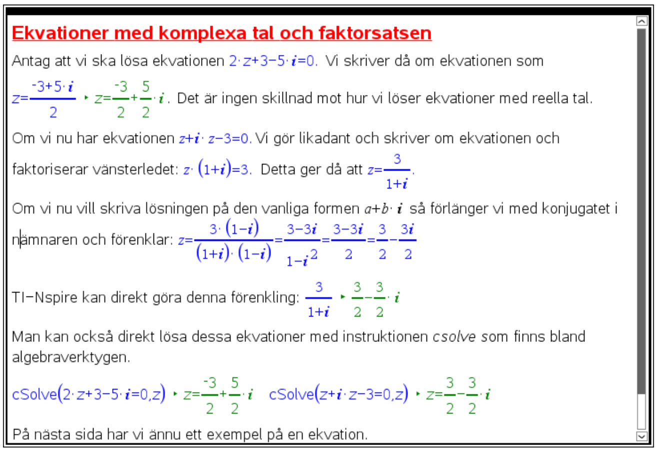
Ekvationer med komplexa tal och faktorsatsen

Detta är den andra delen av aktiviteter om komplexa tal. I den första delen behandlade vi komplexa tal från grunden, bland annat räkneoperationer och hur komplexa tal kan representeras med punkter och vektorer i ett komplext talplan. Vi visade detta både för tal både i rektangulär och polär form.

Sid 1:

Nu fortsätter vi med hur man kan lösa ekvationer och börjar med förstagradsekvationer. Man utnyttjar då bland annat knepet att förlänga med konjugatet om man har en faktor med en komplex del i nämnaren.



Ekvationer med komplexa tal och faktorsatsen

Antag att vi ska lösa ekvationen $2\cdot z+3-5\cdot i=0$. Vi skriver då om ekvationen som $z=\frac{-3+5\cdot i}{2}$ ▸ $z=\frac{-3}{2}+\frac{5}{2}\cdot i$. Det är ingen skillnad mot hur vi löser ekvationer med reella tal.

Om vi nu har ekvationen $z+i\cdot z-3=0$. Vi gör likadant och skriver om ekvationen och faktoriserar vänsterledet: $z\cdot(1+i)=3$. Detta ger då att $z=\frac{3}{1+i}$.

Om vi nu vill skriva lösningen på den vanliga formen $a+b\cdot i$ så förlänger vi med konjugatet i nämnaren och förenklar: $z=\frac{3\cdot(1-i)}{(1+i)\cdot(1-i)}=\frac{3-3i}{1-i^2}=\frac{3-3i}{2}=\frac{3}{2}-\frac{3i}{2}$

TI-Nspire kan direkt göra denna förenkling: $\frac{3}{1+i}$ ▸ $\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\cdot i$

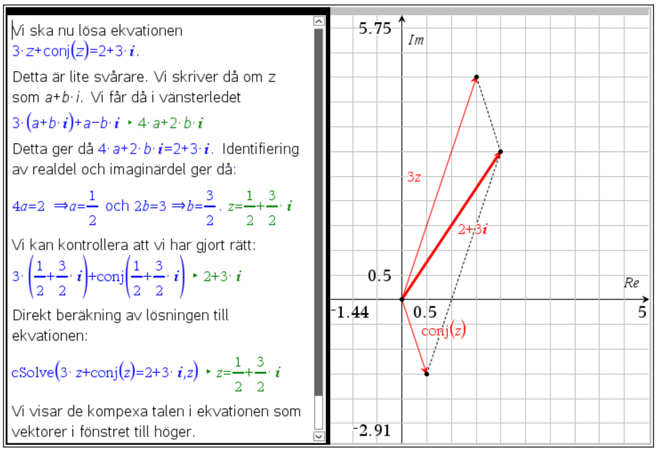
Man kan också direkt lösa dessa ekvationer med instruktionen *csolve* som finns bland algebraverktygen.

cSolve$(2\cdot z+3-5\cdot i=0,z)$ ▸ $z=\frac{-3}{2}+\frac{5}{2}\cdot i$ cSolve$(z+i\cdot z-3=0,z)$ ▸ $z=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\cdot i$

På nästa sida har vi ännu ett exempel på en ekvation.

Sid 2:

På sid 2 använder vi oss av identifiering av realdel och imaginärdel. Vi visar även hur de olika delarna i ekvationen kan representeras som vektorer och vektoradditionen för vänsterledet blir vektorn för högerledet.



Vi ska nu lösa ekvationen $3\cdot z+\text{conj}(z)=2+3\cdot i$.

Detta är lite svårare. Vi skriver då om z som $a+b\cdot i$. Vi får då i vänsterledet $3\cdot(a+b\cdot i)+a-b\cdot i$ ▸ $4\cdot a+2\cdot b\cdot i$

Detta ger då $4\cdot a+2\cdot b\cdot i=2+3\cdot i$. Identifiering av realdel och imaginärdel ger då:

$4a=2 \Rightarrow a=\frac{1}{2}$ och $2b=3 \Rightarrow b=\frac{3}{2}$. $z=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\cdot i$

Vi kan kontrollera att vi har gjort rätt:

$3\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\cdot i\right)+\text{conj}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\cdot i\right)$ ▸ $2+3\cdot i$

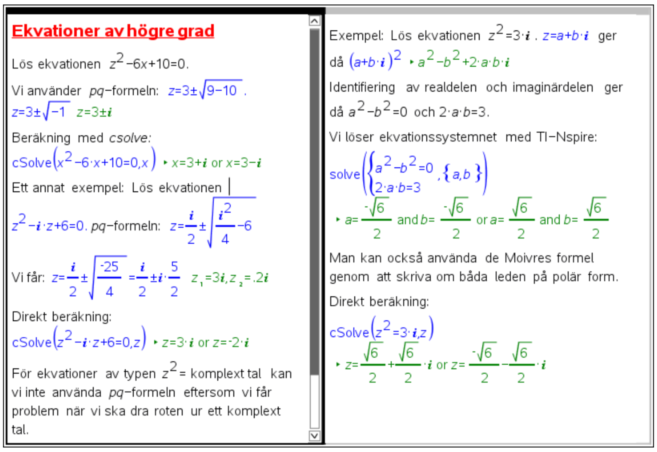
Direkt beräkning av lösningen till ekvationen:

cSolve$(3\cdot z+\text{conj}(z)=2+3\cdot i,z)$ ▸ $z=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\cdot i$

Vi visar de kompexa talen i ekvationen som vektorer i fönstret till höger.

Sid 3:

Här fortsätter vi med andragradsekvationer. Oftast kan andragradsekvationer med komplexa rötter lösas med den vanliga *pq*-formeln.



Ekvationer av högre grad

Lös ekvationen $z^2-6x+10=0$.

Vi använder *pq*-formeln: $z=3\pm\sqrt{9-10}$.

$z=3\pm\sqrt{-1}$ $z=3\pm i$

Beräkning med *csolve:*

cSolve$(x^2-6\cdot x+10=0,x)$ ▸ $x=3+i$ or $x=3-i$

Ett annat exempel: Lös ekvationen

$z^2-i\cdot z+6=0$. *pq*-formeln: $z=\frac{i}{2}\pm\sqrt{\frac{i^2}{4}-6}$

Vi får: $z=\frac{i}{2}\pm\sqrt{\frac{-25}{4}}=\frac{i}{2}\pm i\cdot\frac{5}{2}$ $z_1=3i, z_2=-2i$

Direkt beräkning:

cSolve$(z^2-i\cdot z+6=0,z)$ ▸ $z=3\cdot i$ or $z=-2\cdot i$

För ekvationer av typen z^2= komplext tal kan vi inte använda *pq*-formeln eftersom vi får problem när vi ska dra roten ur ett komplext tal.

Exempel: Lös ekvationen $z^2=3\cdot i$. $z=a+b\cdot i$ ger då $(a+b\cdot i)^2$ ▸ $a^2-b^2+2\cdot a\cdot b\cdot i$

Identifiering av realdelen och imaginärdelen ger då $a^2-b^2=0$ och $2\cdot a\cdot b=3$.

Vi löser ekvationssystemet med TI-Nspire:

solve$\left(\begin{cases}a^2-b^2=0\\2\cdot a\cdot b=3\end{cases},\{a,b\}\right)$

▸ $a=\frac{-\sqrt{6}}{2}$ and $b=\frac{-\sqrt{6}}{2}$ or $a=\frac{\sqrt{6}}{2}$ and $b=\frac{\sqrt{6}}{2}$

Man kan också använda de Moivres formel genom att skriva om båda leden på polär form.

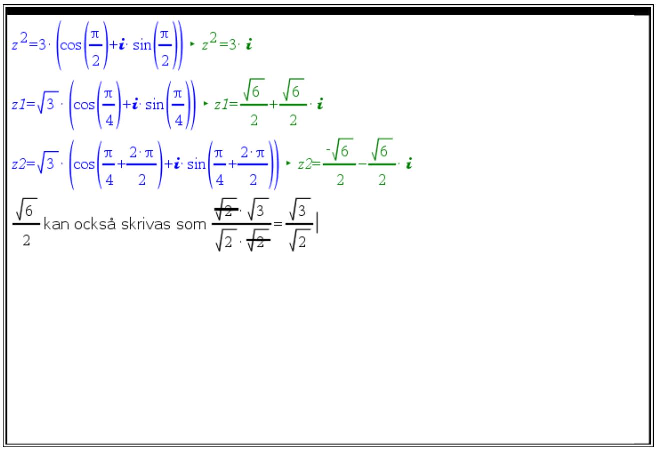
Direkt beräkning:

cSolve$(z^2=3\cdot i,z)$

▸ $z=\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}\cdot i$ or $z=\frac{-\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}\cdot i$

Ekvationen i högra spalten ovan kan man också lösa genom att skriva om på polär form och sedan använda de Moivres formel. Se nedan.

Om vi matar in ett uttryck på polär form så får vi ut det på rektangulär form eftersom inställningen i dokumentet är *Rektangulär*.



$z^2=3\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$ ▸ $z^2=3\cdot i$

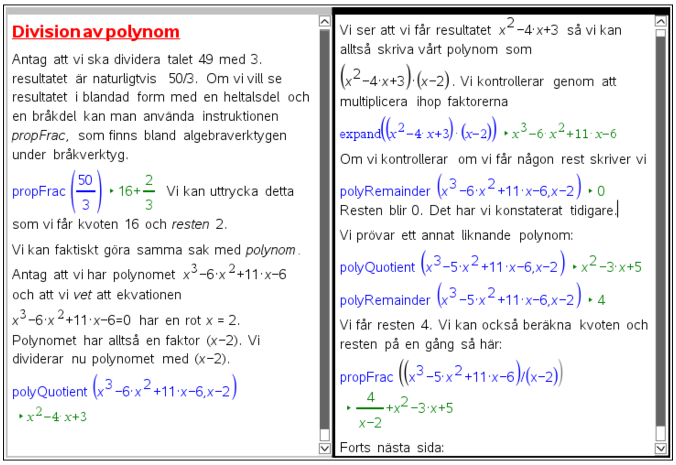
$z1=\sqrt{3}\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$ ▸ $z1=\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}\cdot i$

$z2=\sqrt{3}\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\cdot\pi}{2}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\cdot\pi}{2}\right)\right)$ ▸ $z2=\frac{-\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}\cdot i$

$\frac{\sqrt{6}}{2}$ kan också skrivas som $\frac{\cancel{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{2}\cdot\cancel{\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

Sid 4:

Här introducerar vi ett antal instruktioner som kan användas vid beräkningar på bråk och vid division av polynom.



Division av polynom

Antag att vi ska dividera talet 49 med 3. resultatet är naturligtvis 50/3. Om vi vill se resultatet i blandad form med en heltalsdel och en bråkdel kan man använda instruktionen *propFrac*, som finns bland algebraverktygen under bråkverktyg.

propFrac$\left(\frac{50}{3}\right)$ ▸ $16+\frac{2}{3}$ Vi kan uttrycka detta som vi får kvoten 16 och *resten* 2.

Vi kan faktiskt göra samma sak med *polynome*.

Antag att vi har polynomet $x^3-6\cdot x^2+11\cdot x-6$ och att vi *vet* att ekvationen $x^3-6\cdot x^2+11\cdot x-6=0$ har en rot x = 2. Polynomet har alltså en faktor (x−2). Vi dividerar nu polynomet med (x−2).

polyQuotient$(x^3-6\cdot x^2+11\cdot x-6,x-2)$ ▸ $x^2-4\cdot x+3$

Vi ser att vi får resultatet $x^2-4\cdot x+3$ så vi kan alltså skriva vårt polynom som $(x^2-4\cdot x+3)\cdot(x-2)$. Vi kontrollerar genom att multiplicera ihop faktorerna

expand$((x^2-4\cdot x+3)\cdot(x-2))$ ▸ $x^3-6\cdot x^2+11\cdot x-6$

Om vi kontrollerar om vi får någon rest skriver vi

polyRemainder$(x^3-6\cdot x^2+11\cdot x-6,x-2)$ ▸ 0

Resten blir 0. Det har vi konstaterat tidigare.

Vi prövar ett annat liknande polynom:

polyQuotient$(x^3-5\cdot x^2+11\cdot x-6,x-2)$ ▸ $x^2-3\cdot x+5$

polyRemainder$(x^3-5\cdot x^2+11\cdot x-6,x-2)$ ▸ 4

Vi får resten 4. Vi kan också beräkna kvoten och resten på en gång så här:

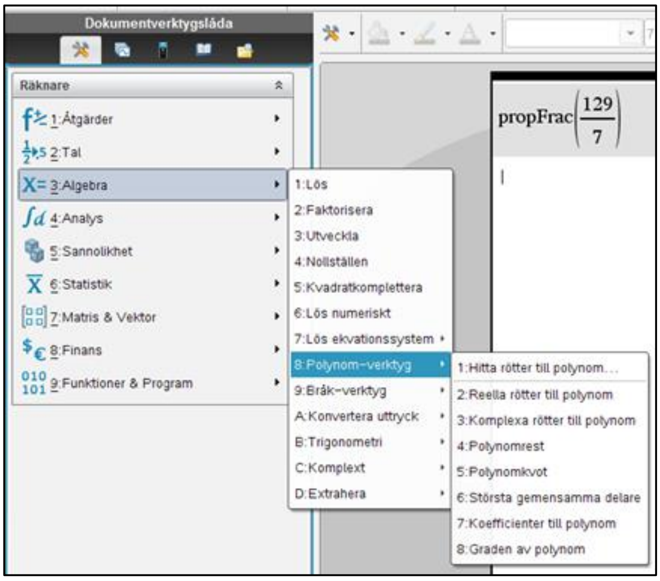
propFrac$((x^3-5\cdot x^2+11\cdot x-6)/(x-2))$

▸ $\frac{4}{x-2}+x^2-3\cdot x+5$

Forts nästa sida:

Vi visar först hur man kan omvandla ett bråk som $\frac{50}{3}$ till ett bråk i blandad form. Man använder då instruktionen *propFrac* som finns i verktygslådan för Tal under bråkverktygen. Samma instruktion kan också användas för polynom.

Dessutom finns det ett antal instruktioner för just polynom.

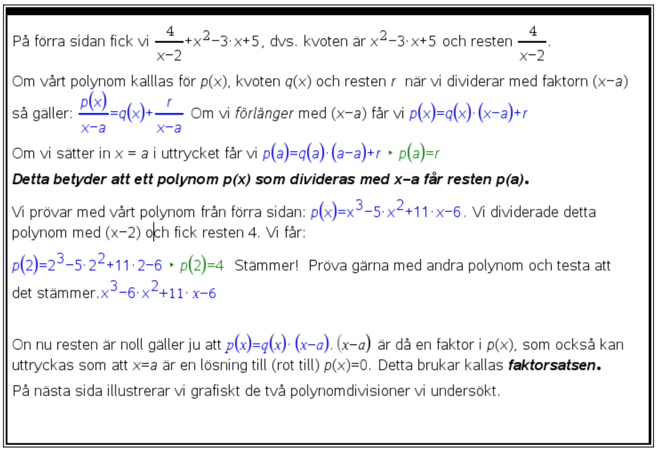


Bråkinstruktionen PropFrac finns även i verktygslådan för algebra under bråkverktygen

Med polynomverktygen behöver vi alltså inte utföra divisioner med ”liggande stolen.

Sid 5:

Här visar vi restsatsen och faktorsatsen. Vi visar också restsatsen för det polynom vi hade på förra sidan.



På förra sidan fick vi $\frac{4}{x-2}+x^2-3\cdot x+5$, dvs. kvoten är $x^2-3\cdot x+5$ och resten $\frac{4}{x-2}$.

Om vårt polynom kallas för $p(x)$, kvoten $q(x)$ och resten r när vi dividerar med faktorn $(x-a)$ så gäller: $\frac{p(x)}{x-a}=q(x)+\frac{r}{x-a}$ Om vi *förlänger* med $(x-a)$ får vi $p(x)=q(x)\cdot(x-a)+r$

Om vi sätter in x = a i uttrycket får vi $p(a)=q(a)\cdot(a-a)+r$ ▸ $p(a)=r$

Detta betyder att ett polynom p(x) som divideras med x−a får resten p(a).

Vi prövar med vårt polynom från förra sidan: $p(x)=x^3-5\cdot x^2+11\cdot x-6$. Vi dividerade detta polynom med (x−2) och fick resten 4. Vi får:

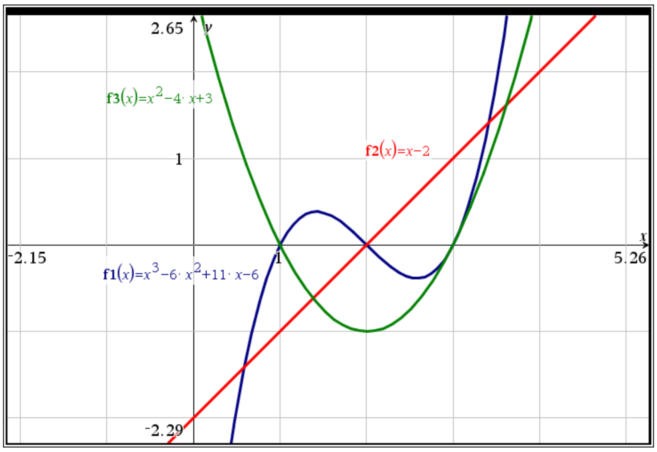
$p(2)=2^3-5\cdot 2^2+11\cdot 2-6$ ▸ $p(2)=4$ Stämmer! Pröva gärna med andra polynom och testa att det stämmer. $x^3-6\cdot x^2+11\cdot x-6$

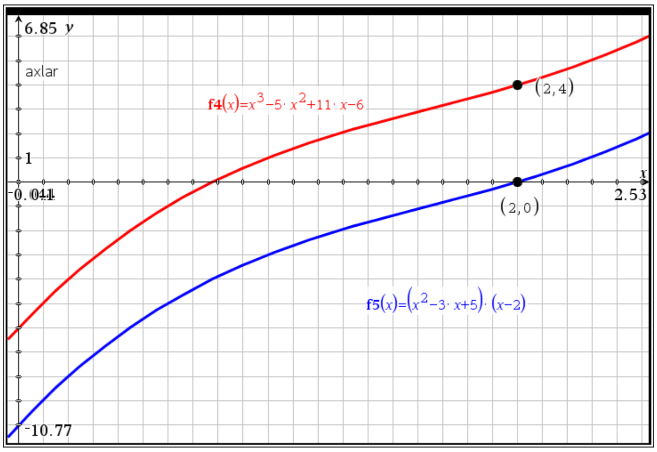
On nu resten är noll gäller ju att $p(x)=q(x)\cdot(x-a)$. $(x-a)$ är då en faktor i $p(x)$, som också kan uttryckas som att $x=a$ är en lösning till (rot till) $p(x)=0$. Detta brukar kallas ***faktorsatsen.***

På nästa sida illustrerar vi grafiskt de två polynomdivisioner vi undersökt.

Sid 6-7:

Här visar vi nu våra polynom som grafer. Observera speciellt graferna på sid 7. Resten 4 motsvaras av differensen mellan funktionsvärdena för polynomet och kvoten.





Ett exempel med ett fjärdegradspolynom som vi dividerar med (x+2). Vi får resten 21. Vi har här beräknat arean mellan kurvorna från -1 till 1 och får resultatet 42 (2·21).