Thema: Konfidenzintervalle, weitere Beispiele

Gertrud Aumayr, Christian Zöpfl

☒ TI-Nspire™ CAS

Schlagworte: Analyse von Stichproben, Konfidenzintervall, Vertrauensbereich

Unterrichtsmaterial:

Aufgabe/Arbeitsauftrag:

Beispiel 1: ***Konfidenzintervalle berechnen – Schwankungsbreite***
Aufgabe aus TI-Nachrichten Heft 2/2006 von F. Tinhof

Eine Meinungsumfrage der Wochenzeitung „Bezirksblatt“ vom März 2005, ein halbes Jahr vor der Landtagswahl im Burgenland (Stichprobenumfang 402) ergab die Umfrageergebnisse:

SPÖ 55 %	ÖVP 35%	FPÖ 5 %	Grüne 5%

a) Bestimme Konfidenzintervalle für den Stimmenanteil der vier Parteien bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5 Prozent und vergleiche mit den tatsächlichen Ergebnissen der Wahl.

SPÖ 52,2 %	ÖVP 36,3%	FPÖ 5,8 %	Grüne 5,2%

b) Zeichne in einem Diagramm die Schwankungsbreite des Konfidenzintervalls in Abhängigkeit von der Wahrscheinlichkeit p für n=100, 500, 1.000, 10.000 und interpretiere die Ergebnisse.

Beispiel 2: ***Konfidenzellipse***

Aufgabe aus TI-Nachrichten Heft 1/2011 von S. Weiß

Um die Wirksamkeit eines neuen Medikamentes zu testen, wurde eine Studie durchgeführt. Dabei gaben 80 von 100 Testpersonen an, dass der gewünschte Erfolg eingetreten ist. Bestimme die Wahrscheinlichkeiten p, die mit dem Stichprobenergebnis k = 80 verträglich sind (bei einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95%)

a) Führe zunächst eine Punktschätzung für p durch.

b) Gehe zunächst von der Grundgesamtheit aus. Berechne für mögliche Wahrscheinlichkeiten p=2%, p=4%, p=6%, ...p=98% der Grundgesamtheit die jeweiligen 1.96σ – Umgebungen in der Stichprobe. Veranschauliche die Ergebnisse in einem Diagramm, indem auf der x – Achse die möglichen Wahrscheinlichkeiten aufgetragen werden und in y - Richtung zu jedem p das entsprechende Vertrauensintervall.

c) Beschreibe den Rand dieser Vertrauensintervalle mit Hilfe einer Funktion.

d) Bestimme nun die Wahrscheinlichkeiten p, die mit dem Stichprobenergebnis k = 80 verträglich sind (bei einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95%)
- durch Ablesen aus der Graphik
- durch Rechnung

e) Wie verändert sich die in Punkt ***c*** erhaltene Konfidenzellipse bzw. das Ergebnis, wenn statt einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95 % eine Sicherheit von 99 % verwendet wird (2,585σ)?

Beispiel 3: ***Mindestumfang einer Stichprobe – der 95 % Trichter***

Wie groß ist der Stichprobenumfang zu wählen, damit der Anteil in der Gesamtheit mit einer gewissen Genauigkeit (etwa auf 3 Prozentpunkte genau) geschätzt werden kann?

Gemeint ist damit, dass der Anteil $\frac{X}{n}$ *in der Stichprobe sich um höchstens 3 Prozentpunkte vom Anteil p in der Gesamtheit unterscheiden soll also*
$\left|p-\frac{X}{n}\right| \leq 0.03$.

Eine solche Genauigkeit kann natürlich nicht garantiert werden, sondern ist nur mit einer gewissen Sicherheitswahrscheinlichkeit (etwa 95 %) einzuhalten.

Bei der Befragung über die Ausstattung von Haushalten will man die Ergebnisse auf 3 Prozentpunkte genau haben. Von einer früheren Pilotstudie weiß man, dass ungefähr 40 % der zu untersuchenden Haushalte mit einem Tablet ausgestattet sind. Welcher Stichprobenumfang n ist für eine erneute Befragung notwendig?

a) Berechne zu möglichen Stichprobenanzahlen n den Radius der $1.96\frac{\sigma}{n}$ - Umgebung. Veranschauliche die Ergebnisse in einem Diagramm, indem auf der x – Achse die möglichen Stichprobenanzahlen aufgetragen werden und in y - Richtung zu jedem n die $1.96\frac{\sigma}{n}$ - Umgebung zu p.

b) Beschreibe den Rand dieser Vertrauensintervalle mit Hilfe einer Funktion.

c) Zeichne eine konstante Funktion gegeben durch f(x)=p und markiere eine 3 Prozentpunkte – Umgebung um p.

d) Bestimme, welcher Stichprobenumfang n für eine erneute Befragung notwendig ist?
- durch Ablesen aus der Graphik
- durch Rechnung

e) Zeichne in einem neuen Problem den 95 % Trichter mit variablem p unter Verwendung eines Schiebereglers und variablem Wert für die Genauigkeit g Prozentpunkte.

f) Wie verändern sich die Ergebnisse bei Änderung von p und bei Änderung von g?

Vorschlag zur Umsetzung:

Beispiel 1:

X ..... Wähler von Partei A in der Stichprobe
n = 402 .... Umfang der Stichprobe
c = 95 % ...... Niveau des Konfidenzintervalls / 5 % Irrtumswahrscheinlichkeit

	A	B umfrage	C	D untergr	E ogrenze	F	G wahl	H
=								
1	SPÖ...	0.55		0.501367	0.598633		0.522	
2	ÖVP...	0.35		0.303373	0.396627		0.363	
3	FPÖ	0.05		0.028695	0.071305		0.058	
4	Grün...	0.05		0.028695	0.071305		0.052	

$D1 = b1 - 1.96 \cdot \sqrt{\frac{b1 \cdot (1-b1)}{n}}$

zInterval_1Prop 221,402,0.95: *stat.results*

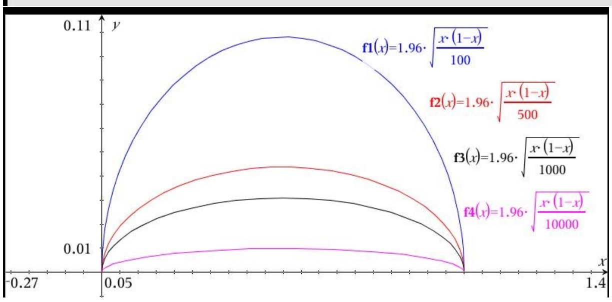
$$\begin{bmatrix} \text{"Title"} & \text{"1-Prop z Interval"} \\ \text{"CLower"} & 0.501117 \\ \text{"CUpper"} & 0.598386 \\ \text{"}\hat{p}\text{"} & 0.549751 \\ \text{"ME"} & 0.048634 \\ \text{"n"} & 402. \end{bmatrix}$$

zInterval_1Prop 141,402,0.95: *stat.results*

$$\begin{bmatrix} \text{"Title"} & \text{"1-Prop z Interval"} \\ \text{"CLower"} & 0.304098 \\ \text{"CUpper"} & 0.397395 \\ \text{"}\hat{p}\text{"} & 0.350746 \\ \text{"ME"} & 0.046649 \\ \text{"n"} & 402. \end{bmatrix}$$

zInterval_1Prop 20,402,0.95: *stat.results*

$$\begin{bmatrix} \text{"Title"} & \text{"1-Prop z Interval"} \\ \text{"CLower"} & 0.028497 \\ \text{"CUpper"} & 0.071006 \\ \text{"}\hat{p}\text{"} & 0.049751 \\ \text{"ME"} & 0.021255 \\ \text{"n"} & 402. \end{bmatrix}$$



Die Darstellung der Schwankungsbreite zeigt eindrucksvoll, dass mit zunehmendem Stichprobenumfang der Einfluss des Schätzwertes für die Merkmalswahrscheinlichkeit kleiner wird. Bei einem Stichprobenumfang von n = 100 liegt an den Rändern die Schwankungsbreite bei ungefähr ±0.03 während sie bei der „ungünstigsten“ Merkmalswahrscheinlichkeit von x = 0,5 auf ±0.1 ansteigt. Wird hingegen eine Stichprobe von n = 10.000 gewählt, verschwindet der Einfluss von x fast, die Schwankungsbreite übersteigt ±0.01 nicht mehr.

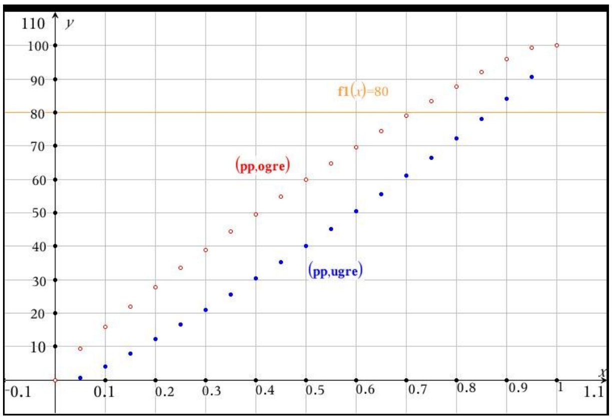
Vorschlag zur Umsetzung:

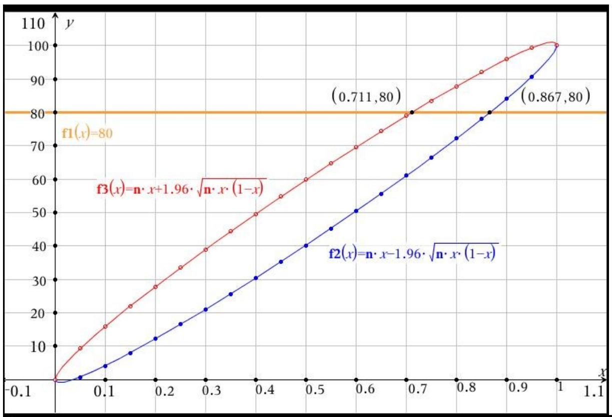
Beispiel 2:

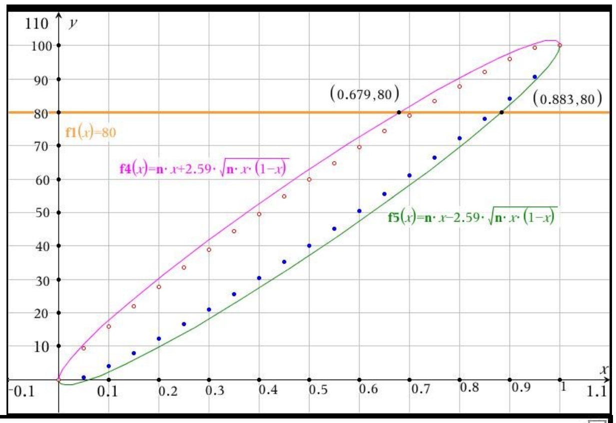
Punktschätzung: 80%

	A pp	B ugre	C ogre
=	=seq(ip,ip,0,1,0.05)	='n*pp−1.96*√('n*pp*(1−pp))	='n*pp+1.96*√('n*pp*(1−pp)
1	0	0.	0.
2	0.05	0.728279	9.27172
3	0.1	4.12	15.88
4	0.15	8.0014	21.9986
5	0.2	12.16	27.84
6	0.25	16.513	33.487
7	0.3	21.0182	38.9818
8	0.35	25.6514	44.3486
9	0.4	30.398	49.602
10	0.45	35.2491	54.7509
11	0.5	40.2	59.8
12	0.55	45.2491	64.7509

A pp







© Schnittpunkt der Konfidenzellipse mit dem Stichprobenergebnis

$\text{solve}\left(100\cdot x-1.96\cdot\sqrt{n\cdot x\cdot(1-x)}=80,x\right)$ $\quad x=0.866634$

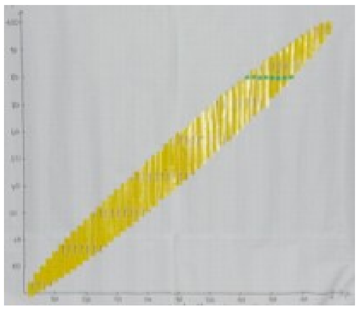
$\text{solve}\left(100\cdot x+1.96\cdot\sqrt{n\cdot x\cdot(1-x)}=80,x\right)$ $\quad x=0.711169$

© Mit 95 % iger Sicherheit liegt die Wahrscheinlichkeit in der Grundgesamtheit zwischen 71% und 87%

Didaktischer Hinweis:

Für das rechts abgebildete Plakat wurden arbeitsteilig die entsprechenden Berechnungen für p=2%, p=4%, p=6%, ...p=98% durchgeführt.

Die Schülerinnen und Schüler markierten auf (gelben) Papierlinealen aus dem Baumarkt jeweils µ und schnitten die Lineale millimetergenau an den Grenzen der Sigma–Umgebung durch. *(TI-Nachrichten Heft 1/2011 von S. Weiß)*

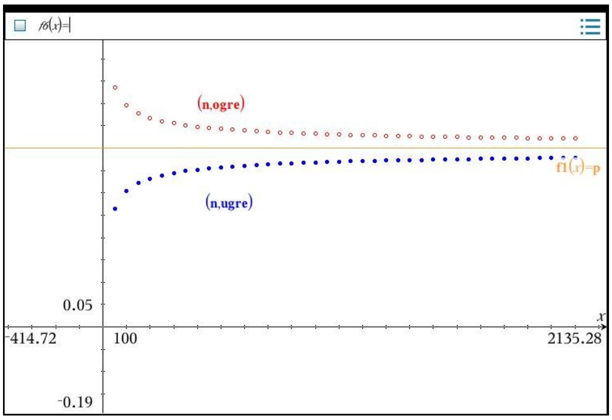


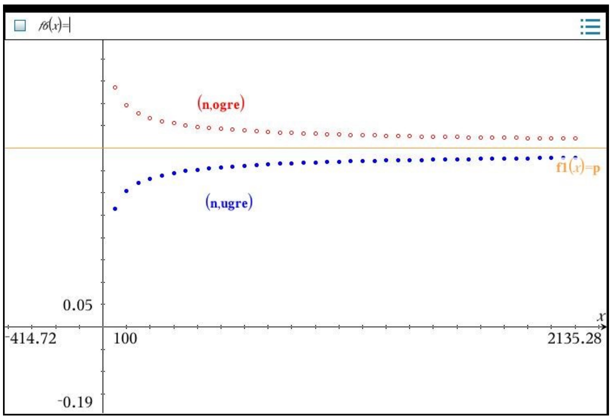
Vorschlag zur Umsetzung:

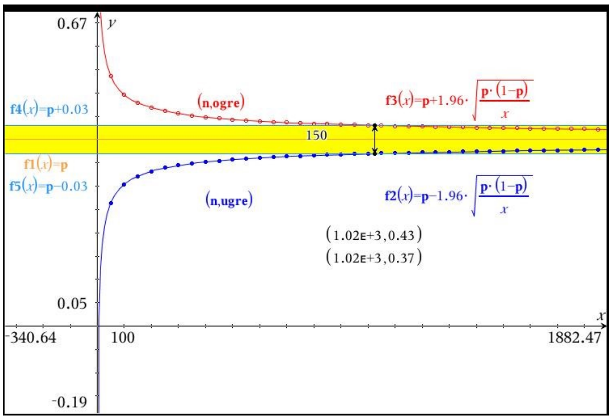
Beispiel 3:

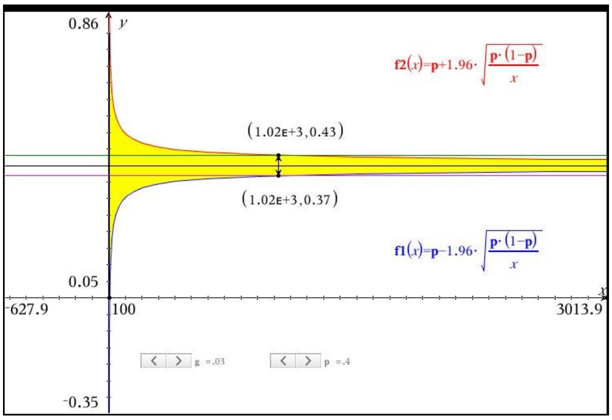
	A n	B ugre	C ogre	D
=	=seq(50*i,i,1,40)	='p−1.96* √ ('p*(1−'p)/'n)	='p+1.96* √ ('p*(1−'p)/('n))	
1	50	0.264207	0.535793	
2	100	0.30398	0.49602	
3	150	0.3216	0.4784	
4	200	0.332104	0.467896	
5	250	0.339272	0.460728	
6	300	0.344563	0.455437	
7	350	0.348675	0.451325	
8	400	0.35199	0.44801	
9	450	0.354736	0.445264	
10	500	0.357059	0.442941	
11	550	0.359057	0.440943	
12	600	0.3608	0.4392	

A1 =50









$\text{solve}\left(1.96\cdot\sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{x}}=0.03,x\right)$ $\quad x=1024.43$

Didaktischer Hinweis:

Inwieweit die Schüler und Schülerinnen die Files selber oder gemeinsam mit der Lehrperson entwickeln oder schwierigere Teile davon von der Lehrperson als Demonstration vorgestellt bekommen, hängt von vielen Faktoren ab: Zeit, Technologiekompetenz der Schüler und Schülerinnen und Umgang mit Technologie bis dahin.