Thema: (Standard–) Normalverteilung mit normCdf

Gertrud Aumayr, Martha Löffler und Christian Zöpfl ☒ TI-Nspire™ CAS

Schlagworte: Berechnungen von Wahrscheinlichkeiten, Intervallgrenzen, Erwartungswert und Standardabweichung mit *normCdf*

Unterrichtsmaterial:

Aufgabe/Arbeitsauftrag:.
Der Umfang von Fußbällen der Firma *SUPERBALL* ist normalverteilt mit dem Erwartungswert μ = 69 cm und der Standardabweichung σ = 0,5 cm.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt ein zufällig ausgewählter Fußball in dem von der FIFA geforderten Umfangsbereich von mindestens 68,5 cm und höchstens 70 cm?

b) Wie viel Prozent der produzierten Fußbälle haben einen Umfang von mehr als 70 cm?

c) Stelle den Graphen der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der normalverteilten Zufallsvariable „Umfang des Fußballs“ dar und kennzeichne die unter a) und b) berechneten Wahrscheinlichkeiten.

d) Unter welchem Wert liegt der Umfang von 5% aller von *SUPERBALL* produzierten Bälle dieser Charge?

e) In welchem symmetrischen Intervall um den Erwartungswert μ liegt der Umfang eines Balles mit einer Wahrscheinlichkeit von 80%?

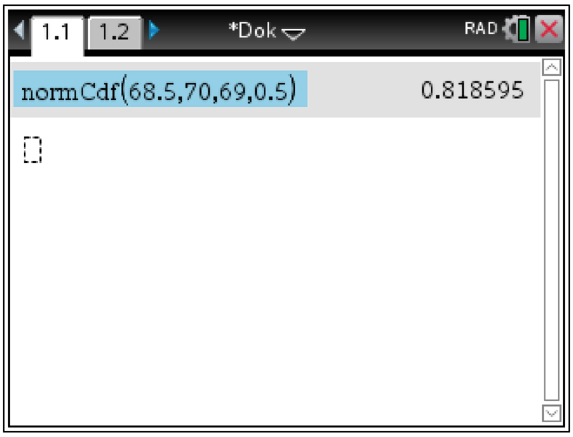
f) Welche Standardabweichung müsste die Produktion besitzen, damit 99% der Fußbälle im geforderten Intervall [68,5; 70] liegen?

Didaktischer Kommentar:

Bei der Berechnung mit dem Befehl *normCdf* soll das Bild der Glockenkurve immer wieder in Erinnerung gerufen werden. So kann erkannt werden, dass die Berechnung der Grenzen, des Erwartungswertes oder der Standardabweichung nicht trivial erfolgen kann, da dazu das Lösen einer Integralgleichung nötig ist. So kann es auch vorkommen, dass bei manchen Aufgabenstellungen der Befehl *solve* keine Lösung liefert. Es muss dann *nsolve* mit einem geeigneten Startwert verwendet werden. An dieser Stelle kann ergänzend die Bedeutung von näherungsweisen Lösungsverfahren diskutiert werden.

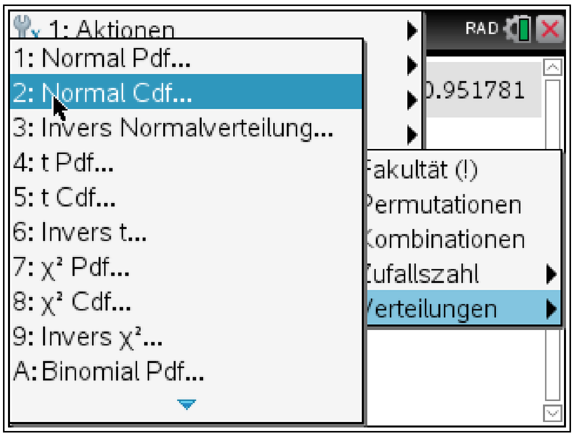
Vorschlag zur Umsetzung:

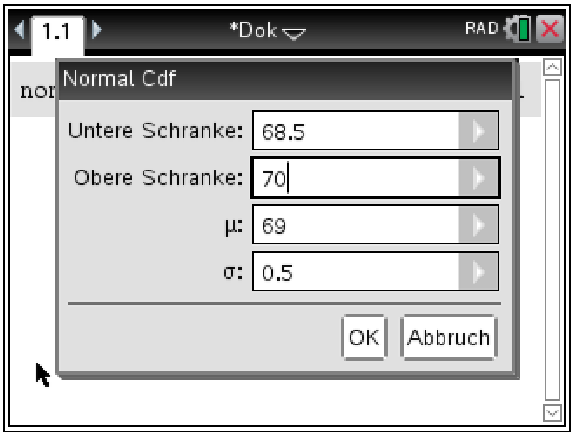
ad a) Der Befehl normCdf berechnet die Wahrscheinlichkeit einer normal–verteilten Zufallsvariablen mit dem Erwartungswert μ und der Standard–abweichung σ zwischen den Grenzen x_{unten} und x_{oben}.



Die Syntax lautet dabei
***normCdf*(** x_{unten}**,** x_{oben}**,** μ**,** σ**)**

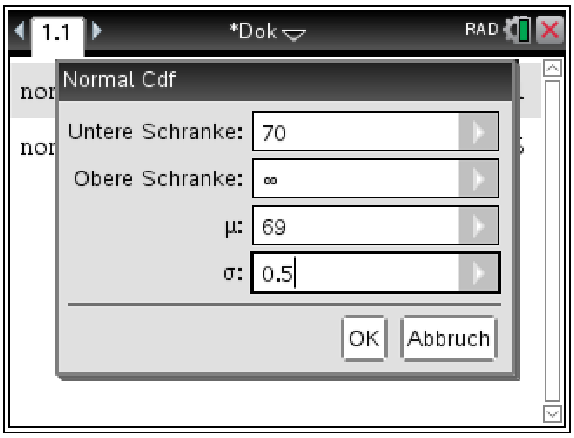
Obwohl der Befehl natürlich auch direkt eingegeben werden kann, lohnt hier häufig die Verwendung des Assistenten, der über den Menüpunkt *Wahrscheinlichkeit → Verteilungen → NormalCdf...* aufgerufen werden kann.

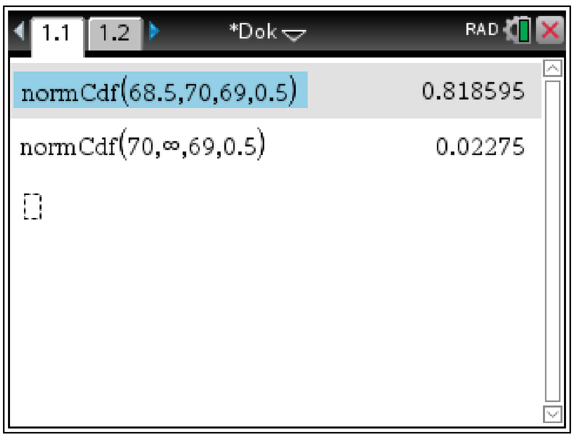




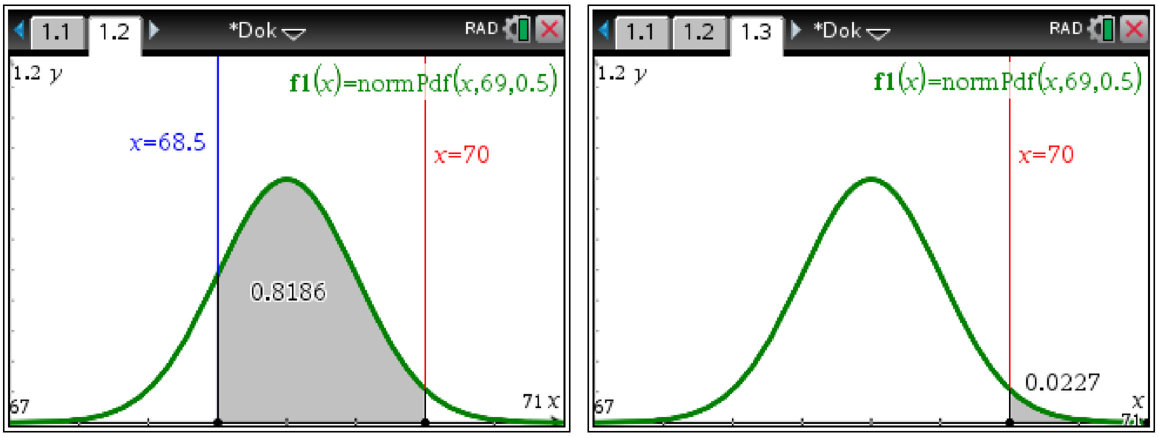
Wie beim TI Nspire üblich, wird das Ergebnis als Wahrscheinlichkeitswert im Intervall [0; 1] ausgegeben. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Fußball aus der beschriebenen Charge im Bereich zwischen 68,5 cm und 70 cm liegt beträgt **81,86 Prozent**.

ad b) Der Befehl normCdf lässt als Intervallgrenzen auch -∞ bzw. ∞ zu.
In diesem Beispiel ist die obere Grenze ∞.
normCdf(70,∞,69,0.5)=0.02275, also **2,28 Prozent**.

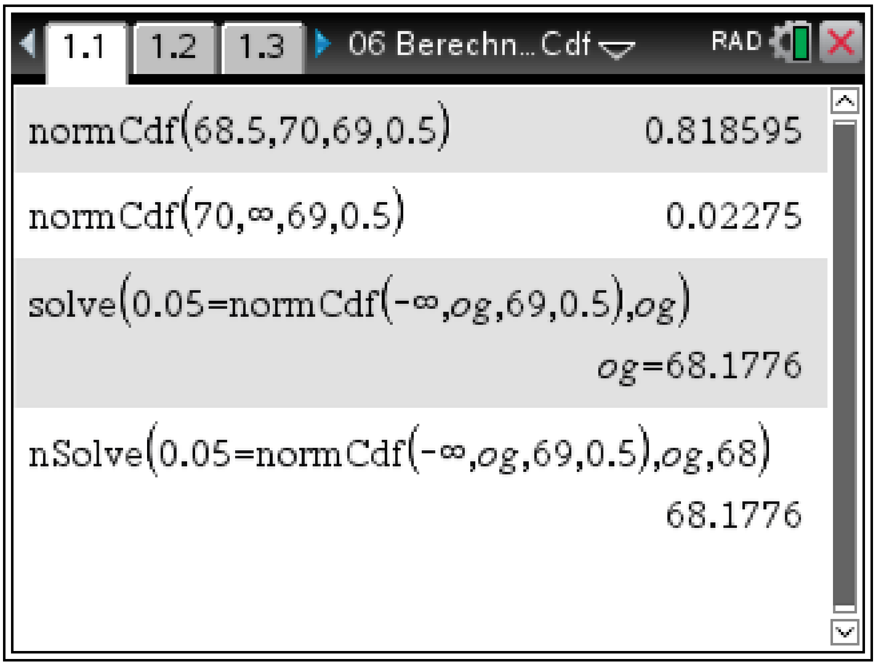




ad c) Die Wahrscheinlichkeiten entsprechen den Flächeninhalten unter der Kurve der Wahrscheinlichkeits**dichte**funktion in den angegebenen Intervallen.

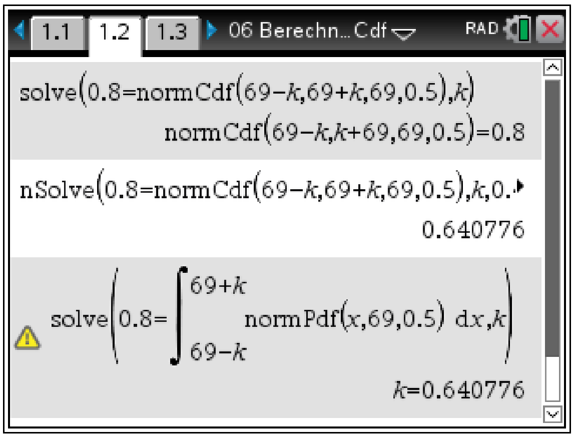


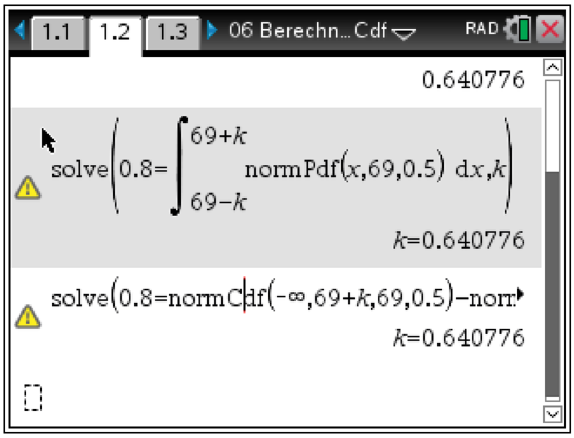
ad d) In diesem Fall lassen sich sowohl die Befehle solve als auch nsolve verwenden und führen zu sehr ähnlichen Ergebnissen.
5 Prozent der Bälle aus dieser Charge liegen also **unter 68,18 cm**.



ad e) Die Berechnung des symmetrischen Bereich $\mu - k$ bis $\mu + k$ kann wie oben erwähnt mittels solve oder mit nsolve erfolgen. Bei der Verwendung des solve–Befehls muss dabei entweder auf die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion normPdf oder einen kleinen Trick in der Eingabe zurückgegriffen werden.
Der „Trick“ besteht darin, die untere Grenze mit -∞ festzulegen und nur die obere Grenze mit $\mu - k$ bzw. $\mu + k$ zu variieren.

solve(normCdf(-∞,69+k,69,0.5)-*normCdf*(-∞,69-k,69,0.3)=*0.8,k)*.

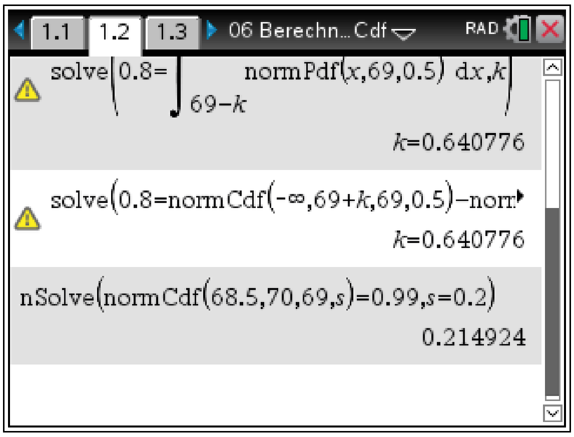




Der gesuchte um den Erwartungswert symmetrische Bereich des Ballumfangs erstreckt sich also von 69 – 0,64 = **68,36 cm** bis 69 + 0,64 = **69,64 cm**.
80 Prozent der Bälle liegen daher im Intervall [68,36; 69,64]

ad f) Hier wird für die gesuchte Standardabweichung ein nsolve–Befehl eingesetzt.

nsolve(normCdf(68.5,70,69,s)=0.99,s=0.2)



Die Standardabweichung dürfte also höchstens σ=0,215 cm betragen, damit 99 Prozent aller Fußbälle im angegebenen Intervall liegen.