrens van de gewenste botsing aan door met de pijltjestoetsen te navigeren. Druk op ENTER om de grens vast te leggen. (Als linkergrens kiezen we de x-waarde met de kleinste y-waarde.
- Herhaal de handeling om de rechtergrens aan te geven.
- Na het selecteren van de grenzen wordt een nieuwe grafiek getekend: de grafiek binnen het geselecteerde gebied.

Er is wel een nadeel aan deze methode verbonden. De meetresultaten die niet nodig zijn om het geselecteerde gebied te bestuderen zijn verloren. Het is daarom verstandig om er voor te zorgen dat alle meetresultaten eerst in andere lijsten opgespaard worden (zie deel 1).

- 2 Druk op ENTER om naar het PLOT MENU terug te keren en selecteer 7:QUIT om het programma Ranger te verlaten. Druk daarna op GRAPH om de grafiek terug op het scherm te krijgen.
- 3 Bepaal de best passende kwadratische kromme bij de geselecteerde meetresultaten.
 - Druk STAT en kies CALC en selecteer 5:QuadReg.

```
EDIT [STAT] TESTS
1: 1-Var Stats
2: 2-Var Stats
3: Med-Med
4: LinReg(ax+b)
5: QuadReg
6: CubicReg
7: QuartReg
```

– Vul aan met de namen van de lijsten met de meetresultaten. Hier: L1 (tijd) en L2 (afstand). Plaats na de tweede lijst de functievareabele Y1. Om de functievareabele Y1 te selecteren druk eerst op VARS en kies Y-VARS en selecteer achtereenvolgens 1:Fucntion en 1:Y1. Zorg ervoor dat de drie aanvullingen gescheiden worden door komma's. Druk nu op ENTER. De best passende kromme wordt nu berekend en onmiddellijk opgeslagen in de functievareabele Y1.

```

VARS Y-VARS
1:Function...
2:Parametric...
3:Polar...
4:On/Off...

```

```

FUNCTION
1:Y1
2:Y2
3:Y3
4:Y4
5:Y5
6:Y6
7↓Y7

```

- 4 Laat dan de grafiek van de berekende functie tekenen bij de reeds bekomen grafiek van de meetresultaten. Druk op GRAPH. Valt de benadering door de berekende functie mee? Hoe goed is die benadering?

In de statistiek (theorie van de regressie) wordt de nauwkeurigheid van de benadering door een getal aangeduid: de determinatiecoëfficiënt. Deze kunnen we door de rekenmachine laten berekenen door een instelling te veranderen.

– Kies CATALOG (2nd 0) en druk D (x^{-1} de alpha toets moet niet meer ingedrukt worden want die door de machine automatisch al geactiveerd) in. Ga naar onder in de lijst totdat DiagnosticOn verschijnt. Selecteer deze functie door ze aan te wijzen en ENTER in te drukken. Hierdoor worden een aantal controlemiddelen ingeschakeld en weergegeven bij de berekening van regressielijnen.

Indien we nu opnieuw de kwadratische regressie toepassen op de meetresultaten dan verschijnt er een getal R^2 (de determinatiecoëfficiënt). Hoe dichters dit bij 1 ligt, hoe beter de benadering is.

```

QuadReg
y=ax2+bx+c
a=-5.007195508
b=9.022062146
c=-3.272399191
R2=.9999672085

```

- 5 Druk APPS en selecteer 2:CBL/CBR. Druk op ENTER en selecteer 3:Ranger. Druk nogmaals op ENTER en selecteer 4:PLOT MENU en 2:VEL-TIME. Deze grafiek lijkt behoorlijk lineair, eventueel op de uiteinden na.

```

PLOT MENU
1:DIST-TIME
2:VEL-TIME
3:ACCEL-TIME
4:PLOT TOOLS
5:REPEAT SAMPLE
6:MAIN MENU
7:QUIT

```

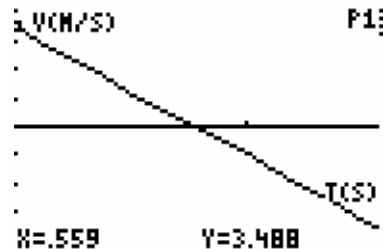


Druk op ENTER om naar de PLOT MENU terug te keren.

– Selecteer dan 4:PLOT TOOLS en daaronder 1:SELECT DOMAIN.

– Navigeer met de pijltjestoetsen om de linker- en de rechtergrens aan te geven. Vergeet niet telkens te bevestigen door ENTER in te drukken.

– Na de rechtergrens bevestigd te hebben, wordt automatisch de nieuwe grafiek getekend.



6 Druk ENTER om naar het PLOT MENU terug te keren en selecteer 7:QUIT om het programma Ranger te verlaten. Druk GRAPH. Zo krijgen we opnieuw de snelheidsgrafiek te zien.

7 Bepaal met behulp van de rekenmachine de best passende rechte doorheen de verschillende meetresultaten.

– Druk STAT en kies CALC en selecteer 4:LinReg(ax+b).

– Vul aan met de lijsten L1, L3 en de functievariabele Y2, gescheiden door komma's.

Indien DiagnosticOn geactiveerd is, verschijnen nu twee getallen als controle voor de benadering: r^2 de determinatiecoëfficiënt en de correlatiecoëfficiënt r . Deze laatste is een negatief getal zeer dicht bij -1 . Het minteken heeft alleen aan dat het hier gaat om een dalende rechte.

```
EDIT [MODE] TESTS
1:1-Var Stats
2:2-Var Stats
3:Med-Med
4:LinReg(ax+b)
5:QuadReg
6:CubicReg
7:QuartReg
```

```
LinReg
y=ax+b
a=-10.03603434
b=9.04225562
r2=.9998917806
r=-.9999458888
```

8 Laat de grafiek van de regressiekromme dan maar tekenen bij de grafiek bekomen door de meetresultaten. Druk daarvoor op GRAPH.


Opdrachten

- Maak de afstand-tijdgrafiek en de snelheid-tijdgrafiek in hetzelfde scherm.
 - Zorg ervoor dat alle actieve functies niet geselecteerd zijn door op het gelijkheidsteken te staan en op ENTER te drukken.

```

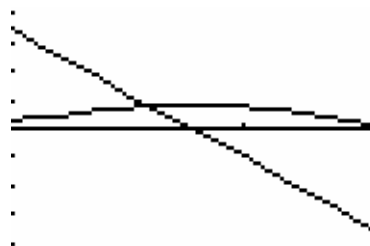
STAT PLOTS
1:Plot1...On
  ^ L1  L3  .
2:Plot2...Off
  ^ L1  L3  .
3:Plot3...Off
  ^ L1  L2  .
4:PlotsOff

Plot1 Plot2 Plot3
Off Off Off
Type: [Line] [Bar] [Dot]
      [OH] [OH] [OH]
Xlist:L1
Ylist:L2
Mark:  .  +  ■
  
```

- Druk dan 2nd Y= (STAT PLOT). Selecteer 2:Plot 2. Activeer ON en selecteer  als type. Voer L1 in als Xlist en L2 als Ylist. Kies dot als Mark.
- Controleer nog even of Plot1 geactiveerd is.
- Druk op ZOOM en selecteer 9:ZoomStat of druk GRAPH.

```

MEMORY
3:Zoom Out
4:ZDecimal
5:ZSquare
6:ZStandard
7:ZTrig
8:ZInteger
9:ZoomStat
  
```



- Gebruik TRACE om de tijd, de hoogte en de snelheid van de bal af te lezen. Om van de ene naar de andere grafiek over te gaan gebruik het pijltje naar boven.
 - Neem van een tiental punten verdeeld over het ganse domein de tijd, de hoogte en de snelheid op en noteer die in onderstaande tabel.

	tijd(s)	hoogte(m)	snelheid(m/s)
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			

- a) Beschrijf het verloop van de grootte van de snelheid van het ogenblik dat de bal de grond verlaat totdat hij zijn maximale hoogte bereikt.

- b) Beschrijf het verloop van de grootte van de snelheid van het ogenblik dat de bal zijn maximale hoogte heeft bereikt totdat hij terug op de grond is.

- c) Waar is de bal wanneer de grootte van zijn snelheid nul is?

- 3 Bepaal aan de hand van de vroeger bepaalde lineaire functie, het tijdstip waarop de grootte van de snelheid nul is.

- 4 Bepaal nu de hoogte van de bal (aan de hand van de berekende kwadratische functie) op het in (3) berekende tijdstip.

- 5 Vergelijk de berekende waarden uit (3) en (4) met de afgelezen waarden op de grafiek.

- 6 De algemene vergelijking voor de afgelegde weg van een eenparig veranderlijke beweging wordt gegeven door:

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

Het kwadratisch voorschrift dat de beweging van de bal modelleert is:

hieruit vinden we door gelijkstelling:

s_0 : _____

v_0 : _____

$1/2 a$: _____

a : _____

- 7 De algemene vergelijking voor de snelheid van een voorwerp dat een eenparig veranderlijke beweging uitvoert is:

$$v = v_0 + at$$

Het lineaire voorschrift dat de snelheid van de bewegende bal modelleert is:

na gelijkstelling vinden we:

v_0 : _____

a : _____

- 8 Wat valt er te zeggen als we de waarden van v_0 en a uit (6) en (7) met elkaar vergelijken?

DEEL 4 Exponentieel verband

- 1 Zet de oorspronkelijke gegevens opnieuw in de lijsten L1 en L2.

```

LT→L1
(0.000 .043 .08...
LD→L2
(.918 .923 .926...

```

- 2 Start het programma Ranger op vanuit de applicatie CBL/CBR. Selecteer 4:PLOT MENU en 1:DIST-TIME.

```

PLOT MENU
1: DIST-TIME
2: VEL-TIME
3: ACCEL-TIME
4: PLOT TOOLS
5: REPEAT SAMPLE
6: MAIN MENU
7: QUIT

```

- 3 Probeer door gebruik te maken van de pijltoetsen de coördinaten van de toppen van iedere terugkaatsing af te lezen en noteer de gevonden waarden in de volgende tabel (minimaal een vijftal waarden).

Terugkaatsing	t(s)	y(m)
1		
2		
3		
4		
5		

- 4 Verlaat het programma Ranger. Druk ENTER en selecteer 7:QUIT.
- 5 Voer nu de gegevens uit bovenstaande tabel in. We gebruiken daarvoor twee lijsten L5 en L6.
– Druk STAT en selecteer 1:Edit...

```

STAT CALC TESTS
1: Edit...
2: SortA(
3: SortD(
4: ClrList
5: SetUpEditor

```

Zijn de lijsten niet leeg, ga dan helemaal bovenaan bij de naam van de lijst staan en druk CLEAR. Zo wordt de lijst leeggemaakt.

In lijst L5 voeren we de tijd in en in lijst L6 de hoogte.

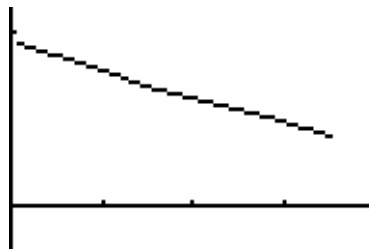
L5	L6	L7	?
.086	.926		
.903	.79		
1.634	.667		
2.322	.567		
2.967	.478		
3.526	.391		

L7(1)=			

- 6 Nu de gegevens in de lijsten staan kunnen we een grafiek maken van deze meetresultaten.
- Druk op 2nd Y= (STAT PLOT) en selecteer 2: Plot2.
 - Activeer de plot. Kies voor type
 - Vul L5 in als Xlist en L6 als Ylist
 - Kies dot als Mark.
 - Druk op GRAPH. Verschijnt de grafiek niet naar behoren druk ZOOM en selecteer 9:ZoomStat.

Opgelet: zorg ervoor dat alle andere grafieken op non-actief staan.

Zo krijgen we een grafiek waarin de maximale hoogtes van de bal worden uitgezet in functie van de tijd.



Opdrachten

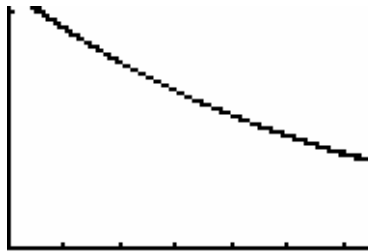
- 1 Probeer de best passende rechte om de grafiek te benaderen.
 - Druk STAT kies CALC en selecteer 4:LinReg(ax+b) en vul aan met L5, L6 en de functievariabele Y1, gescheiden door komma's.
 - Het voorschrift is: _____
- 2 Maak de grafiek van deze functie. Wat kun je zeggen over de benadering?

- 3 Probeer als best passende kromme een exponentiële functie.
 – Druk STAT kies CALC en selecteer 0:ExpReg aangevuld met L5, L6 en de functievariabele Y2, gescheiden door komma's.

```
ExpReg
y=a*b^x
a=1.110000279
b=.8429292025
r^2=.9985740077
r= -.9992867495
```

Het voorschrift is: _____

- 4 Maak een grafiek van deze functie. Zet de vorige functie op non-actief. Wat kun je zeggen over de benadering?



- 5 Druk WINDOW en verander de Xmax-waarde in 10 en de Ymin-waarde in -4. Druk GRAPH.
- 6 Gebruikmakend van ieder model maak je voorspellingen over de maximale terugkaatsingshoogte van de bal. Schrijf de voorspellingen in onderstaande tabel op.

tijd(s)	Terugkaatsingshoogtes(m)	
	Lineair	Exponentieel
5s		
6s		
7s		
8s		
9s		

Enkele bedenkingen:

Welk type van functie past het best bij deze gegevens?

Onderbouw je keuze. Waarom maak je die keuze? Zou je aanvankelijk ook tot die keuze gekomen zijn zonder de grafiek verder te tekenen?

Kan je dit met zekerheid ook besluiten uit de statistische berekeningen?

- 7 Vul de volgende tabel aan met de maximale hoogte bij de verschillende terugkaatsingen (minstens vijf).


N	hoogte(m)
1	
2	
3	
4	
5	

- 8 Plaats achtereenvolgens de waarde voor N in de lijst L5 en de waarden voor de hoogte in de lijst L6. Maak eerst de lijst L5 leeg door bovenaan bij de naam te staan en CLEAR in te drukken. In lijst L6 staan reeds de waarden van de hoogtes.

L5	L6	L7	?
1	.926		
2	.79		
3	.667		
4	.567		
5	.478		
6	.391		

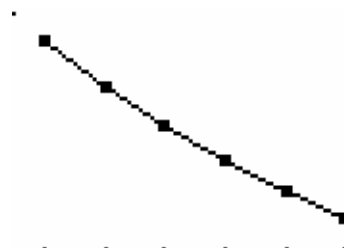
L7(1)=

Maak daarna een lijngrafiek van de waarden in lijst L5 en L6.

- Druk 2nd Y= (STAT PLOT) en selecteer 1:Plot1
- Activeer de plot
- Kies  als type
- Vul L5 als Xlist en L6 als Ylist in
- Kies het vierkantje als Mark.
- Druk ZOOM en selecteer 9:ZoomStat.

```

Plot1 Plot2 Plot3
Off Off
Type: [square] [circle] [triangle]
Xlist:L5
Ylist:L6
Mark: [square] +
    
```



Vragen

- 1 We hebben reeds gevonden dat we de opeenvolgende terugkaatsingen kunnen beschouwen als elementen van een meetkundige rij. Het expliciet voorschrift van een meetkundige rij wordt gegeven door:

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

met

a_n de n de term van de rij

a_1 de eerste term van de rij

q de reden.

Bepaal aan de hand van de waarden in de tabel de waarden voor a_1 en q .

a_1 : _____

q : _____

- 2 Schrijf met de hierboven gevonden waarden de n de term van de meetkundige rij op.
 $a_n =$ _____

Herformuleer dit voorschrift met x in plaats van met n .

$a_n =$ _____

Vul dit voorschrift in bij de functievariabele Y1 en druk ENTER.

- 3 Druk GRAPH. Beschrijf hoe goed of slecht de functie de meetresultaten volgt.

- 4 Wat is het voorschrift van de exponentiële functie, die als best passend wordt voorgesteld door de machine?
– Druk STAT kies CALC en selecteer 0:ExpReg
– Vul aan met L5, L6 en de functievariabele Y2 gescheiden door komma's. Hiermee wordt onmiddellijk het functievoorschrift opgespaard in de functievariabele Y2.

Het functievoorschrift is _____

- 5 Druk GRAPH. Vergelijk de grafiek van de best passende functie met de zojuist manueel gevonden functie in de functievariabele Y1. Desactiveer daarom eerst Plot1. Plaats de cursor op de naam en druk op ENTER.

Wat valt er te zeggen over het verloop van beide functies?

- 6 Herformuleer het voorschrift van de exponentiële functie zo dat de exponent $(x-1)$ is in plaats van x .

Dit wordt dan _____

Vereenvoudigd is dit _____

- 7 Voer dit voorschrift in bij de functievariabele Y3. Druk GRAPH.
Hoe valt Y3 mee t.o.v. Y1 en Y2?

- 8 Voorspel de hoogte voor de volgende terugkaatsing (de zesde).
– Keer terug naar het Home screen. Druk 2ND MODE (QUIT).
– Druk VARS kies Y-VARS en selecteer 1:Function en nogmaals 1:Y1
– Vul dan tussen haakjes met nummer van de terugkaatsing in en druk op ENTER.

Y1(6)
 .4048643351

- 9 Voorspel de hoogte voor de tiende terugkaatsing op een analoge manier.
- 10 Wat is de afstand afgelegd door de bal bij iedere terugkaatsing?
Wat is de totale afstand afgelegd door de bal gedurende de volledige beweging?

Vul deze tabel aan:

terugkaatsing	terugkaatsings- hoogte	totale afstand afgelegd bij die terugkaatsing	totale afstand afgelegd sedert t = 0s
1			
2			
3			
4			
5			

- 11 De formule voor de som van een meetkundige rij wordt gegeven door

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$

Bepaal aan de hand van de gegeven formule de totale afstand afgelegd over het vijftal terugkaatsingen zoals hierboven beschouwd. Let op voor het addertje.

Vergelijk dit resultaat met het resultaat bekomen in de eerste tabel.

12 Deze som kan ook door de rekenmachine berekend worden. Gebruik daarvoor het volgende commando $\text{sum}(\text{seq}(Y1,X,1,5,1))$.

–Druk 2nd STAT (LIST) MATH en selecteer 5:sum(

```

NAMES OPS MATH
1:min(
2:max(
3:mean(
4:median(
5:sum(
6:Prod(
7↓stdDev(
  
```

- Druk 2nd STAT (LIST) OPS en selecteer 5:seq(

```

NAMES OPS MATH
1:SortA(
2:SortD(
3:dim(
4:Fill(
5:seq(
6:cumSum(
7↓ΔList(
  
```

- Druk VARS Y-VARS en selecteer achtereenvolgens 1:Function en 1:Y1 en zet een komma.

– Vul aan met X,1,5,1).

```

sum(seq(Y1,X,1,5
,1)
3.417283048
Ans*2
6.834566097
Ans-L6(1)
5.908566097
■
  
```

13 Bepaal op een analoge manier de totale afstand afgelegd door de bal tijdens de eerste zes terugkaatsingen.

14 Zelfde vraag als bij (13) maar nu voor 10 terugkaatsingen.

De formule voor een oneindige som van een meetkundige rij wordt gegeven door:

$$S_{\infty} = \frac{a_1}{1-q}$$

Bepaal de totaal afgelegde weg van de bal totdat de bal stil komt te liggen.

Uitdaging: Probeer op een analoge manier te berekenen hoe lang het zal duren vooraleer de bal stil komt te liggen.

Trillingen



Project 2: Trillingen

Voorafgaande opmerking

Bij de proeven met massa-veer en de slinger is het handiger te werken met de combinatie CBL en CBR. Deze combinatie biedt het voordeel dat de nulpositie kan ingesteld worden zodat de meting voor de leerlingen een gemakkelijker te herkennen grafiek oplevert. Indien de leerlingen meer vertrouwd zijn met de verschillende transformaties op functies en de gevolgen van die transformaties op de grafiek van de functies, kan ook gewerkt worden met de CBR alleen. Het interpreteren van de grafische voorstelling wordt dan iets lastiger.

Benodigheden

- een statief
- een veer
- een schaalpje
- een massa
- een CDROM
- een jojo of nog beter een bal aan een touw vastgemaakt
- een voldoende hoeveelheid sluitringetjes (rondelletjes) of andere voorwerpen met dezelfde massa (minstens een vijftigtal)
- een grafische rekenmachine van het type TI83 plus of TI84 plus
- een CBL of CBL2
- een CBR

DEEL 1 De veerkracht

Beschrijving van het experiment

- 1 Plaats het statief op de rand van de tafel. Verzwaar de voet eventueel door het aanbrengen van een supplementaire massa.
- 2 Bevestig de veer met schaalpje aan het statief zodat het schaalpje voorbij de rand van de tafel hangt.
- 3 Positioneer de CBR op de grond onder de schaal. Zorg ervoor dat er niets op de CBR valt. Dit kan echter het toestel beschadigen. Hou ook rekening met de voorwaarden waaraan moet voldaan worden opdat de CBR een voorwerp kan detecteren.
 - De minimum afstand CBR-voorwerp moet ongeveer een halve meter zijn.
 - De detectiezone van de CBR is kegelvormig.
- 4 Verbind de CBR met de CBL met de daarvoor voorziene kabel. Let op de CBL heeft een speciale ingang voor de CBR. Deze bevindt zich aan de rechterkant van het toestel en is aangeduid met de benaming DIG/SONIC. Verbind vervolgens de CBL met de grafische rekenmachine.

- 5 Start het programma DATAMATE op dat zich onder de applicaties bevindt.

```
APPLICATIONS
1: Finance...
2: CBL/CBR
3: Cabri Jr
4: CelSheet
5: Conics
6: CtlgHelp
DataMate
```

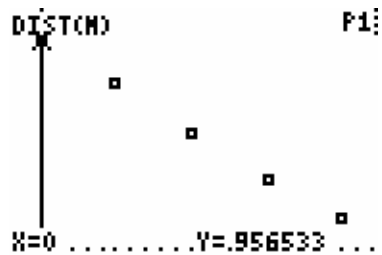
Bij het opstarten detecteert de CBL automatisch welke sensoren er aangesloten zijn op het toestel. Na enige tijd wordt er aangegeven dat de motionsensor is aangesloten op het kanaal Dig. Je hoort nu ook met regelmatige tussenpozen een getik. Dit geeft aan dat de CBR verbonden is en reeds waarnemingen aan het doen is.

- 6 We passen eerst de instellingen aan:
- Druk op 1 (1:SETUP)
 - Druk eenmaal op pijltje naar boven en daarna op ENTER.
 - Druk op 3 (3:EVENTS WITH ENTRY)

Je kunt nu controleren of de Mode wel degelijk juist is ingesteld. Controleer het scherm van de CBL.

- 7 Druk 2 (2:Start) om het meten te starten
- 1) De eerste meetwaarde wordt weergegeven: afstand van het schaalpje zonder sluitringetjes.
 - 2) Druk op ENTER .
 - 3) Voer het aantal sluitringetjes in. Hier 0.
 - 4) Druk op ENTER.
 - 5) Leg 5 sluitringetjes in het schaalpje.
 - 6) De nieuwe meetwaarde wordt weergegeven.
 - 7) Druk op ENTER.
 - 8) Voer het aantal sluitringetjes in. Nu wordt dit 5.
 - 9) Druk op ENTER.
 - 10) Herhaal de stappen (5) tot en met (9) totdat er ongeveer 20 sluitringetjes in het schaalpje liggen.
 - 11) Het proces wordt stilgezet wanneer na het verschijnen van de meetwaarde op STO> gedrukt wordt in plaats van op ENTER.
- 8 Na het beëindigen van het meten druk op 3 (3:RESCALE) om de grafiek te hertekenen.
- 9 Druk op ENTER en daarna op 4 (4:RETURN) en op 1 (1:MAIN SCREEN). Als laatste op 6 (6:QUIT) om de applicatie te beëindigen. Bij het afsluiten van de toepassing wordt aangegeven in welke lijsten alle meetresultaten worden opgeslagen. In lijst L1 worden de aantallen sluitringetjes opgeslagen en de lijst L6 bevat de waarden van de afstand. Druk nog eens op ENTER om de applicatie volledig te verlaten.
- 10 Maak een puntenwolk gebruikmakend van de gegevens in de lijsten L1 en L6.
- Druk 2nd Y= (STAT PLOT)
 - Selecteer ON en druk ENTER
 - Selecteer " " als type

- Vul Xlist aan met de lijst L1 en Ylist met L6
- Kies als Mark een vierkantje en druk op ENTER
- Druk ZOOM en selecteer 9:ZoomStat.



Opdrachten

- 1 Vul onderstaande tabel aan. Gebruik hiervoor de tracefunctie om door de grafiek te wandelen.

aantal sluitringetjes	afstand (m)
0	
5	
10	
15	
20	

- 2 We berekenen de verschillen tussen de afstanden en slaan die op in een lijst L3.
 - Druk STAT
 - Druk 2nd STAT (LIST) OPS
 - Selecteer 7: Δ LIST(en vul aan met L6 en sluit het haakje
 - Druk STO> om de resultaten op te slaan in de lijst L3.
 - Om positieve resultaten te hebben vermenigvuldigen we lijst L3 met -1 .

```

NAMES [0] MATH  $\Delta$ List(L6) $\div$ L3
1:SortA( (-.032 -.027 -...
2:SortD( L3*(-1)
3:dim( (.032 .027 .031...
4:Fill( █
5:seq(
6:cumSum(
7: $\Delta$ List(

```

- 3 De resultaten zijn nagenoeg constant. Wat kunnen we dan besluiten over de best passende kromme door deze meetresultaten? Waarom?

4 Laten we zelf een best passende kromme doorheen de meetresultaten bepalen en tekenen.

a) Hoe kunnen we de richtingscoëfficiënt m bepalen?

b) Aan wat is de waarde van q gelijk?

Oplossing:

de richtingscoëfficiënt m : Bereken het quotiënt van de gemiddelde waarde van de lijst L3

- Druk 2nd STAT (LIST) MATH en selecteer 3:mean(

- Vul aan met L3 en) / 5

- Druk op STO> en daarna ALPHA M en op ENTER.

de waarde q : Deze waarde is de waarde van de afstand voor 0 sluitringetjes (het eerste element uit de lijst L6). Spaar deze waarde op in de variabele Q.

```
NAMES OPS VALUE          mean(L3)/5→M
1:min(                   -.00615015
2:max(                   L6(1)→Q
3:mean(                   .952646
4:median(
5:sum(
6:prod(
7:stdDev(
```

Vul dan het functievoorschrift $M \cdot X + Q$ in bij de functievariabele Y2 en laat die tekenen.

5 Laat de rekenmachine nu de best passende kromme berekenen en tekenen doorheen de verkregen meetresultaten.

- Druk STAT en kies CALC en selecteer 4:LinReg(ax+b).

- Vul aan met L1 en L6 en Y1 als functievariabele, gescheiden door komma's.

```
LinReg
y=ax+b
a=-.00608072
b=.952757
r2=.9988443132
r=-.9994219896
```

- Teken dan de grafiek van de best passende kromme doorheen de meetresultaten.

Wat is er te zeggen over de benadering?

Wat valt er te zeggen over onze benadering en deze van de rekenmachine?

- 6 Voorspel de afstand wanneer er 30 sluitringetjes in het schaalpje gelegd worden en controleer dit met behulp van de bewegingsdetector CBR-CBL combinatie.
- 7 De wet van Hooke uit de fysica zegt ook dat de veerkracht recht evenredig is met de afstand waarover de veer uitgerokken is. De evenredigheidsfactor is typisch voor een veer en heet dan ook de veerconstante.

Schrijf dat verband in formulevorm:

Wat kan je vertellen over de waarde van die evenredigheidsconstante bij een strakke veer en bij een zwakke veer?

Laten we de veerconstante van de veer bepalen.

Wat is het verband tussen de verandering in kracht en de toename van het aantal sluitringetjes?

$$\Delta F_v \sim \text{aantal sluitringetjes}$$

Welke kracht werkt er nog op het systeem? Geef de formule voor deze kracht.

Wat is het verband tussen de verandering in zwaartekracht en de toename van het aantal sluitringetjes?

$$\Delta F_g \sim \text{aantal sluitringetjes}$$

Welke grootheden veranderen nog door de toename van de sluitringetjes? Hoe?

- uitrekking \sim aantal sluitringetjes
- massa \sim aantal sluitringetjes

Uit het vorige weten we dat er gemiddeld ongeveer 6 mm uitrekking bijkomt. We weten ook dat 5 ringetjes een massa van 10g hebben dit betekent dat 1 ringetje gemiddeld een massa van 2 g heeft.

Toename 5 ringetjes

$$\Delta \text{massa} = 10 \text{ g} \rightarrow \Delta F_g = \underline{\hspace{10em}}$$

$$\Delta \text{uitrekking} = 3 \text{ cm} \rightarrow \Delta F_v = \underline{\hspace{10em}}$$

Bereken hieruit dan de gemiddelde waarde voor k.

DEEL 2 Massa-veersysteem

Beschrijving van het experiment

- 1 Plaats het statief op de rand van de tafel. Verzwaar de voet eventueel door het aanbrengen van een supplementaire massa.
- 2 Bevestig de veer met het schaalte aan het statief zodat het schaalte voorbij de rand van de tafel hangt. Zorg dat er ongeveer een vijftigtal sluitringetjes in het schaalte liggen.
- 3 Positioneer de CBR op de grond onder de schaal. Zorg ervoor dat er niets op de CBR valt. Dit kan echter het toestel beschadigen. Hou ook rekening met de voorwaarden waaraan moet voldaan worden opdat de CBR een voorwerp kan detecteren.
 - De minimum afstand CBR-voorwerp moet ongeveer een halve meter zijn.
 - De detectiezone van de CBR is kegelvormig.
- 4 Verbind de CBR met de CBL met de daarvoor voorziene kabel. Let op de CBL heeft een speciale ingang voor de CBR. Deze bevindt zich aan de rechterkant van het toestel en is aangeduid met de benaming DIG/SONIC. Verbind vervolgens de CBL met de grafische rekenmachine.
- 5 Start het programma DATAMATE op dat zich onder de applicaties bevindt.

```
APPLICATIONS
1: Finance...
2: CBL/CBR
3: Cabri Jr
4: CelSheet
5: Conics
6: CtlgHelp
DataMate
```

Bij het opstarten detecteert de CBL automatisch welke sensoren er aangesloten zijn op het toestel. Na enige tijd wordt er aangegeven dat de motionsensor is aangesloten op het kanaal Dig. Je hoort nu ook met regelmatige tussenpozen een getik. Dit geeft aan dat de CBR verbonden is en reeds waarnemingen aan het doen is.

- 6 - Druk 1 (1:SETUP)
 - Druk éénmaal pijltje naar boven om de Mode in te stellen en druk op ENTER.
 - Druk 2 (2:TIME GRAPH)
 - Druk 2 (2:CHANGE TIME SETTINGS) en voer volgende waarden in: 0,05 als tijdsinterval en 200 als het aantal metingen. Bevestig steeds door op ENTER te drukken.
 - Ga terug naar het vorige scherm door op 1 (1:OK) te drukken.Door het tijdsinterval kleiner te nemen zal de grafiek eerder op een volle lijn lijken. Daar staat tegenover over dat er dan meer metingen moeten gedaan worden om eenzelfde tijdsinterval te bestrijken. Dit kan leiden tot een overflow van het geheugen van de rekenmachine.

- Dit is enkel van toepassing als je zou werken met de CBR alleen*
 – Druk APPS en selecteer CBL/CBR en kies voor 3:Ranger.

```

APPLICATIONS
1: Finance...
2: CBL/CBR
3: Cabri Jr
4: CelSheet
5: Conics
6: Ct19Help
7↓ DataMate

CBL/CBR APP:
1: GAUGE
2: DATA LOGGER
3: RANGER
4: QUIT
  
```

- Selecteer 1:SETUP/SAMPLE.

```

MAIN MENU
1: SETUP/SAMPLE
2: SET DEFAULTS
3: APPLICATIONS
4: PLOT MENU
5: TOOLS
6: QUIT
  
```

- Maak de volgende instellingen:
- * Realtime: No
 - * Time(s): 4
 - * Display: DIST
 - * Begin On: [ENTER]
 - * Smoothing: Heavy (kan eventueel zonder)
 - * Units: meters

Voor de fysici is de smoothing uit den boze omdat dan de toevallige fouten eventueel verdoezeld worden.

– Bepaal met behulp van de CBR de afstand tussen de stilhangende massa en de CBR en sla die op in een variabele bijvoorbeeld H.

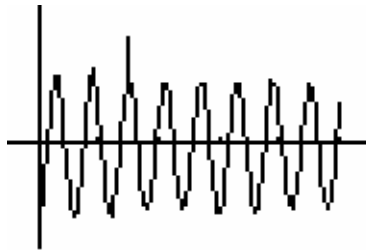
– Geef een uitwijking aan het schaalpje (ongeveer 10 cm) naar beneden. Laat de massa los en druk tegelijkertijd op ENTER.

Eventuele vragen en opdrachten

- *Waarom gaat de kromme niet door de x-as?*
- *Zorg ervoor dat de grafiek rond de x-as schommelt.*
- *Tussen welke waarden schommelt de massa rond haar evenwichtsstand?*
- *Bepaal de periode van de beweging.*
- *Probeer de andere parameters van de algemene sinusvorm te bepalen.*

- 7 De nulpositie van het schaalpje (evenwichtsstand) moet nog aangegeven worden.
- Druk 3 (3:ZERO)
 - Druk op 1 (1: DIG-DISTANCE) om het digitale kanaal van de CBL te kiezen waaraan de CBR gekoppeld is.
 - Dan krijg je een waarde te lezen. Dit is de afstand van de CBR tot het schaalpje. Als je het schaalpje beweegt moet het getal veranderen. Is dit niet het geval dan betekent dit dat de CBR het schaalpje niet detecteert. Controleer nog eens de voorwaarden. Detecteert de CBR wel het schaalpje dan wacht je even tot de weergegeven getalwaarde niet meer verandert. Dit betekent dat het schaalpje in zijn evenwichtsstand hangt. Druk dan op ENTER. We komen onmiddellijk weer in het basis scherm. Alles is nu klaar om de metingen op te nemen.

- 8 Geef de massa dan een uitwijking van ongeveer 10 cm naar beneden.
 – Druk op 2 (2:START) om de meting te starten en laat ook de massa los.
 Na het signaal hoor je het getik van de CBR. Dit betekent dat de meting zich aan het voltrekken is. Op het einde van de meting wordt opnieuw een signaal gegeven.
- 9 Kies voor DIG-DISTANCE als grafiek en druk 3 (3:RESCALE). Dan verschijnt een grafiek van de meting. Deze is nogal tamelijk ruw omdat als markeerteken het vierkantje wordt genomen. We gaan de grafiek wat aanpassen en verlaten daarom het programma DATAMATE.
 – Druk op ENTER en druk 4 (4:RETURN)
 – Druk 1 (1:MAIN SCREEN)
 – Druk 6: (6:QUIT)
 Op het scherm verschijnt dan de boodschap in welke lijsten alle meetgegevens opgespaard worden. Voor ons zijn de volgende lijsten van belang: L1 met de tijd, L6 met de afstand, L7 met de snelheid en L8 met de versnelling.
 – Druk op ENTER om definitief de applicatie af te sluiten.
- 10 – Druk op 2nd Y= (STAT PLOT) en selecteer 1:Plot1.
 – Verander Mark tot een puntje en druk op ENTER om te bevestigen.
- 11 - Druk ZOOM en selecteer 9:ZoomStat
 Zo wordt de grafiek van de afstand in functie van de tijd wat fijner weergegeven.



Wat merk je op in verband met het verloop van de grafiek?

Door welke functies zou dit verloop kunnen gemodelleerd worden?

Vragen en opdrachten

- 1 Bepaal de uiterste waarden van de uitwijkingen voor de eerste schommelingen
 min: _____
 max: _____

- 2 Een schommeling van de massa wordt in de fysica een cyclus genoemd. Welke tijd heeft de massa nodig om een cyclus te doorlopen.

$T =$ _____
 (neem een aantal waarden en beschouw het gemiddelde als het eindresultaat)

- 3 We kunnen nu al de amplitude berekenen door het gemiddelde te nemen van de minimale en de maximale uitwijking en sparen die waarde op in A.
 Ook de frequentie B kunnen we berekenen aan de hand van de uit (2) verkregen

periode T. namelijk $B = \frac{2\pi}{T}$ en sparen deze waarde op in de variabele B.

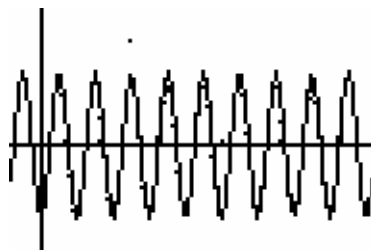
- 4 We bepalen nu de parameter C, de verschuiving van de grafiek volgens de x-as. Deze waarde wordt op zijn beurt opgespaard in de variabele C

```
(.059974+.058308
)/2→A
.059141
2*π/1.2→B
5.235987756
.3→C
.3
■
```

- 5 We voeren nu het functievoorschrift in.
 - Druk Y= en bij Y1 tikken we het voorschrift in.
 - Druk daarna op GRAPH.

Vergeet niet dat de instellingen van de rekenmachine de radialen als eenheid voor hoekgrootte moeten kiezen.

```
Plot1 Plot2 Plot3
\Y1= A*sin(B*(X-C))
\Y2=
\Y3=
\Y4=
\Y5=
\Y6=
Sci Eng
Float 0123456789
Radian Degree
Func Par Pol Seq
Connected Dot
Sequential Simul
Real a+bi re^θi
Full Horiz G-T
```



Wat vind je van de benadering?

Wat zouden de parameters geworden zijn als we een cosinusfunctie als best passende kromme zouden hebben gekozen?

- 6 Herhaal de stappen (1) tot en met (5) voor de snelheidsgrafiek. Sla de gevonden waarden op in de volgende variabelen de amplitude in D, de frequentie in E en de verschuiving in F.

```
(.305424+.327637
)/2→D
2*π/1.2→E
3165305
5.235987756
0→F
0
```

Let op: Gebruik hiervoor de lijsten L1 waarin de tijdswaarnemingen zitten en L7 waarin de snelheidswaarnemingen zitten. Vergeet niet, eerst aan de hand van STAT PLOT de meetresultaten weer te geven als puntenwolk.

Deactiveer ook de vorige twee grafieken: de puntenwolk tijd-afstand en de sinusgrafiek.



```
Plot1 Plot2 Plot3
\Y1=A*sin(B*(X-C)
)
\Y2=D*sin(E*(X-F)
)
\Y3=
\Y4=
\Y5=
```



Hoe vind je de benadering?

Wat kan je vertellen over de periode van de sinusbenadering voor de snelheidsgrafiek in vergelijking met de afstandsgrafiek?

Opmerking:

- We kunnen ook gebruik maken van de sinusregressie die in de rekenmachine standaard aanwezig is om wat vlugger tot benaderingen te komen.
- Ook met de versnellingsgrafiek kan men hetzelfde ondernemen.

- 7 Breng beide gevonden benaderingen samen in een grafisch scherm.

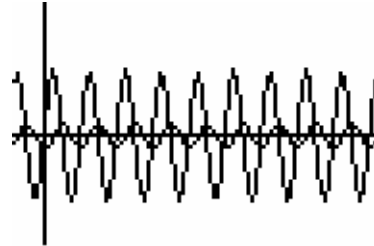
- Druk Y=
- Deactiveer de actieve plots door erop te gaan staan en ENTER in te drukken.

- Activeer de functievariabele Y1 door op het gelijkheidsteken te staan en ENTER in te drukken. Controleer of de functievariabele Y2 geactiveerd is. Is dit niet het geval herhaal de hierboven beschreven procedure.

```

Plot1 Plot2 Plot3
\Y1=A*sin(B*(X-C
\Y2=D*sin(E*(X-F
\Y3=
\Y4=
\Y5=

```



Wanneer wordt de snelheid van het voorwerp nul?

Wanneer wordt de snelheid van het voorwerp maximaal (geen rekening houdend met het teken)?

Kun je daaruit iets besluiten over het verband tussen het voorschrift van de afstandsfunctie en de snelheidsfunctie?

8 Uit de fysica weten we dat de snelheidsfunctie de afgeleide functie is van de

afstandsfunctie: $v(t) = \frac{dy(t)}{dt}$

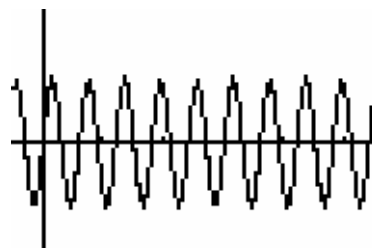
Laten we dit eens even controleren door de grafiek van de afgeleide functie van de afstandsfunctie op het scherm te plaatsen.

- Druk Y=
- Ga naar de functievariabele Y3, druk MATH en selecteer 8:nDeriv(.
- Vul aan met de functievariabele Y1 en tweemaal X gescheiden door komma's en sluit de haakjes.
- We laten de afgeleide functie een spoor trekken. Daarom plaatsen we de cursor met de pijltjestoetsen voor de variabele Y3 en drukken op ENTER totdat een soort sleuteltje \ominus verschijnt.
- Deactiveer de functievariabele Y1.
- Druk op GRAPH.

```

Plot1 Plot2 Plot3
\Y1=A*sin(B*(X-C
\Y2=D*sin(E*(X-F
\Y3=nDeriv(Y1,X,
\Y4=

```



Opmerking: Wil je het tekenen herhalen druk dan eerst 2nd PRGM (DRAW) en selecteer 1:ClrDrw. Daarna wordt automatisch de grafiek volledig hertekend.

- 9 Deze gegevens bieden ook de mogelijkheid om iets meer te vertellen over parametervergelijkingen en krommen. Zo kunnen we aan de hand van de meetresultaten voor de afstand en de snelheid een ellips laten genereren.

Je gaat als volgt te werk:

- Druk 2nd Y= (STAT PLOT) en selecteer 3:Plot 3.
 - Activeer ON
 - Type "
 - Vul de Xlist en Ylist aan met L6 (afstanden) en L7 (snelheden)
 - Als markeerpunt kiezen we het vierkantje.
- Druk ZOOM en selecteer 9:ZoomStat om de puntenwolk weer te geven.

```

Plot1 Plot2 Plot3
Off Off Off
Type: [ ] [ ] [ ]
Xlist:L6
Ylist:L7
Mark: [ ] + .
  
```



De grafische voorstelling wordt ook wel eens een fase-diagram genoemd.

Proberen we nu deze ellips te beschrijven met behulp van de voorheen gevonden functiebenaderingen voor de afstand en de snelheid. Vergeet niet dat de afstanden volgens de x-as en de snelheden volgens de y-as afgebeeld zijn.

Hier komt de parametervoorstelling van een ellips op de proppen:

$$\begin{cases} x(t) = A \cos(t) \\ y(t) = B \sin(t) \end{cases}$$

We weten reeds dat een cosinusfunctie te schrijven is als een sinusfunctie dus kan dit ook als volgt

$$\begin{cases} x(t) = A \sin(t + \frac{\pi}{2}) \text{ of } A \sin(\frac{\pi}{2} - t) \\ y(t) = B \sin(t) \end{cases}$$

```

Normal Sci Eng
Float 0123456789
Radian Degree
Func Par Pol Seq
Connected Dot
Sequential Simul
Real a+bi re^θi
Full Horiz G-T
  
```

- Druk MODE en selecteer PAR voor parametervergelijkingen, druk op ENTER en druk op 2nd MODE (QUIT) om af te sluiten.

- Druk op Y= . We zien dat het uitzicht nu veranderd is. Voer de twee uitdrukkingen in voor de x-coördinaat en de y-coördinaat. Merk op dat de variabele X vervangen wordt door T (de parameter).

```

Plot1 Plot2 Plot3
\X1T=
Y1T=
\X2T=
Y2T=
\X3T=
Y3T=
\X4T=

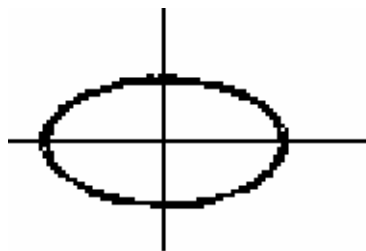
```

```

Plot1 Plot2 Plot3
\X1T= A*sin(B*(T-
C))
Y1T= D*sin(E*(T-
F))
\X2T=
Y2T=
\X3T=

```

- Druk op GRAPH om de grafische voorstelling te krijgen (Zorg ervoor dat Plot 3 gedeactiveerd is.).



Wat stellen we vast?

Wat kan de reden zijn?

Hoe kunnen we dit verbeteren?

De oplossing van dit probleem is dat we moeten rekening houden met de periode van de sinusfuncties die ingevoerd werden. Voordien hebben we vastgesteld dat deze periode $T =$ _____ is.

Deze waarde voeren we in bij de vensterinstellingen.

- Druk WINDOW

```

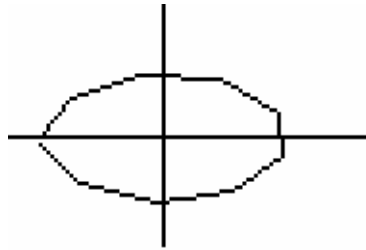
WINDOW
Tmin=0
Tmax=6.2831853...
Tstep=1.308996...
Xmin=-.07444
Xmax=.099152
Xscl=2
↓Ymin=-.51933198

```

- Vul bij Tmax 1.2 in

```
WINDOW
Tmin=0
Tmax=1.2
Tstep=.1308996...
Xmin=-.07444
Xmax=.099152
Xscl=2
↓Ymin=-.51933198
```

- Druk op GRAPH



Wat is nu opvallend aan de grafiek?

Hoe kun je dit verklaren?

Hoe zou je dit kunnen verbeteren?

10 Uitbreiding:

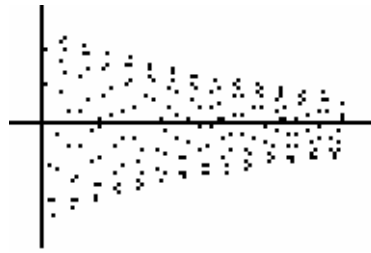
Wanneer je nog wat dieper op de zaken zou willen ingaan dan kan nog gezocht worden naar een verband tussen de periode van de beweging en de massa van het voorwerp. Dit verband heeft iets te maken met de veerconstante.

DEEL 3 Gedempte harmonische trilling

Beschrijving van het experiment

- 1 Plaats het statief op de rand van de tafel. Verzwaar de voet eventueel door het aanbrengen van een supplementaire massa.
- 2 Bevestig de veer met het staafje met massa's en de CDROM aan het statief zodat het geheel voorbij de rand van de tafel komt.
- 3 Positioneer de CBR op de grond onder de massa. Zorg ervoor dat er niets op de CBR valt. Dit kan het toestel beschadigen. Hou ook rekening met de voorwaarden waaraan moet voldaan worden opdat de CBR een voorwerp kan detecteren.
 - De minimale afstand CBR-voorwerp moet ongeveer een halve meter zijn.
 - De detectiezone van de CBR is kegelvormig.
- 4 Verbind de CBR met de CBL met de daarvoor voorziene kabel. Let op de CBL heeft een ingang speciaal voor de CBR namelijk DIG/SONIC genaamd. Deze bevindt zich aan de rechterkant van het toestel. Verbind vervolgens de CBL met de grafische rekenmachine.
- 5 Start het programma DATAMATE op dat zich bevindt onder de applicaties. Bij het opstarten detecteert de CBL automatisch welke sensoren er aangesloten zijn op het toestel. Na enige tijd wordt er aangegeven dat de motionsensor is aangesloten op het kanaal DIG.
- 6 We passen eerst de instellingen aan.
 - Druk op 1 (1:SETUP)
 - Druk eenmaal op het pijltje naar boven en daarna op ENTER
 - Druk tweemaal op 2 (2:TIME-GRAPH EN 2:CHANGE TIME SETTINGS)
 - Voer het tijdsinterval tussen twee metingen in. Neem hier 0,05 (maximaal) en voor het aantal metingen 200. Dit brengt de totale waarnemingsduur op 10 s. Zorg dat dit ongeveer zo blijft, welke instellingen je ook kiest.
 - Hoe korter het tijdsinterval genomen wordt, hoe meer metingen moeten gebeuren. Dit maakt de grafiek wat scherper en vollediger. Maar dit betekent ook dat er meer waarden moeten worden opgeslagen waardoor de lijsten langer worden. Hierdoor kunnen er problemen ontstaan in verband met de geheugencapaciteit.
 - Tevreden over de aangebrachte instellingen druk op 1 (1:OK).
 - We kunnen nu meteen ook de nulpositie van de metingen instellen door de 3 (3:ZERO) in te drukken. Druk op 1 (1:DIG-DISTANCE). Dan verschijnt de uitlezing van de afstand gemeten door de CBR. Wanneer een aantal keren dezelfde waarde aangegeven, wordt druk op ENTER om deze positie als nulpositie in te stellen. We komen zo onmiddellijk in het basisscherm van DATAMATE terecht. Alles is nu klaar om de meting uit te voeren.
- 7 Trek de massa met CDROM ongeveer 10 cm naar beneden uit haar evenwichtsstand. Druk op 2 (2:START) en laat gelijktijdig de massa los. De beweging wordt nu een tiental seconden gevolgd en opgemeten. Op het einde van de tijd wordt een signaal gegeven.

- 8 Na het meten kan de grafiek verkregen worden. Kies DIG-DISTANCE en druk op 3 (3:RESCALE).



- 9 Druk op ENTER om het grafisch scherm te verlaten en 1 (1:MAIN SCREEN) om terug in het basisscherm te komen. Druk op 6 (6:QUIT) om het programma DATAMATE te verlaten. Er verschijnt nog een melding in welke lijsten de verschillende meetresultaten worden opgespaard. Druk op ENTER om de applicatie DATAMATE af te sluiten. De gegevens die voor ons doel belangrijk zijn, kunnen we vinden in
- L1: de tijdswaarden
 - L6: de afstandswaarden
 - L7: de snelheidswaarden
 - L8: de versnellingswaarden

- 10 Om de grafiek opnieuw te bekijken buiten het programma DATAMATE, druk op ZOOM en selecteer 9:ZoomStat.



Wat valt er op aan het verloop van de afstand-tijdsgrafiek?

Vragen en opdrachten

Het periodiek zijn van de beweging verwondert ons niet zo zeer want we hebben te maken met een schommelende beweging rond een evenwichtsstand. Uit de vorige opdrachten hebben we dit verloop grondiger bestudeerd. Vandaar gaan we hier niet dieper op dat fenomeen in.

Daarnaast valt het op dat het voorwerp met de tijd minder en minder ver van de evenwichtspositie geraakt. Uiteindelijk zal het voorwerp na een bepaalde tijd tot stilstand komen in de evenwichtspositie. Dit gestadig afnemen van de maximale uitwijking (amplitude) willen we aan een nader onderzoek onderwerpen.

In eerste instantie beperken we ons tot de toppen die boven de x-as gelegen zijn.

- 1 Vul de volgende tabel aan. Gebruik de tracefunctie om doorheen de grafiek te lopen.

x-waarde	y-waarde

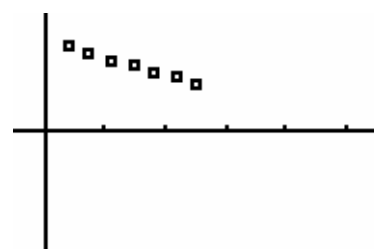
Zorg ervoor dat er minstens 5 en maximaal 10 waarnemingen genoteerd zijn. Laat bij voorkeur de eerste waarneming achterwege. Hou het interval van de x-waarde gelijk. Indien dit te veel verschilt, moet daar in de verdere berekeningen rekening mee gehouden worden. Dit vermoeilijkt alleen maar de berekeningen.

- 2 Stop de waarden van de eerste kolom van de tabel in lijst L2.
- Druk STAT en selecteer 1:Edit...
 - Ga met de pijltjestoets naar lijst L2. Staan er waarden van vroegere waarnemingen of berekeningen in de lijst druk eenmaal pijltje naar boven. Zo kom je bij de naam van de lijst en druk CLEAR.
 - Druk eenmaal pijltje naar beneden en start met de invoer van de x-waarden. Druk telkens op ENTER om de invoer te bevestigen.
- 3 Volg een analoge werkwijze om de lijst L3 te voorzien van de waarden uit de tweede kolom van de tabel uit (1).

L2	L3	L4	4
.75	.0647	████████	
1.45	.0583		
2.2	.0522		
2.9	.0494		
3.6	.0439		
4.35	.0408		
5.05	.0364		

L4(1)=

- 4 Maak een statistische plot van de waarden in de lijsten L2 en L3.
- Druk 2nd Y= (STAT PLOT) en selecteer 2:Plot 2
 - Activeer ON
 - Kies \square als type
 - Vul L2 als Xlist en L3 als Ylist in
 - Als Mark kies je het vierkantje.



Welk verband zou je vermoeden?

Als je daarin een lineair verband zou zien, klopt dit model wel met de werkelijkheid? Waarom wel of niet?

Welk verband zou het dan wel kunnen zijn rekening houdend met de praktische overwegingen?

Om zeker te zijn of het gaat om een exponentieel verloop, kunnen we de volgende techniek toepassen.
Een exponentieel verloop wordt gegeven door:

$$y = B \cdot A^x$$

We nemen van beide leden de logaritme

$$\ln(y) = \ln(B \cdot A^x)$$

Na enig rekenwerk (zelf) krijgen we:

$$\ln(y) = \ln(B) + x \ln(A)$$

Wat is het verband nu tussen de x-waarden en de $\ln(y)$ -waarden?

Dit is een manier om te controleren of het gaat om een exponentieel verloop. Dit is eigenlijk wat er gebeurt als we de meetresultaten zouden uitzetten op enkelvoudig logaritmisch papier. (Dit is een aanrader om eens te doen.)

Wij gaan dit tekenen op enkelvoudig logaritmisch papier met de rekenmachine nabootsen.

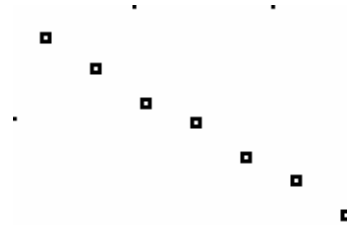
- a) Maak een nieuwe lijst in L5 van de logaritmen van de waarden uit lijst L3.
- Druk LN en vul aan met de naam van de lijst L3 en sluit de haakjes.
 - Druk STO> en vul aan met de naam van de lijst waarin het resultaat moet opgespaard worden namelijk L5

```
ln(L3)→L5  
{-2.737994077 -...  
■
```


- b) Druk 2nd Y= (STAT PLOT) en selecteer 3:Plot 3
- Activeer deze plot
 - Kies "■" als type
 - Xlist : L2
 - Ylist: L5
 - Mark is het vierkantje en druk op ENTER om te bevestigen

```

Plot1 Plot2 Plot3
Off Off Off
Type: [ ] [ ] [ ]
Xlist:L2
Ylist:L5
Mark: [ ] +
  
```



- c) Druk ZOOM en selecteer 9:ZoomStat.

```

LinReg
y=ax+b
a=-.1299664212
b=-2.648629602
r²=.9954622543
r=-.9977285474
  
```

Welk verband zie je tussen de variabelen?

Wat kunnen we daaruit besluiten?

We gaan nu vanuit deze gegevens de exponentiële functie proberen te bepalen.

- a) Laat door de rekenmachine het lineair regressiemodel berekenen tussen de waarden van lijst L2 en lijst L5.

a = _____

b = _____

- b) Deze waarden a en b van het lineair regressiemodel zijn de ln van de waarden die we nodig hebben bij het exponentieel model. Bereken de waarden:

A = _____

B = _____

- c) Vul het voorschrift van het exponentieel model in en laat de grafiek tekenen op de grafiek van de gedempte trilling.

Wat is er te vertellen over de benadering?

d) Ter controle kun je het exponentieel model laten berekenen en tekenen door de rekenmachine.

- Druk STAT CALC en selecteer 0:ExpReg
- Vul aan met de lijsten L2 en L3 en de functieveranderlijke Y2 gescheiden door komma's
- Druk GRAPH. Nu wordt de grafiek van de beweging, de door ons berekende benadering en de door de rekenmachine berekende benadering getekend.

Wat valt er te vertellen over de verschillende benaderingen?

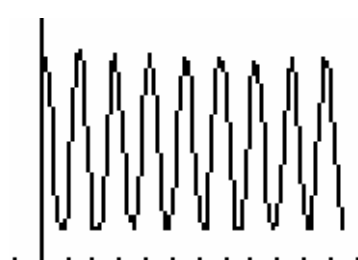
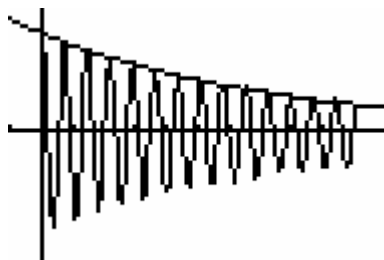
Uitbreiding:

Ook hier kan het fasediagram getekend worden. Dit levert een spectaculair plaatje op. Dit fasediagram zou model kunnen staan voor een voorwerp in een omwenteling rond de aarde dat gevangen wordt door de gravitatiekracht van de aarde. Dit voorwerp zal in een spiraalbeweging met een steeds kleiner wordende afstand tot de aarde op de aarde terechtkomen.

DEEL 4 De wiskundige slinger

De experimenten beschreven in het deel 2 en 3 kunnen ook uitgevoerd worden met een wiskundige slinger als basis in plaats van het massa-veersysteem. Daarbij kan de invloed van de lengte van de slinger op de periode van de slingerbeweging bestudeerd worden.

```
ExpReg  
y=a*b^x  
a=.0707480997  
b=.8781249168  
r^2=.9954622543  
r=-.9977285474
```



Hierbij kan ook weer evengoed gebruik gemaakt worden van de CBR-CBL-combinatie als van de CBR alleen.

BIJLAGEN

Bijlage 1: Het werken met de CBR en de CBL

Een grafisch rekentuig van TI biedt heel wat meer mogelijkheden dan de grafische. We kunnen een aantal kant en klare applicaties downloaden van het internet. Een andere mogelijkheid is dat het rekentoestel kan gebruikt worden als verzamelaar van gegevens. Hiervoor zijn een aantal toestellen voorzien: de CBR en de CBL (2 versies de oude en de nieuwe).

De CBR (Calculator-Based Ranger) verzamelt gegevens door middel van een bewegingsdetector. Het toestel zendt ultrasonische pulsen waarvan de echo opnieuw wordt opgevangen door het toestel. Door de tijdsverschillen tussen beide pulsen is het instrument in staat om afstanden, snelheden en versnellingen te bepalen.

De CBL (Calculator-Based Laboratory) is een interface, een tussenstation, tussen de grafische rekenmachine en verschillende meetapparatuur. Er worden 3 meetsondes meegeleverd namelijk: de temperatuursonde, de lichtsonde en de spanningssonde. Dit zijn er slechts drie uit een gamma van sensoren en sondes die kunnen aangesloten worden op de CBL. Zo zijn er sondes om kracht, geluid, rotatie, druk, radioactiviteit, ... te meten. Ook chemische grootheden kunnen worden gemeten zoals de zuurtegraad (pH), zuurstofgehalte en nog meer. Om te weten welke sondes voor de CBL bestaan, kan je terecht op de website van VERNIER (www.vernier.com). Dit is de firma die samen met TI de software en de apparatuur ontworpen heeft. Een aantal van de sondes kun je verkrijgen bij Rhombus (www.rhombus.be).

Met het grafisch rekentoestel, de CBL en de verschillende sondes beschik je over een draagbaar laboratorium waarbij verschillende grootheden kunnen geregistreerd worden. Het voordeel is nog dat de verwerking van de gegevens door de rekenmachine kan worden gedaan.

Elk toestel heeft zijn eigen geplogenheden en eisen. Het vraagt van de persoon die de toestellen gebruikt enige handigheid en vooral veel geduld en uitproberen vooraleer een goed bruikbaar resultaat te voorschijn komt. De CBR is zeer gemakkelijk wat de technische kant van het gebruik aangaat maar vraagt tot wat aandacht voor de opstelling van de proef. De CBL vraagt zowel eisen aan hardwarematige kant als aan softwarematige kant. Daartegenover staat dan dat de CBL veel gevarieerder gebruik mogelijk maakt.

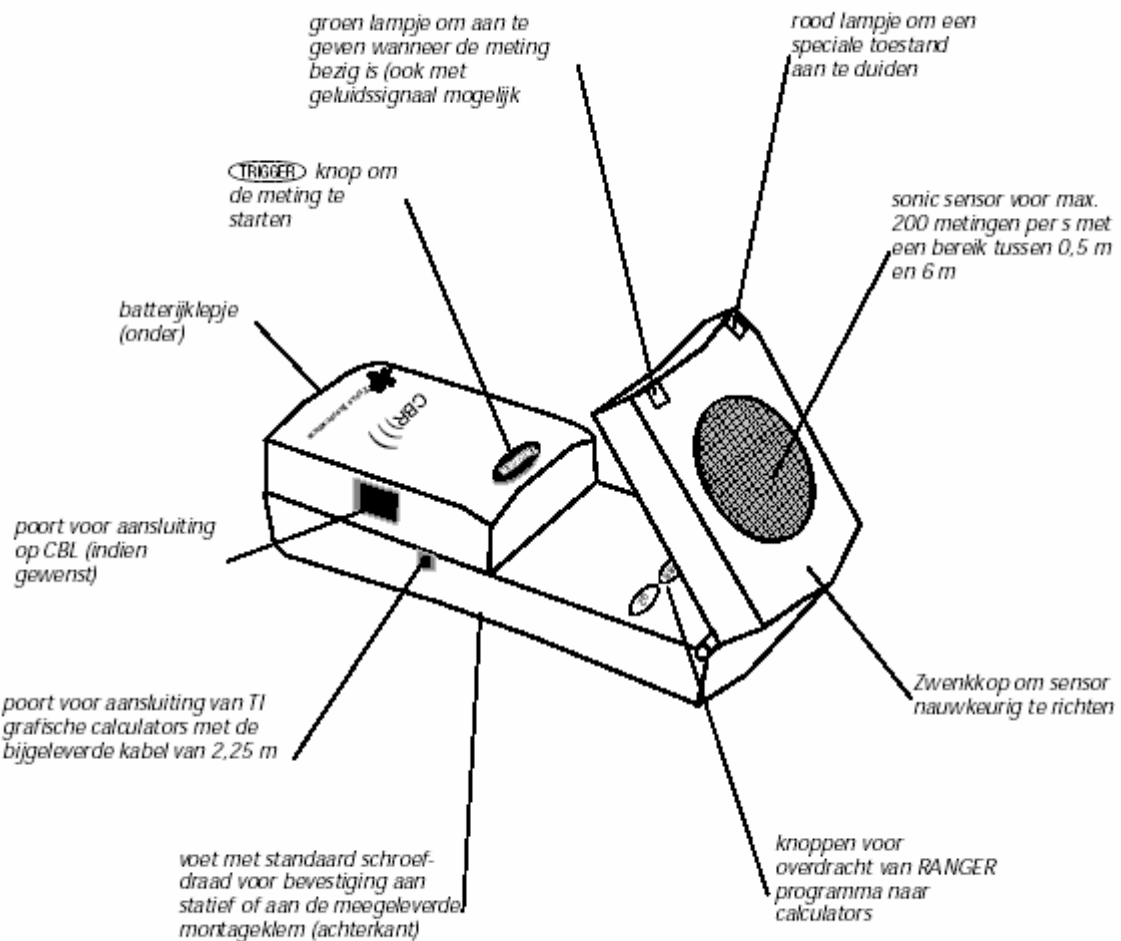
1 De CBR (Calculator-Based Ranger)

Met de CBR en de grafische rekenmachine zijn leerlingen in staat om gegevens over bewegingen te verzamelen, te bekijken en te analyseren zonder lastige metingen, ingewikkelde proefopstellingen en handmatig grafieken te moeten maken.

De leerlingen kunnen relaties onderzoeken tussen afstand, snelheid, versnelling en de tijd. Op die manier treden een aantal fysische en wiskundige concepten op de voorgrond:

- beweging: afstand, snelheid en versnelling
- grafieken: coördinaatassen, hellingshoek, x- of y-waarden zoeken
- functies: eerste-, tweedegraadsfuncties, exponentiële en goniometrische (meer bepaald de sinus) functies
- differentiaal- en integraalrekening: afgeleiden en integralen
- statistiek: gegevens verzamelen, statistische analyse (regressiemodellen).

Hoe werkt de CBR?

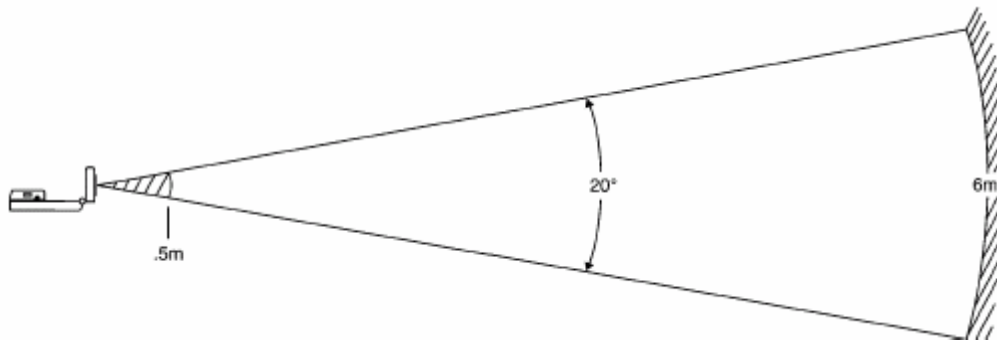


De CBR zendt een ultrasone puls uit en meet hoelang het duurt voor er een echo terugkomt van het dichtstbijzijnde voorwerp. De CBR meet de tijd die verloopt tussen het uitzenden van de puls en de eerste echo die terugkomt. De interne processor van het instrument doet nog veel meer dan alleen de tijd te registreren. De afstand tot het voorwerp wordt berekend aan de hand van de gekende geluidssnelheid. Daarna differentieert de processor de afstand 2 keer naar de tijd om de snelheid en de versnelling te bepalen. Deze gegevens worden opgeslagen in 4 lijsten van het rekentool: L1, L2, L3 en L4.

Voorwaarden om goede metingen te kunnen doen?

- Veel geduld en veel proberen.
- De grootte van het object is belangrijk. Werk je met een klein object op een grote afstand dan zijn de kansen op een nauwkeurig resultaat geringer. Bijvoorbeeld: op een afstand van 5 m wordt een voetbal veel makkelijker gedetecteerd dan een pingpongbal.

- Het oppervlak van het object speelt ook een belangrijke rol. Sommige oppervlakken reflecteren beter de geluidspulsen dan andere. Bijvoorbeeld met een glatte bal krijg je betere resultaten dan met een basketbal of een tennisbal. Als er in de buurt veel objecten aanwezig zijn met goede terugkaatsingseigenschappen zullen er ook meer onbedoelde echo's ontvangen worden waardoor het resultaat van de waarneming beïnvloed wordt. Dit kan vermeden worden door de afstanden voor de detectie zo beperkt mogelijk te houden en het gebied waarin waargenomen wordt zoveel mogelijk vrij te maken van onnodige objecten.
- De CBR heeft een minimumbereik en een maximumbereik van detectie. Als het object te dicht bij de CBR geplaatst wordt kunnen de uitgezonden en de teruggekaatste puls elkaar overlappen waardoor de CBR verkeerde interpretaties maakt. Als algemene regel wordt gesteld dat de afstand object-CBR minimaal 0,5 m moet zijn. Er is ook een maximale afstand object-CBR. Naarmate de puls verder moet reizen naar het voorwerp verliest hij aan intensiteit (kracht). Na ongeveer 12 m is de puls zo verzwakt dat de CBR hem niet meer kan onderscheiden. Dit betekent dat de werkingsafstand van de CBR maximaal 6 m bedraagt (6 m heen en 6 m terug).
- Het is ook belangrijk rekening te houden met de vorm van de bundel uitgezonden door de CBR. Deze bundel is een kegel met 20° als openingshoek. Om te vermijden dat andere objecten in de omgeving de uitlezing verstoren is het gewenst geen andere voorwerpen in het pad van de CBR-bundel te plaatsen. De CBR ziet enkel het

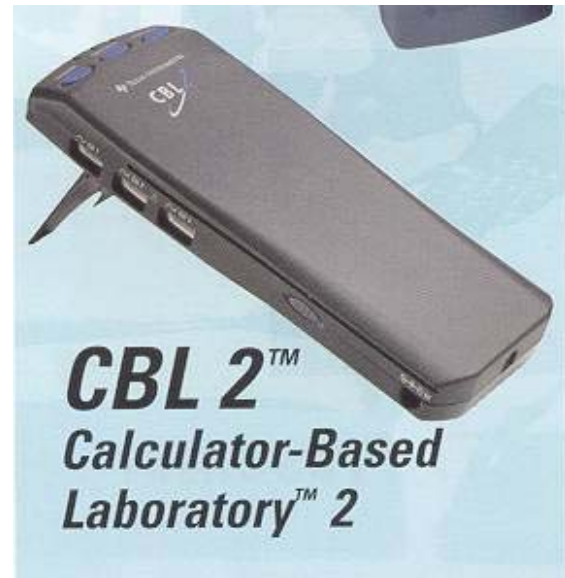


dichtstbijzijnde object binnen het gebied van de bundel.

De tijd staat niet stil. Er bestaat ondertussen een nieuwe versie van de CBR namelijk de CBR2. De meest in het oog springende vernieuwingen zijn:

- De CBR2 heeft slechts nog één knop om de nauwkeurigheid van de meting in te stellen op traag bewegende of snel bewegende voorwerpen.
- Er is een USB-aansluiting bijgekomen. Hiermee kan de CBR2 rechtstreeks aangesloten worden aan een TI84 Plus mits het vereiste operating system en het nodige programma.

2 De CBL (Calculator-Based Laboratory)



De CBL is de verouderde versie van de Calculator-Based Laboratory. De nieuwste versie heet CBL-2. Voordelen zijn dat het heel wat gemakkelijker hanteert. De rekenmachine kan op de CBL/CBL2 aangesloten worden. De algemene principes blijven dezelfde voor beide systemen.

De CBL wordt uit de markt genomen en niet meer geproduceerd.

De CBL2 is een draagbare gegevensverzamelaar. Na het verzamelen van de gegevens kunnen deze doorgestuurd worden naar een grafische rekenmachine voor verdere analyse. De controle gebeurt door het programma DATAMATE (ontworpen door Vernier). Wanneer dit programma niet aanwezig is op de rekenmachine kan dit getransfereerd worden door de CBL2 naar de rekenmachine.

Om verschillende fysische, chemische of biologische grootheden te onderzoeken volstaat het de gepaste sonde of sensor op de CBL2 aan te sluiten. Zo zijn er onder meer sondes of sensoren om pH, hartslag, versnelling, kracht, druk, temperatuur, beweging, lichtintensiteit, spanning, zuurstofgehalte, magnetische veldsterkte, geleidbaarheid, radioactiviteit, ... te meten.

Het apparaat beschikt over 4 uitgangen: 3 analoge, 1 digitaal. Wanneer op één van de kanalen een sensor is aangesloten detecteert het apparaat zelf welk kanaal dit is en welke sensor het is. Er kan tegelijkertijd op 4 kanalen gemeten worden. De stroomvoorziening van het apparaat bestaat uit 4 AA(LR6) batterijen. Eventueel kan er een passende adapter aangesloten worden waardoor de CBL2 op netspanning kan worden.

Dit apparaat is veel ingewikkelder in gebruik dan de CBR, maar daartegenover staat dat het toestel veel veelzijdiger is in toepassing.

Op het display van de CBL2 verschijnt de volgende informatie:

- de actieve kanalen met de verbonden sensor.
- eenaantal keuzemogelijkheden waardoor de instellingen van het apparaat en de sensoren kan geregeld worden.
- de meetwaarden die worden geregistreerd.

De ingangen meten spanning. De analoge kanalen zijn er om een continue spanning tussen -10 V en 10 V te meten. De digitale kanalen meten spanningen van 0 V of 5 V . Er moet rekening gehouden worden met die maximale waarden want anders kan het kanaal beschadigd worden waardoor het onbruikbaar wordt. Het digitale kanaal dient om de CBR aan te sluiten.

Bij het gebruik van sensoren is normaal een eerste handeling die dient te gebeuren het calibreren van de sensor. Dit betekent dat we de sensor leren met welke meetresultaat een bepaalde binnenkomende spanning overeenkomt. Dit is bij de CBL2 en de sensoren van Vernier voorzien voor de CBL2 niet meer noodzakelijk. Het kan nog wel maar mag achterwege gelaten worden.

Opmerking:

De firma Vernier is bezig met sensoren te ontwikkelen die rechtstreeks kunnen worden aangesloten aan de grafische rekenmachine mits de nodige programmatuur. Zo kan er al een CBR2 en een temperatuursensor rechtstreeks worden aangesloten. Andere sensoren volgen.

Bijlage 2: Evaluatie van het project

In verband met het project kunnen twee zaken geëvalueerd worden: de uitvoering van het project (procesevaluatie) en de rapportering achteraf (productevaluatie). Hierna volgt een voorbeeld hoe dit zou kunnen gebeuren.

Evaluatie bij de uitvoering van het project

<i>Beoordeling van de uitvoering</i>	
nt: niet van toepassing ga: geen antwoord 1,2,3,4: zie beoordelingsschema	Naam leerling: _____ _____
1 Kan de leerling het te onderzoeken probleem verwoorden?	ga 1 2 3 4 nt
2 Durft de leerling voorspellingen te maken over de uitkomsten van het experiment?	ga 1 2 3 4 nt
3 Kan de leerling zijn voorspellingen onderbouwen aan de hand van achtergrondinformatie?	ga 1 2 3 4 nt
4 Kan de leerling de uit te voeren procedure duidelijk aanbrenen?	ga 1 2 3 4 nt
5 Kan de leerling omschrijven welke metingen moeten gebeuren?	ga 1 2 3 4 nt
6 Kan de leerling zeggen hoe de metingen moeten gebeuren?	ga 1 2 3 4 nt
7 Kan de leerling de opstelling van het experiment beschrijven?	ga 1 2 3 4 nt
8 Kan de leerling de afhankelijke en onafhankelijke veranderlijken bepalen?	ga 1 2 3 4 nt
9 Kan de leerling het verband tussen de variabelen grafisch vertalen?	ga 1 2 3 4 nt
10 Kan de leerling de oorzaken van eventuele fouten verklaren?	ga 1 2 3 4 nt
Algemene score	
Commentaar: _____ _____ _____ _____ _____	

Beoordelingsschema

Graad 4

- De leerling begrijpt duidelijk het probleem en de onderzoeken die gebeurd zijn.
- De antwoorden van de leerling zijn correct en getuigen van aandacht voor detail.
- De kwaliteit van de antwoorden weerspiegelen het begrijpen van de uit te voeren experimenten.
- De kwaliteit van de antwoorden weerspiegelen de kennis om statistische methodes toe te passen bij de behandeling van de meetresultaten.
- Het experimenteel ontwerp is nauwgezet, accuraat en goed doordacht.
- Antwoorden op de vragen zijn goed doordacht en onderbouwd.
- De leerling herkent wanneer er nood is aan bijkomende informatie en doet suggesties in dit verband.
- De leerling kan succesvol een experiment opzetten en gebruikt daarbij de instrumenten op een correcte manier.
- De leerling kan de variabelen onderscheiden en verklaart het verband op een grafische manier.
- De leerling kan de mogelijke oorzaken van fouten formuleren.

Graad 3

- De leerling begrijpt duidelijk het probleem en de onderzoeken die gebeurd zijn.
- De antwoorden van de leerling zijn correct en getuigen van aandacht voor detail.
- De kwaliteit van de antwoorden weerspiegelen het begrijpen van de uit te voeren experimenten.
- De kwaliteit van de antwoorden weerspiegelen de kennis om statistische methodes toe te passen bij de behandeling van de meetresultaten.
- Het experimenteel ontwerp is wel goed doordacht maar niet altijd zo wetenschappelijk accuraat.
- De meeste antwoorden op de vragen zijn goed doordacht en onderbouwd.
- De leerling herkent wanneer er nood is aan bijkomende informatie maar doet geen, niet echt suggesties.

- De leerling ondervindt kleine moeilijkheden bij het opzetten van het experiment en gebruikt het materieel op een zinvolle manier.
- De leerling kan de verschillende variabelen wel onderscheiden maar ondervindt moeilijkheden bij de grafische interpretatie.
- De leerling heeft het moeilijk met zoeken en formuleren van oorzaken van fouten.

Graad 2

- De leerling begrijpt gedeeltelijk het probleem en de uit te voeren onderzoeken.
- De antwoorden van de leerling zijn vaag en missen aandacht voor detail.
- De kwaliteit van de antwoorden weerspiegelen het gebrek aan begrijpen van de uit te voeren experimenten.
- De kwaliteit van de antwoorden weerspiegelen een beperkte vaardigheid in het gebruik van statistische methodes bij de behandeling van meetresultaten.
- Het experimenteel ontwerp geeft blijk van een onduidelijk wetenschappelijk inzicht.
- De antwoorden op de vragen zijn niet goed overwogen of niet onderbouwd door vooronderzoek.
- De leerling ziet niet wanneer supplementaire onderzoeken (testen) nodig zijn.
- De leerling kan geen correcte laboratoriumopstelling maken.
- De leerling slaagt er niet in de variabelen uit het experiment te identificeren.
- De leerling kan geen bronnen van fouten, buiten menselijke, opsporen.

Graad 1

- De leerling begrijpt weinig of niets van het probleem en de onderzoeken die uitgevoerd zijn.
- De antwoorden van de leerlingen zijn slecht of ontbreken en vertonen geen tekenen van detail.
- De kwaliteit van de antwoorden weerspiegelen geen of bijna geen begrip van de uit te voeren experimenten.
- De kwaliteit van de antwoorden weerspiegelen geen of bijna geen vaardigheid om statistische methodes toe te passen op de meetresultaten.

- Uit het experimenteel ontwerp blijkt dat de leerling moeilijkheden heeft om te volgen of het experimenteel ontwerp ontbreekt.
- Antwoorden op de vragen zijn onmogelijk en steunen zeker niet op vooronderzoek.
- De leerling herkent niet de nood aan supplementaire testen.
- De leerling slaagt er niet in om een opstelling te maken.
- De leerling slaagt er niet in om de verschillende variabelen die bij het experiment aan bod komen te onderscheiden.
- De leerling slaagt er niet in om bronnen van fouten op te sporen.

Hierna volgt een voorbeeld van hoe een rapport of verslag zou kunnen geëvalueerd worden.

Checklist voor een labo-verslag

nt: niet van toepassing
ga: geen antwoord

Naam van de leerling:

A Vorm van het rapport (5 ptn)

- Titel, doelstellingen, namen van de groepsleden zijn opgenomen.
- Achtergrondinformatie wordt gegeven.
- Hypotheses/voorspellingen.
- Schematische voorstelling van de opstelling.
- Werkwijze stapsgewijs weergegeven met een materiaal-lijst.

ga 1 2 3 4 5 nt

B Kwaliteit van de waarnemingen (gegevens) (4 ptn)

- Accuraatheid van de metingen/waarnemingen.
- Complete datalist, kwaliteitsvolle waarneming.
- Juiste eenheden.
- De gegevens zijn representatief voor het gebeuren.

ga 1 2 3 4 nt

C Grafieken (6 ptn)

- Passende titel.
- Kromme volgt de data.
- Gegevens punten nauwgezet uitgezet.
- Passende schalen gekozen voorzien van eenheden.
- Assen correct benoemd en voorzien van de eenheid.
- Legende voorzien wanneer meerdere gegevensverzamelingen op dezelfde grafiek worden afgebeeld.

ga 1 2 3 4 5 6 nt

D Kwaliteit van de berekeningen (8 ptn)

- Wiskundig verband (relatie) geformuleerd.
- De nodige formules worden afgeleid.
- Alle stappen zijn wiskundig correct.
- Voert de juiste gegevens in de formules in.
- Correcte berekeningen.
- Eenheden worden weergegeven en worden juist gebruikt.
- Gebruik van beduidende cijfers.
- Kwaliteit van de resultaten.

ga 1 2 3 4 5 6 7 8 nt

<p><u>E Besluiten (7 ptn)</u></p> <ul style="list-style-type: none"> - Consistent met wetenschappelijke en wiskundige principes - Consistent met de hypothesen en doelstellingen. - Consistent met de gegevens. - Relatie (verband) tussen de variabelen wordt aangegeven. - Bronnen van mogelijke fouten worden vermeld. - Specifieke vragen worden beantwoord. - Referenties/citaten zijn vermeld. 	<p style="text-align: center;">ga 1 2 3 4 5 6 7 nt</p>
<p><u>F Zelf- en peerevaluatie (2ptn)</u></p> <ul style="list-style-type: none"> - Zelf-/peerevaluatie van en voor ieder groepslid is bijgevoegd. - Een kladwerk van het labrapport is bijgevoegd. 	<p style="text-align: center;">ga 1 2 nt</p>
<p><u>Totale score</u></p>	
<p><u>Commentaar:</u></p> <hr/> <hr/> <hr/> <hr/> <hr/>	

Bijlage 3: De antwoorden of grafische voorstellingen

In deze bijlage heb ik gepoogd om de antwoorden te formuleren op de open vragen bij de teksten botsingen en trillingen. Het cijfermateriaal heb ik achterwege gelaten omdat dit toch meestal verschillend zal zijn van mijn waarden. Dit komt vooral door de keuze van het gebruikte materiaal. Door die antwoorden krijg je een beeld van de grote lijnen, het opzet van de verschillende onderdelen.

Bij dit document vind je ook de lijsten van de meetresultaten die ik gebruikt heb, bij het opstellen van de teksten rond botsingen en trillingen. Ze zijn ondergebracht in de volgende twee mappen:

- Botsende bal
- Trillingen
 - o Veerconstante
 - o Massa-veer
 - o Gedempte trilling
 - o Slinger

Deze lijsten, terug te vinden op de website van T³-Vlaanderen, www.t3vlaanderen.be, kunnen naar de rekenmachine overgeheveld worden met het programma TI-Connect te vinden op de website van Texas Instruments (www.education.ti.com).

Botsingen

Deel 1

pag 8 vraag1:

$$y = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

a: de breedte, α : de x-coördinaat van de top en β de y-coördinaat van de top
a-waarde negatief: bergparabool

pag 9 vraag5:

de grafiek is een rechte (lineair verband)

verklaring van uit de fysica: de versnelling (g = zwaartekracht-versnelling) is constant

Dit betekent dat bij gelijke tijdsintervallen de toename van de snelheid constant is

vraag7:

de benadering is behoorlijk

de toppen van beide parabolen vallen samen, terwijl eventueel de opening van beide parabolen niet helemaal gelijk is.

pag 10 vraag8:

de benadering is behoorlijk

de toppen van beide parabolen vallen samen, terwijl eventueel de opening van beide parabolen niet helemaal gelijk is.

de benadering is behoorlijk

de rechten vallen nagenoeg samen

conclusie2:

de versnelling

conclusie3:

de helling van de snelheidsgrafiek = dubbel van de coëfficiënt van de kwadratische term.

conclusie4:

zwaartekracht

Deel 2

pag 11 vraag1:

E_p maximaal op het hoogste punt van de baan.

$E_k = 0$ want de snelheid is nul

vraag2:

E_k maximaal wanneer de bal op de grond komt.

E_p is nul want de hoogte t.o.v. het referentievlak is nul

vraag3:

De totale energie blijft niet constant. Er gaat energie verloren bij het botsen (inelastische botsing)

pag 12 vraag5:

ongeveer dezelfde waarde

vraag6:

Er is een afname van de tijdsintervallen.

vraag7:

meetkundige rij

Deel 3

pag 14 vraag4:

De benadering is behoorlijk

pag 17 vraag2:

de snelheid neemt gelijkmatig (lineair) toe.

de snelheid neemt gelijkmatig (lineair) af.

de bal bevindt zich in het hoogste punt.

vraag3:

het snijpunt zoeken van de grafiek met de x-as

vraag4:

stop de gevonden x-waarde in het functievoorschrift.

vraag5:

deze waarden liggen zeer dicht bij elkaar. Ze zijn om zeggens gelijk.

pag 18 vraag8:

deze waarden zijn ongeveer gelijk.

Deel 4

pag 20 vraag2:

de benadering is zeer goed.

pag 21 vraag4:

uit de figuur (grafiek) kunnen we zeggen dat de benadering de grafische voorstelling van de meetresultaten volgt. Het model voldoet.

vraag6:

exponentieel model

omdat dit model geleidelijk aan naar nul gaat en ook nooit een negatieve waarde aanneemt.

Dit model is niet onmiddellijk duidelijk uit de begingegevens.

De statistiek laat ons hier in de steek. Het is niet onmiddellijk duidelijk vanuit de berekeningen van de rekenmachine welk model het beste is om het fenomeen te beschrijven.

pag 23 vraag3:

het is behoorlijk

vraag5:

aan de rand verschillen de functies een beetje

pag 24 vraag7:

de grafiek van de nieuwe functie is niet te onderscheiden van de vorige twee.

Trillingen

Deel 1

pag 29 vraag3:

De best passende kromme is een rechte. Bij gelijke toename aantal ringetjes krijgen we nagenoeg gelijke afname van de afstand.

pag 30 vraag4:

toename afstand gedeeld door toename aantal de waarde van de afstand bij 0 sluitingsringetjes

vraag5:

de benaderingen vallen nagenoeg samen.

pag 31 vraag7:

$$F = k \Delta y$$

strak: k zeer groot

zwak: k zeer klein

$$\text{zwaartekracht } F_g = mg$$

Deel 2

pag 34 vraag11:

periodiciteit

schommeling tussen twee waarden

de sinus- of cosinusfunctie

pag 35 vraag5:

de benadering is nagenoeg perfect.

er moet rekening gehouden worden met een verschuiving volgens de x-as (de amplitude en de periode blijven dezelfde) van $\pi/2$.

pag 36-37 vraag6:

behoorlijk, er vallen hier en daar wat meetresultaten naast de grafiek van het model. de periode is dezelfde gebleven.

vraag7:

snelheid wordt nul wanneer het voorwerp zijn maximale uitwijking bereikt (zowel positief als negatief)

wanneer het voorwerp door zijn evenwichtsstand gaat is de snelheid nul

de twee grafieken verhouden zich als een sinusfunctie en een cosinusfunctie dat doen.

pag 38-39 vraag9:

de kromme wordt verscheidene keren doorlopen.

het parameterdomein is te groot gekozen.

we beperken het parameterdomein tot de periode van de beweging (snelheid).

de grafiek is zeer hoekig geworden (niet vloeiend)

binnen een periode (parameterdomein) vallen te weinig meetresultaten, waardoor de weinige meetresultaten verbonden worden met lijnstukjes.

Het aantal meetresultaten verhogen door het interval tussen twee metingen kleiner te nemen. (opletten dat het totale aantal metingen de geheugencapaciteit van de rekenmachine niet te overstijgt)

Deel 3

pag 42 vraag10:

het verloop is nog altijd periodisch maar de maximale uitwijking wordt steeds kleiner

pag 43-44 vraag4:

een lineair verband op 't eerste zicht.

dit klopt niet want dat zou betekenen dat na een tijd de amplitude nul wordt en vanaf dat ogenblik weer zou toenemen. dit is in strijd met de waarneming.

we zoeken een verloop met een asymptotisch gedrag naar de x-as en waarvan de functiewaarden steeds positief zijn. een exponentieel verband lijkt hier het meeste aangewezen.

een lineair verband.

een lineair verband

we mogen besluiten dat het oorspronkelijke verband inderdaad exponentieel is

dit model volgt mooi het exponentieel afnemen van de amplitude.

beide benaderingen zijn niet van elkaar te onderscheiden.

Bijlage 4: Voorstellen om vanuit concrete meetresultaten van fysische proeven tot wiskundige modellen te komen.

- **Lineair verband:**
 - Verband tussen het volume en massa van blokjes met een verschillend formaat vervaardigd uit hetzelfde materiaal (massadichtheid).
 - Verband tussen spanning en stroomsterkte in een gelijkspanningskring (de wet van Ohm).
 - Het opwarmen of afkoelen van een vloeistof meten t.o.v. twee verschillende temperatuurschalen (° Celsius en Fahrenheit)

- **Omgekeerd evenredig verband:**
 - Verband tussen de lichtsterkte en de afstand t.ov. de lichtbron.
 - Verband tussen volume en druk van een gas (de wet van Boyle-Mariotte).

- **Exponentieel verband en asymptotisch gedrag**
 - Het opladen en het ontladen van een condensator.
 - Het opwarmen of afkoelen van een vloeistof.

- **Kwadratisch verband**
 - De afstand bepalen van een wagentje rijdend van een hellend vlak.

- **Periodiek verband**
 - De lichtintensiteit bepalen van een fluorescentie lamp (TL-lamp)
 - De slingerbeweging

In het kader van de nieuwe leerplannen, de vrije ruimte en de nieuwe pedagogische visies, wil dit cahier een aantal suggesties aanreiken om:

- de leerlingen aan te zetten tot zelfstandig werken,
- vanuit praktische toepassingen en vanuit concreet cijfermateriaal door de leerlingen verkregen, te komen tot de studie van periodieke, exponentiële en kwadratische verbanden,
- de kritische geest en de onderzoeksvaardigheden van de leerlingen aan te spreken,
- de samenwerking tussen de vakken wiskunde en fysica te versterken, waardoor de leerling moet afstappen om alles in vakjes te bekijken,
- sociale vaardigheden aan te leren

Er worden hierbij twee concrete situaties uitgewerkt: een botsende bal en trillingen. Eerst worden een aantal experimenten uitgevoerd om cijfermateriaal te verzamelen, waaruit dan het nodige verband wordt gehaald.

Op het einde worden een aantal suggesties gedaan om met andere praktische proeven andere functionele verbanden (modellen) te verwezenlijken.

DOMINIEK RAMBOER is leerkracht wiskunde en toegepaste fysica in de richtingen industriële wetenschappen en techniek wetenschappen (3de graad) aan het Vrij Technisch Instituut te Oostende. Daarnaast is hij ook lector financiële algebra, informatica en statistiek in de opleiding Graduaat Boekhouden-Fiscaliteit in het volwassenenonderwijs. Hij is ook sinds een aantal jaren medewerker van T³ Vlaanderen, lid van de leerplancommissie wiskunde TSO 2de en 3de graad en lid van de stuurgroep wiskunde voor de provincie West-Vlaanderen. Hij is ook werkzaam als recensent van handboeken wiskunde secundair onderwijs voor het tijdschrift Nova et Vetera van het VKSO.

© 2005 Deze cahier is bedoeld als lesmateriaal, mag hiervoor vrij gekopieerd worden en kan gedownload worden via de website www.t3vlaanderen.be.