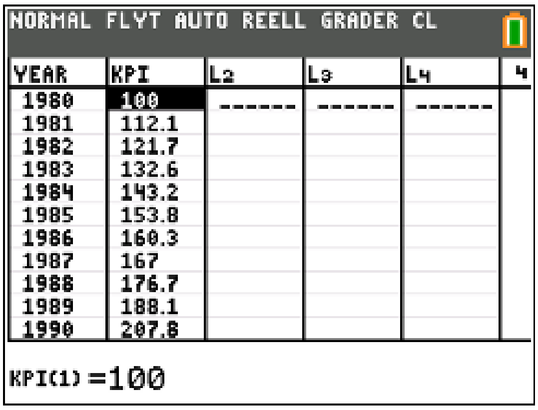
Exponentiell och annan utveckling -exempel med konsumentpriser

Konsumentprisindex (KPI) är det mest använda måttet för prisutveckling och används bland annat som inflationsmått. KPI avser att visa hur konsumentpriserna i genomsnitt utvecklar sig för hela den privata inhemska konsumtionen, de priser konsumenterna faktiskt betalar.

Förberedelse

Vi ska nu titta närmare på hur konsumentpriserna har utvecklat sig under en längre tidsperiod. Vi har kopierat data från SCB till programmet Excel och sedan överfört data från Excel till räknaren via gratisprogrammet TI Connect CE.

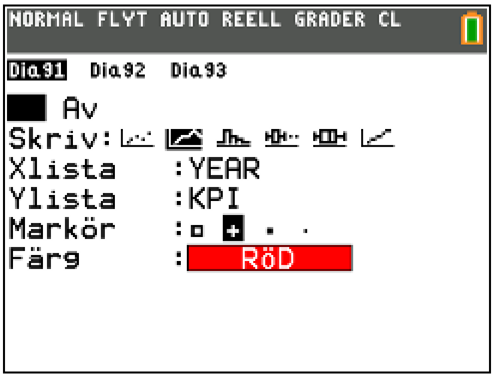


Om vi tittar på listorna så ser vi att index för år 1980 är 100 och 112,1 för år 1981. Det betyder att konsumentpriserna steg med 12,1 % mellan 1980 och 1981. Går vi längre ner i listorna ser vi att år 1990 var index 207,8. Det betyder att en genomsnittlig konsumentvara som kostade 100 kr år 1980 kostade 207,80 kr år 1990. Priset steg alltså med 107,80 kr eller 107,8 %.

Börja plotta diagram

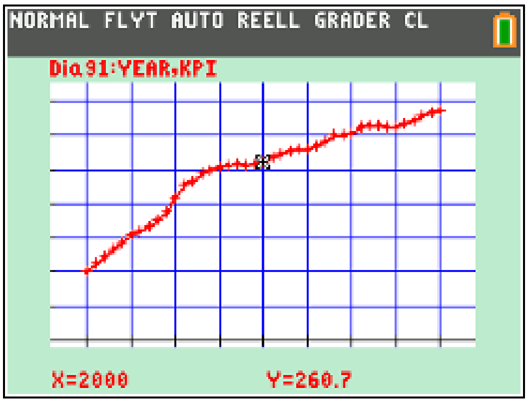
För att få en bra överblick över prisförändringarna börjar vi med att rita ett diagram.

Vi ska plotta en tidsserie och så här ser inställningarna ut för diagrammet. Se nästa spalt.



Vi ska alltså plotta ett linjediagram. För att ställa in vilka listor som ska vara X-lista resp. Y-lista så trycker du på [2nd][list] och väljer lista. Sedan väljer man markering för datapunkter och till sista färg.

Till sist ska man se till att man får ett bra fönster för sitt diagram. Under Window har vi ställt in Xmin=1976 Xmax=2024, Ymin -10 och Ymax =375. Dags att plotta.



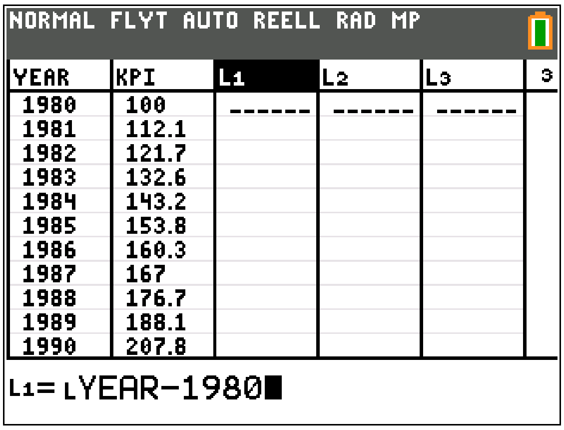
Hur skulle du kort beskriva prisutvecklingen under dessa år?

Verkar vara en ganska linjär ökning med vissa avsteg, speciellt runt 1990 då priserna steg kraftigt. Konsumentpriserna har stigit (335,92–100) % = 236 %.

Börja med beräkningar

När vi nu ska göra olika slags beräkningar på data så kan det vara lämpligt att välja ett start år 0 i beräkningarna. För att få en lista för YEAR som börjar från 0 så gör man så här:

Placera markören i kolumn L1, tryck på [enter] och skriv sedan på inmatningsraden enligt nedan. Du väljer listan L1 genom att trycka på [2nd][list] och väljer sedan rätt lista.

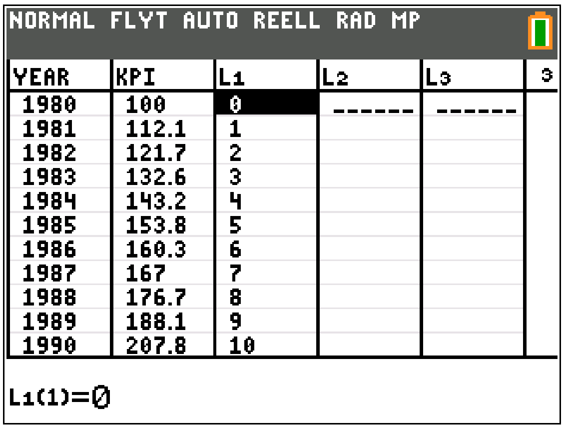


NORMAL FLYT AUTO REELL RAD MP

YEAR	KPI	L1	L2	L3
1980	100	------	------	------
1981	112.1			
1982	121.7			
1983	132.6			
1984	143.2			
1985	153.8			
1986	160.3			
1987	167			
1988	176.7			
1989	188.1			
1990	207.8			

L1= LYEAR-1980

Tryck nu på enter igen. Du får nu en ny lista med startvärdet 0.

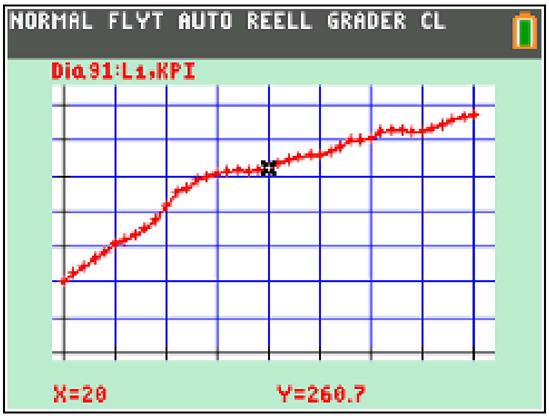


NORMAL FLYT AUTO REELL RAD MP

YEAR	KPI	L1	L2	L3
1980	100	0	------	------
1981	112.1	1		
1982	121.7	2		
1983	132.6	3		
1984	143.2	4		
1985	153.8	5		
1986	160.3	6		
1987	167	7		
1988	176.7	8		
1989	188.1	9		
1990	207.8	10		

L1(1)=0

Vi kan nu plotta om diagrammet på förra sidan med L1 som X-lista. Tänk på att ställa om minsta och största värde för X. Skriv in fönsterinställningarna Xmin=-1, Xmax=42.



Först ska vi göra några enkla beräkningar på *enstaka* värden där indexlistan är användbar:

En Big Mac kostade 12 kr 1980. Vad skulle den kosta 2020 om priset följt utvecklingen av KPI?

Index 1980 =100   Index 2020 =335,92

Förändringsfaktorn är då $\dfrac{335{,}92}{100}$

Priset 2020 blir då $12 \cdot \dfrac{335{,}92}{100} \approx 40{,}31$ kr

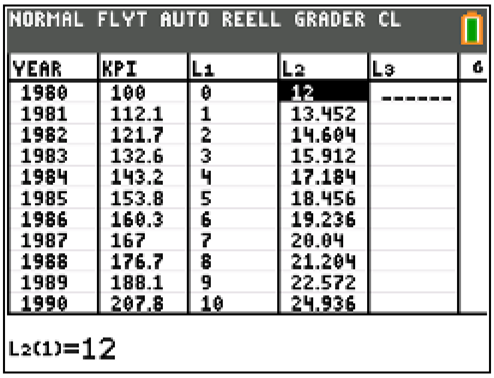
En Big Mac kostade 51,50 kr 2020 vad borde den då ha kostat 1980 om man jämför med KPI? Priset kommer ifrån Big Mac-index (se sv.Wikipedia.org/wiki/Big_Mac-index).

Nu får vi räkna åt andra hållet. Beräkningen blir

$$\frac{100}{335.92} \cdot 51{,}50 \approx 15{,}33 \text{ kr kr}$$

Sådana här beräkningar kan vi nu göra för alla år, inte bara för ett år i taget. Vi tittar nu på vad hamburgaren skulle ha kostat om den följt KPI under alla år. Vi utgår då från priset 12 kr 1980.

Formeln på inmatningsraden i L2 blir:
L2=12·KPI/100. Se resultat nedan.

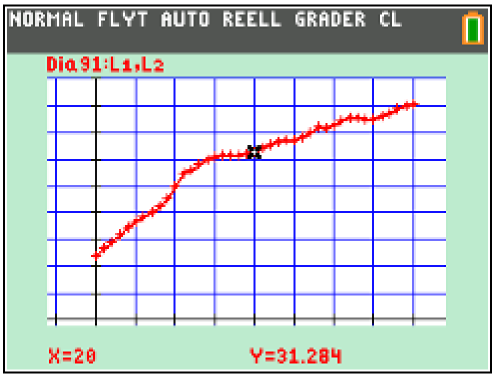


NORMAL FLYT AUTO REELL GRADER CL

YEAR	KPI	L1	L2	L3
1980	100	0	12	------
1981	112.1	1	13.452	
1982	121.7	2	14.604	
1983	132.6	3	15.912	
1984	143.2	4	17.184	
1985	153.8	5	18.456	
1986	160.3	6	19.236	
1987	167	7	20.04	
1988	176.7	8	21.204	
1989	188.1	9	22.572	
1990	207.8	10	24.936	

L2(1)=12

Nu kan vi plotta vad en Big Mac skulle ha kostat om den följt KPI. Se nästa sida.



Vi ser att hamburgaren skulle ha kostat ca 31 kr år 2000 om priset följt KPI.

I nästa diagram har vi även lagt in statistik för de verkliga priserna för en Big Mac för åren 1986 till 2020. Statistiken kommer från https://sv.wikipedia.org/wiki/Big_Mac-index.

Fortsatta beräkningar

Vi tänker oss nu en standardvara som kostade 100 kr år 1980 och nu vill vi veta vad hur mycket priset förändrades räknat i procent. Den relativa förändringen alltså.

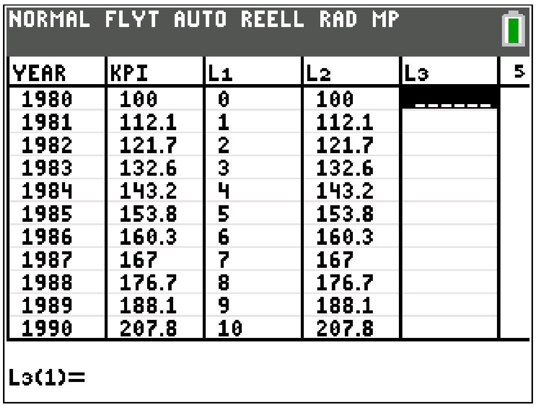
Vi tar ett exempel på ett enstaka värde:
År 2000 var index 260,7 och år 2001 267,1. Förändringsfaktorn var alltså

$$\frac{267{,}1}{260{,}7} \approx 1{,}025$$

Priset ökade med $(1{,}025-1)\cdot 100 = 2{,}5$ %

Nu ska vi göra detta så att vi ser den procentuella förändringen år för år.

Börja med att kopiera listan KPI till den tomma listan L2. Placera då markören i kolumnhuvudet i L2, tryck på [2nd][list] för att välja lista och välj sedan ʟKPI och tryck på [enter].

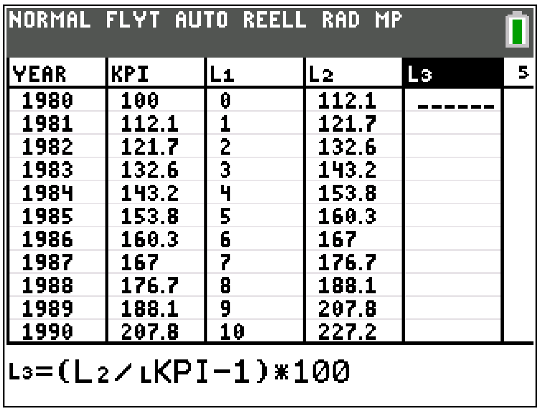

NORMAL FLYT AUTO REELL RAD MP

YEAR	KPI	L_1	L_2	L_3
1980	100	0	100	------
1981	112.1	1	112.1	
1982	121.7	2	121.7	
1983	132.6	3	132.6	
1984	143.2	4	143.2	
1985	153.8	5	153.8	
1986	160.3	6	160.3	
1987	167	7	167	
1988	176.7	8	176.7	
1989	188.1	9	188.1	
1990	207.8	10	207.8	

$L_3(1)=$

Ta nu bort 100 i lista L2 genom att placera markören där och trycka på [del]. Gör likadant med sista raden (313,35) i listan KPI. Listorna måste ju vara lika långa om vi ska kunna göra beräkningar.

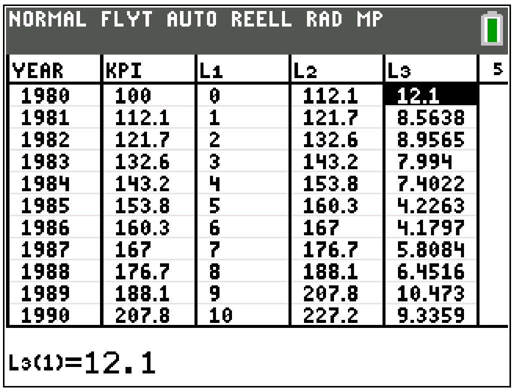
Gå till kolumnhuvudet i L3 och skriv nu där på inmatningsraden enligt nedan:


NORMAL FLYT AUTO REELL RAD MP

YEAR	KPI	L_1	L_2	L_3
1980	100	0	112.1	------
1981	112.1	1	121.7	
1982	121.7	2	132.6	
1983	132.6	3	143.2	
1984	143.2	4	153.8	
1985	153.8	5	160.3	
1986	160.3	6	167	
1987	167	7	176.7	
1988	176.7	8	188.1	
1989	188.1	9	207.8	
1990	207.8	10	227.2	

$L_3=(L_2/ʟKPI-1)*100$

Tryck nu på [enter]. Nu får vi de procentuella ändringarna år för år.

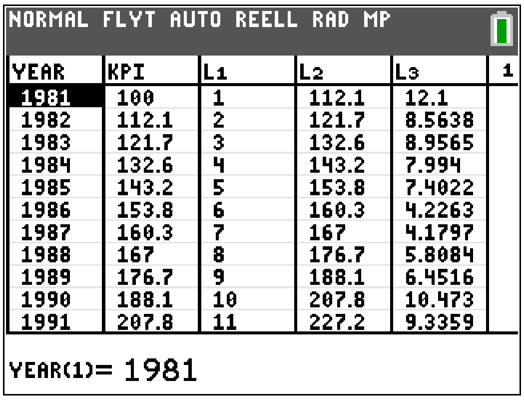

NORMAL FLYT AUTO REELL RAD MP

YEAR	KPI	L_1	L_2	L_3
1980	100	0	112.1	12.1
1981	112.1	1	121.7	8.5638
1982	121.7	2	132.6	8.9565
1983	132.6	3	143.2	7.994
1984	143.2	4	153.8	7.4022
1985	153.8	5	160.3	4.2263
1986	160.3	6	167	4.1797
1987	167	7	176.7	5.8084
1988	176.7	8	188.1	6.4516
1989	188.1	9	207.8	10.473
1990	207.8	10	227.2	9.3359

$L_3(1)=12.1$

Nu får vi den procentuella förändringen beräknad från 1981 och framåt. För att göra listorna för årtal och år korrekta så tar vi bort första raden i listorna YEAR och L1.

Då ser skärmen ut så här:

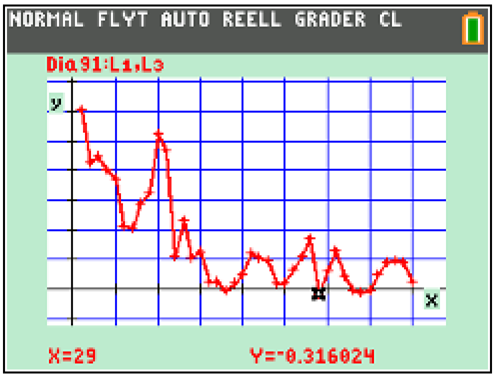

NORMAL FLYT AUTO REELL RAD MP

YEAR	KPI	L_1	L_2	L_3
1981	100	1	112.1	12.1
1982	112.1	2	121.7	8.5638
1983	121.7	3	132.6	8.9565
1984	132.6	4	143.2	7.994
1985	143.2	5	153.8	7.4022
1986	153.8	6	160.3	4.2263
1987	160.3	7	167	4.1797
1988	167	8	176.7	5.8084
1989	176.7	9	188.1	6.4516
1990	188.1	10	207.8	10.473
1991	207.8	11	227.2	9.3359

YEAR(1)= 1981

Nu kan vi plotta den procentuella förändringen (jämfört med föregående år). Våra listor är då L1 som X-lista och L3 som Y-lista.

Med en bra inställning av fönstervärden ser det ut så här:



Vi har värden som varierar mellan 12 % och - 0,31 %. En negativ förändring alltså.

I de exempel och uppgifter som finns i läroböckerna så är oftast mer idealiserade data och den procentuella förändringen för varje år är konstant.

Man kan fråga sig vilken procentuell förändring man ska ha varje år för att KPI ska stiga från 100 till 335,92 på 40 år.

Vi kan nu ställa upp en ekvation:

$$335{,}92 = 100 \cdot x^{40}$$

Där x är förrändringsfaktorn

Vi får nu efter förenkling

$$3{,}3592 = x^{40}$$

$$(3{,}3592)^{\frac{1}{40}} = (x^{40})^{\frac{1}{40}}$$

$$1{,}0308 \approx x$$

Vi kan alltså skriva index x år efter 1980 som

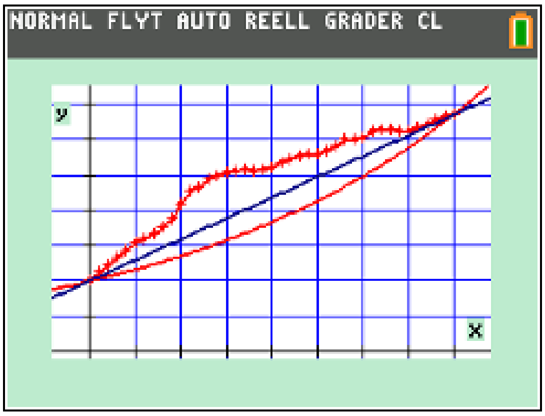
$$y = 100 \cdot 1{,}0308^{x}$$

Om vi antar att förändringen i stället är *linjär* kan vi skriva den som

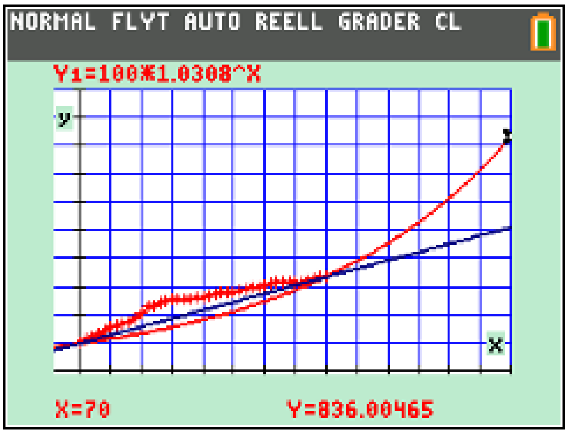
$$y = 100 + \frac{235{,}92}{40} \cdot x$$

eftersom indexet stiger från 100 till 335,92 (förändringen =213,35) och genom att dividera med 40 får vi den årliga förändringen. Den årliga förändringen skulle då bli ca 5,90.

Vi plottar dessa funktioner samtidigt som vi har plottningen av data. Man ser att alla tre plottningarna startar och slutar i samma punkt.



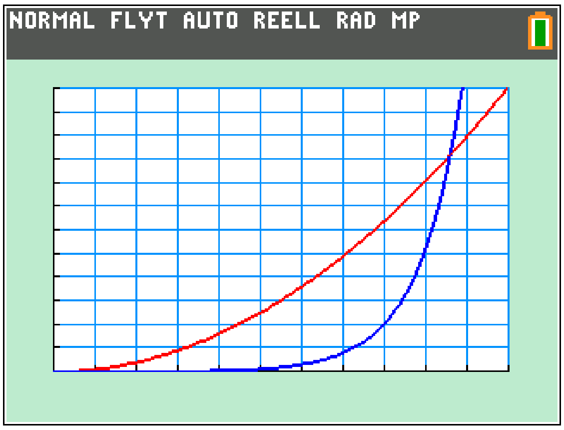
Om man drar ut x-axeln 30 år (fram till år 2050) ser det ut så här:



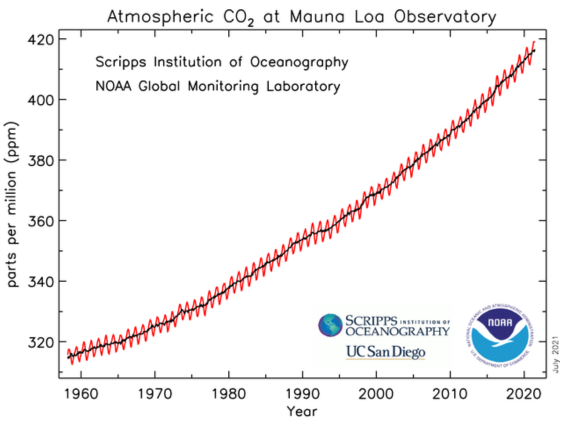
Vi ser att den blå *linjära* förändringskurvan fram till år 2015 ligger under den röda *exponentialkurvan* men sedan drar den röda iväg och växer snabbt ifrån den blå. På lång sikt växer exponentialfunktioner ifrån alla linjära och kvadratiska funktioner. Ibland kan exponentiella modeller växa obehagligt snabbt.

Ta t. ex den kvadratiska funktionen $y = x^2$. Den växer snabbt. När x = 10 är y = 100.
Ta nu den beskedliga exponentialfunktionen $y = 1.1^x$. När x = 10 är y *bara* ca 2.6. När hinner den i kapp?

Vi plottar båda funktionerna.



Plotta nu funktionerna i ett lämpligt koordinatsystem och beräkna grafiskt/numeriskt när funktionerna har samma värde.



Ett annat exempel: atmosfärens halt av koldioxid (i ppm) växer idag med ungefär 0,6 % på ett år. Idag 2021 är halten ca 420 ppm. Hur lång tid skulle det ta att få en fördubbling om ökningen fortsätter i samma takt.