Thème : Analyse

Décroissance exponentielle et logarithme décimal

TI-82 Advanced Edition Python

TI-83 Premium CE Edition Python

Enoncé

Crédit photo : www.pixels.com – Patricia Bergey

Une ville lutte contre des rongeurs nuisibles. Au début, la population des rongeurs est estimée à 100 000 individus.

n étant un nombre entier naturel, on note u_0 le nombre de rongeurs le 1[er] jour et u_n le nombre de rongeurs au bout de n jours. Ainsi $u_0 = 100\,000$.

1. Les mesures prises par la municipalité pour la destruction des rongeurs font baisser leur population chaque jour. Le nombre d'individus est donné dans le tableau ci-dessous :

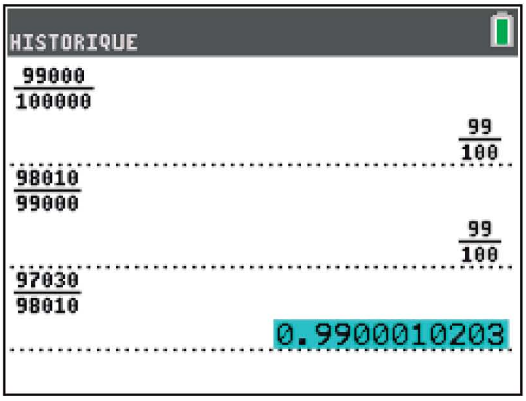
jour	1	2	3	4
Nombre de rongeurs	100 000	99 000	98 010	97 030

Peut-on assimiler cette diminution à un modèle de décroissance exponentielle ?

2. Grâce à ce modèle, utiliser la fonction logarithme décimal pour calculer le nombre de jours nécessaires pour que le nombre de rongeurs soit inférieur à 10 000 individus, puis à 1 000 individus.

3. A l'aide du langage Python, créer une fonction **`seuil`** qui renvoie le nombre de jours n pour lequel le nombre de rongeurs est inférieur à la valeur P donnée en paramètre de la fonction. Vérifier alors les résultats de la question précédente.

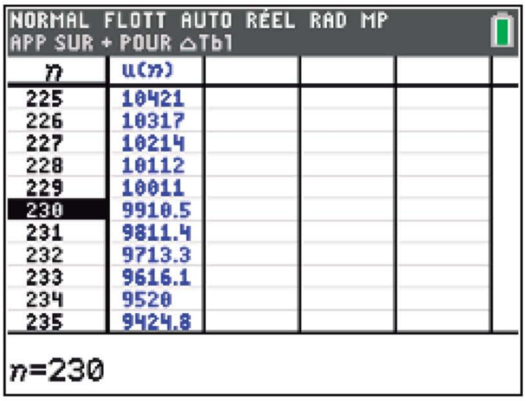
1. Décroissance exponentielle



Pour savoir si les données relevées par la municipalité suivent un modèle de décroissance exponentielle, nous devons comparer les quotients successifs de la suite (u_n). Or nous lisons sur le tableau $u_0 = 100\,000$, $u_1 = 99\,000$, $u_2 = 98\,010$ et $u_3 = 97\,030$. Nous constatons alors que les quotients $\frac{u_{i+1}}{u_i}$ pour $i = 0, 1$ et 2 sont tous égaux ou très proche de 0,99 ce qui correspond à une baisse de $1 - 0{,}99 = 0{,}01 = 1\%$ par jour.

On peut donc assimiler cette diminution à un modèle de décroissance exponentielle.

2. Logarithme décimal



Ainsi la suite (c_n) est une suite géométrique de raison $q = 0{,}99$ et de premier terme $u_0 = 100\,000$ d'où $u_n = u_0 q^n = 100\,000 \times 0{,}99^n$ pour tout entier naturel n.

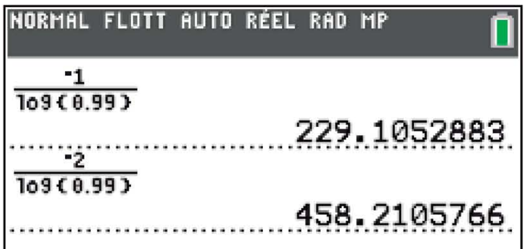
Le problème consiste donc à trouver la plus petite valeur de n, entier, à partir de laquelle on a $u_n \leq 10\,000$. On a déjà vu dans ce livret comment trouver ce seuil à partir d'une table de valeurs, c'est-à-dire par tâtonnements (voir ci-contre).

Décroissance exponentielle et logarithme décimal

On va maintenant utiliser la fonction **log**, outil permettant d'obtenir directement la réponse.

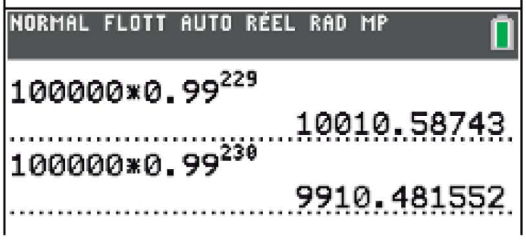
Tout d'abord $u_n \leq 10\ 000 \Leftrightarrow 100\ 000 \times 0{,}99^n \leq 10\ 000 \Leftrightarrow 0{,}99^n \leq \frac{1}{10}$.

Puisque la fonction **log** est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$ on obtient $0{,}99^n \leq \frac{1}{10} \Leftrightarrow \log(0{,}99^n) \leq \log\left(\frac{1}{10}\right) \Leftrightarrow n \times \log(0{,}99) \leq -1 \Leftrightarrow n \geq \frac{-1}{\log(0{,}99)}$.



Remarque : A la dernière étape, on a divisé chaque membre de l'inégalité par $\log(0{,}99)$. Or $0 < 0{,}99 < 1$ donc $\log(0{,}99) < 0$ et on change le sens de l'inégalité !

On trouve alors que n doit être supérieur à 229,1 soit à partir de $n = 230$.



A partir du 230ème jour, le nombre de rongeurs sera passé au-dessous de 10 000 individus. Conseil : vérifier le résultat obtenu en calculant $u_{229} = 100\ 000 \times 0{,}99^{229}$ et $u_{230} = 100\ 000 \times 0{,}99^{230}$.

En reprenant la démarche pour que le nombre de rongeurs soit inférieur à 1 000 individus on trouve $\log(0{,}99^n) \leq \log\left(\frac{1}{100}\right) \Leftrightarrow n \geq \frac{-2}{\log(0{,}99)}$ car $\log\left(\frac{1}{100}\right) = -\log(100) = -2$. On trouve que n doit être supérieur à 458,2 soit à partir de $n = 459$ ce qui correspond à une année et 94 jours.

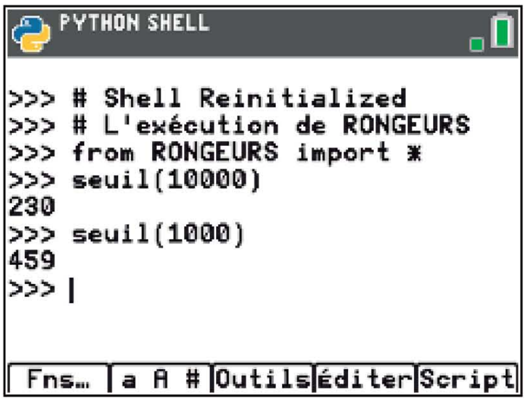
3. Définir **seuil** en Python

On lance l'environnement Python avec la touche prgm puis on crée un nouveau script (zoom pour l'onglet Nouv) que l'on nomme RONGEURS de type Calculs Mathématiques (zoom onglet Types).

La fenêtre de script s'ouvre et la librairie math est déjà importée.

On complète le script RONGEURS avec la fonction **seuil** de paramètre P, qui renvoie le nombre n de jours nécessaires pour que le nombre de rongeurs dans la ville soit inférieur à la valeur P.

Remarque : lors de la boucle `while` (le nombre d'itérations étant recherché ici) on choisit le calcul du terme suivant avec la formule $u = 0{,}99 * u$ et non pas $u = 100\ 000 * 0{,}99 ** n$ pour nous habituer en programmation à minimiser le coût lors de l'exécution (un produit versus une puissance) !



On exécute le script à l'aide de l'onglet Exéc, touche trace : l'écran affiche alors le shell Python lié à notre script.

Avec la touche var, on sélectionne la fonction **seuil** et on complète avec la valeur 10 000 (on peut aussi saisir directement `seuil(10000)`). La fonction renvoie 230, ce qui est cohérent avec la question précédente.

De même avec l'instruction `seuil(1000)`, on obtient bien 459.