

Thema: Zykloide

Franz Schlöglhofer

☒ TI-Nspire™ CAS

Schlagworte: Parameterdarstellung einer Kurve, sin, cos, Parameterdarstellung eines Kreises, Darstellen von Graphen, Beschreibung von Kurven

Unterrichtsmaterial

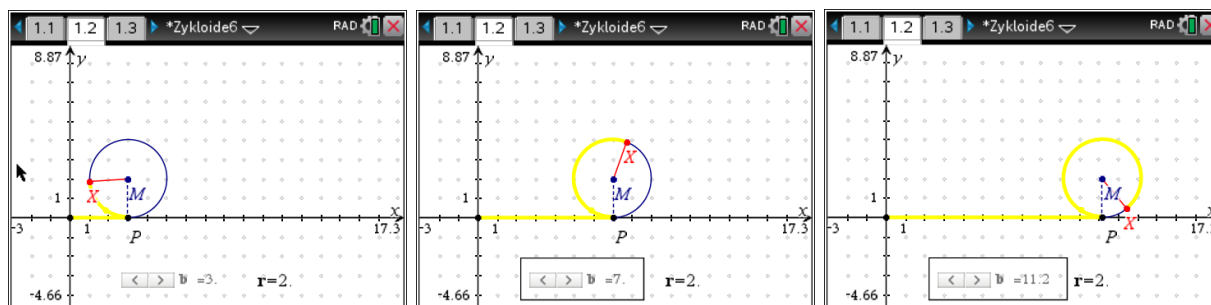
Bearbeite die folgenden Grundlagen für die Darstellung einer Zykloide und behandle bzw. löse die damit verbundenen Aufgaben.

Aufgabenstellung:

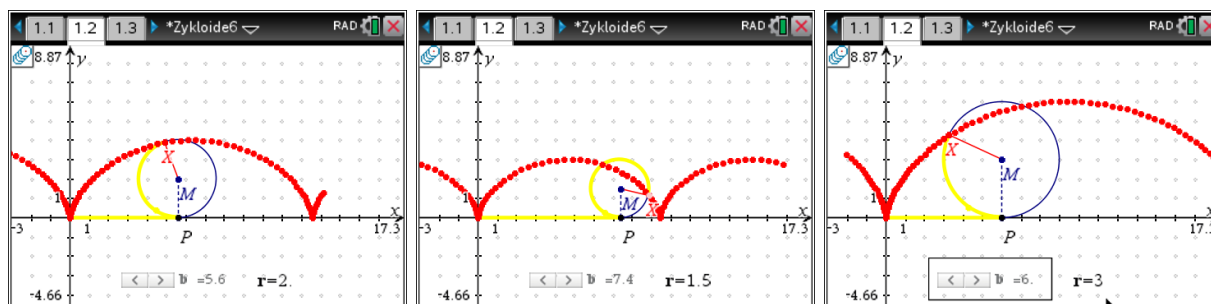
1. Ein Kreis läuft entlang der x-Achse. Beschreibung der Bewegung eines Punktes der Kreislinie

In den folgenden Abbildungen läuft ein Kreis mit dem Radius r auf der x-Achse ab. Wir betrachten die Bewegung des Punktes X auf der Kreislinie genauer. Die Länge des Kreisbogens XP entspricht der x – Koordinate des Mittelpunktes M (gelbe Linien). Die Länge des zurückgelegten Weges und damit die Lage des Kreises wird durch den Schieberegler geregelt.

Verwende die fertige Datei (Fenster 1.2) und experimentiere damit.



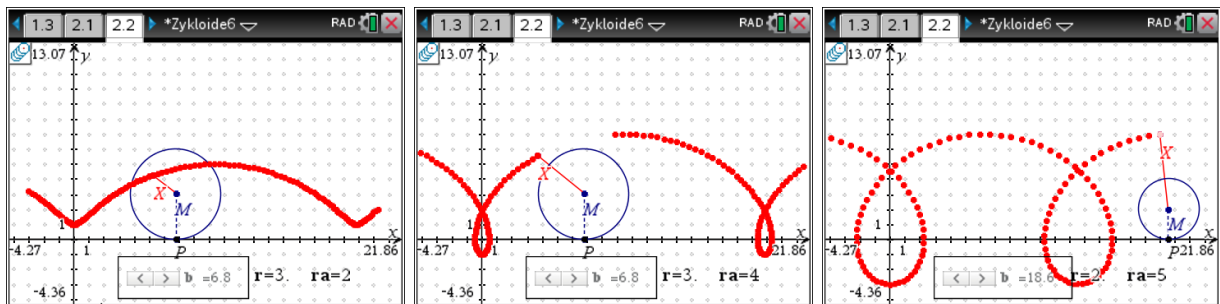
Mit Geometriespur und dem animierten Schieberegler erhält man die folgenden Zykloiden mit verschiedenen Kreisradien.



- (a) Gib für jede Zykloide die höchsten Punkte der Kurve, die Minima und die Länge einer Periode an. Gib die Ergebnisse auch allgemein an.

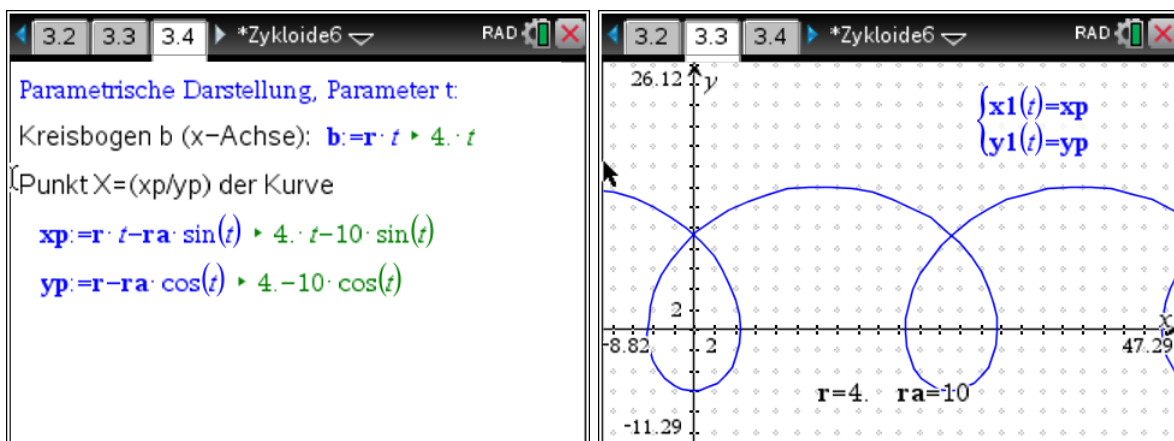
Im Folgenden kann der Punkt auf der durch den Kreis bestimmten Ebene auch innerhalb oder außerhalb der Kreislinie liegen. Der Abstand des Punktes X vom Mittelpunkt des Kreises betrage ra .

- (b) Hier wird für den dargestellten Punkt X der Radius ra gewählt. Dabei kann ra kleiner, gleich oder größer als r gewählt werden. In der Abbildung können verschiedene Fälle unterschieden werden. Welche Unterschiede gibt es? Gib wie vorhin Maxima, Minima und Periodenlänge an. Experimentiere mit der zugehörigen NSPIRE-Datei (Fenster 2.2)



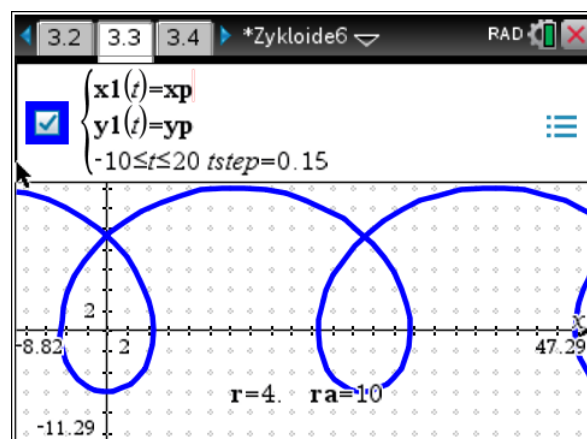
2. Parameterdarstellung der Zykloide

Einfacher ist die Darstellung in Parameterform wie in den folgenden beiden Abbildungen.



- (c) Gib die Formel für die Parameterdarstellung in NSPIRE ein und versuche, die nebenstehende Abbildung zu erhalten.

- (d) Stelle die bisher verwendeten Zykloiden mit Hilfe der Parameterform dar.



- (e) Wie erhält man die Formel der Parameterform? Versuche eine Herleitung der Formel zu finden. Verwende als Quelle das Schulbuch oder Inhalte im Internet.
- (f) Wie lautet die parametrische Formel für den ersten Aufgabenteil (a)?

✂-----

Vorschlag zur Umsetzung

- (a) Periodenlänge: $r \cdot 2\pi$, Maxima: $(r \cdot \pi/2 \cdot r)$, Minima $(0/0)$. Maxima und Minima wiederholen sich mit der Periodenlänge.
- (b) Periodenlänge: $r \cdot 2\pi$, Maxima: $(r \cdot \pi / r + ra)$, Minima $(0/r - ra)$. Maxima und Minima wiederholen sich mit der Periodenlänge. Eine „Schleife“ gibt es, wenn $ra > r$.
- (c) (d) Verwende die fertige Datei.
- (d) $X(t) = (r \cdot t - ra \cdot \sin(t) / r - ra \cdot \cos(t))$
Dabei gibt der erste Teil $(r \cdot t /)$ die gleichförmige Bewegung des Kreismittelpunktes. Der zweite Teil $(ra \cdot \sin(t) / ra \cdot \cos())$ entspricht einer Kreisbewegung. Der Punkt der Kreisfläche bewegt sich auf einer Kreislinie, die gegenüber der üblichen Kreisdarstellung bezüglich der Richtung geändert wurde.

Technologiehilfe

Die Aufgabenstellung besteht aus den beiden Teilen

- 1. Ein Kreis läuft auf der x-Achse. Beschreibung der Bewegung eines Punktes der Kreislinie**
- 2. Parameterdarstellung der Zykloide**

1.: Es wird versucht, den Ablauf des Kreises auf der x-Achse darzustellen. Man kann die fertige Datei mit den angegebenen Fenstern verwenden. An der Stelle ist es nicht notwendig und vorgeesehen, die Formel zu überlegen. Durch die Anschauung sollte eine formelmäßige Beschreibung vorbereitet werden.

2.: Die Parameterdarstellung der Kurve soll hergeleitet und eingegeben werden und damit die Kurven eigenständig dargestellt werden.