

Heinz Pichler

Von der Kinematik der Kreisbewegung zu jener der allgemeinen Bahn unter Beiziehung des TI-83/84

0. Vorbemerkung

Kinematische Abläufe fußen mathematisch auf den Gleichungen der Bahnkurve und den Definitionsformeln für (Durchschnitts)-Beschleunigung und -Geschwindigkeit.

$$\vec{a} = \Delta \vec{v} / \Delta t \quad (1)$$

$$\vec{v} = \Delta \vec{r} / \Delta t \quad (2)$$

Beim Kreis als ebenem Gebilde brauchen die Vektoren nur zweidimensional angelegt zu werden.

Ziel der Ausführungen wird es sein,

- die dabei auftretenden Geschwindigkeiten und Beschleunigungen sichtbar zu machen,
- bei Gleichförmigkeit durch quantitative Vergleiche auf die funktionalen Abhängigkeiten der Zentripetalbeschleunigung von Bahngeschwindigkeit und Radius einzugehen,
- kompliziertere Formen einer Kreisbewegung zu studieren und
- zuletzt noch Regeln für die Bewegung auf beliebiger Bahn zu entdecken!

1. Gleichförmige Kreisbewegung

1.1 Ortsverhalten

Wir gehen von der Bahngleichung einer Kreislinie aus,
 $x = R \cdot \cos(\varphi)$; $y = R \cdot \sin(\varphi)$ (3a,b)
wobei bei gleichförmigem Durchlauf der Zentriwinkel proportional mit der Zeit wächst

$$\varphi = \omega \cdot t \quad (4)$$

und der Proportionalitätsfaktor ω dadurch die Bedeutung einer Winkelgeschwindigkeit hat, die bei Verwendung des Bogenmaßes mit der Bahngeschwindigkeit über

$$\omega = v/R = \text{konst.} \quad (5)$$

verknüpft ist.

Als Kennwerte der folgenden Kreisbewegung entscheiden wir uns für $R = 8 \text{ m}$; $v = 2\pi \text{ m/sec}^1$;
 $t = 0, 0.5, 1, 1.5, \dots, 8.5 \text{ sec}$

Nach Wahl der nötigen Voreinstellungen im [MODE]-Menü² (Abb.1a)³ und im [FORMAT]-Menü (Abb.1b),

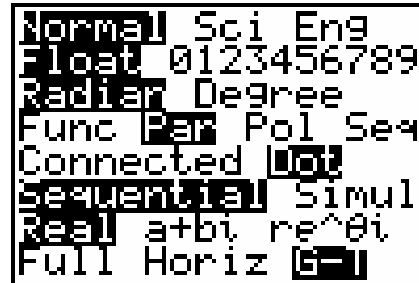


Abb. 1a

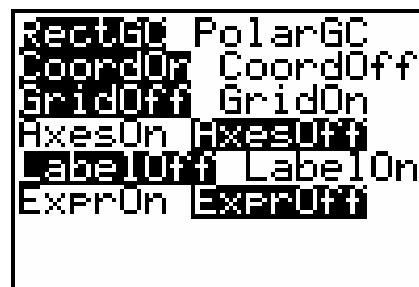


Abb. 1b

der Standardisierung und Entzerrung des Bildrahmens mittels [ZOOM] [6], gefolgt von [ZOOM] [5] und den Nachbesserungen im [WINDOW]-Editor auf Tmax=8.5 und Tstep=0.5 (Abb.2)⁴,

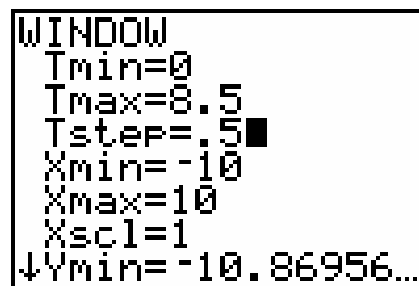


Abb. 2

legen wir im Home-Screen [QUIT] die gegebenen Formvariablen fest (Abb.3a), vertrauen dem Funktionseditor [Y=] die Gleichungen (3a,b) mit ihren Substitutionen (4) und (5) an, kontrollieren ganz links, ob bei diesen noch die Darstellungsart "punktierter Graph" gewählt ist, und sorgen in der Kopfzeile für die Abschaltung der drei Plots und bei allfällig vorhandenen, weiteren Funktionen für deren Inaktivierung ("Plot." bzw. "=" auf hellem Hintergrund) (Abb.3b).

```

8→R
2π→V
6.283185307

```

Abb. 3a

```

Plot1 Plot2 Plot3
X1T=RCos(V/R*T)
Y1T=RSin(V/R*T)
X2T=
Y2T=
X3T=

```

Abb. 3b

Mit [TRACE] erhalten wir den Lageplan, den wir mit den Cursortasten [→] [←] in 0.5 Sekundenintervallen abtasten können (Abb.4).

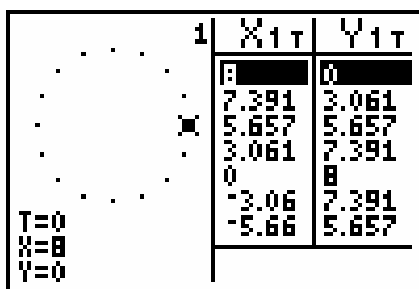


Abb. 4

- ⇒) An dieser Stelle können wir auf die Bedeutung des Wertes "T=..." nach genau einem Umlauf eingehen - der wegen der Wahl von $v = 2\pi$ m/sec numerisch mit der Maßzahl des Radius übereinstimmt- und seinen Zusammenhang mit der Drehzahl n ergründen!
- ⇒) Eine Tabellen-Durchsicht lässt die Periodizität der Koordinatenwerte auffallen, was zum Schluss führt, dass
- ⇒) die Filterung der Kreisbewegung durch einen "Achsenschlitz" eine harmonische Schwingung liefert und
- ⇒) die Synthese aus einer Cosinus- und einer dazu orthogonal stehenden Sinus-Schwingung gleicher Amplituden eine Kreisbewegung ergibt!

Da die Tabellendaten im Sinne einer Tabellenkalkulation schlecht weiter zu verarbeiten sind, wollen wir sie in Listenform bringen!

So schalten wir im [Y=]-Editor mit [←] [ENTER] die Kreisgleichungen ab, stellen im [MODE]-Menü auf vollen Bildschirm <Full>⁵ um, entzerren erneut mit [ZOOM] [5], erzeugen im Home-Screen [QUIT] im "beschreibenden Verfahren" die Orts-Listen für X- und

Y-Richtung samt ihrer Installation im Listeneditor (Abb.5a) und erhalten mit [STAT] [1] (Abb.5b) natürlich dasselbe Ergebnis wie in Abb.4. (Das Argument in der Fußzeile gibt diesmal die Wertenummer und nicht die Zeit wieder!)

```

seq(X1T,T,Tmin,Tmax,Tstep)→X:seq
(Y1T,T,Tmin,Tmax,Tstep)→Y:SetUP
Editor X,Y
Done

```

Abb. 5a

X	Y	-----	1
8	0		
7.391	3.0615		
5.6569	5.6569		
3.0615	7.391		
0	8		
-3.061	7.391		
-5.657	5.6569		
X(1) = 8			

Abb. 5b

An dieser Stelle könnten wir das Ortsbild auch aus den erstellten Ortslisten erhalten. Dazu hätten wir nur den Listenplot mit [STAT PLOT] [1] einzurichten (Abb.6a) und diesen wieder mit [TRACE] zu verwenden (Abb.6b).

```

Plot1 Plot2 Plot3
Off Off
Type: [ ] [ ] [ ]
Xlist:X
Ylist:Y
Mark: [ ] + .

```

Abb. 6a

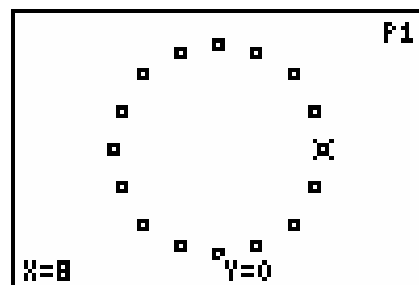


Abb. 6b

Um auch die Zeit eingeblendet zu erhalten, wollen wir die Ortsbilder künftig wieder direkt aus den Bahngleichungen beziehen, wozu wir -für den Fall des durchgeführten "Seitensprungs"- den Statistikplot mit [STAT PLOT] [4] [ENTER] abzuschalten und das Kreisgleichungspaar mit [Y=] [←] [ENTER] wieder einzuschalten hätten. [QUIT]

Nunmehr wagen wir uns an die Darstellung vom

1.2a Geschwindigkeitsverhalten

Dazu haben wir die Formel (2) koordinatenweise auszuführen, also die Ausdrücke $v_x=(x-x_0)/\Delta t$ und $v_y=(y-y_0)/\Delta t$ zu bilden. Es bieten sich mehrere Möglichkeiten der Bearbeitung an:

1.2.1 Tabellarisch

Wir legen im Standardlisten-Editor vorbereitend jeweils zwei Kopien der Listen L_X und L_Y an (Abb.7a,b). [STAT] [1]

```
LX→L1:Ans→L2:L_Y→
L3:Ans→L4:SetUpE
ditor
Done
```

Abb. 7a

L1	L2	L3	1
8	8	0	
7.391	7.391	3.0615	
5.6569	5.6569	5.6569	
3.0615	3.0615	7.391	
0	0	8	
-3.061	-3.061	7.391	
-5.657	-5.657	5.6569	
L1(1)=8			

Abb. 7b

Damit zeitlich aufeinanderfolgende Orte zwecks Differenzbildung $(x-x_0)$ bzw. $(y-y_0)$ im Listenschema nebeneinander zu liegen kommen, löschen wir in L_2 und L_4 mit [DEL] die jeweils **erste** Zelle (Abb.8a) und in L_1 und L_3 die jeweils **letzte** (Abb.8b).

L2	L3	L4	4
7.391	0	3.0615	
5.6569	3.0615	5.6569	
3.0615	5.6569	7.391	
0	7.391	8	
-3.061	8	7.391	
-5.657	7.391	5.6569	
-7.391	5.6569	3.0615	
L4(1)=3.061467458...			

Abb. 8a

L1	L2	L3	1
0	3.0615	-8	
3.0615	5.6569	-7.391	
5.6569	7.391	-5.657	
7.391	8	-3.061	
8	7.391	0	
-----	-----	-----	
L1(1B) =			

Abb. 8b

Mit diesem Trick können wir im Home-Screen [QUIT] nun die obgenannten Formeln einfach abfassen, die resultierenden Geschwindigkeitswerte den Listen V_X bzw. V_Y zuordnen und dem Listeneditor einverleiben (Abb.9).

```
(L2-L1)/Tstep→VX
:(L4-L3)/Tstep→V
Y:SetUpEditor X,
Y,VX,VY
Done
```

Abb. 9

1.2.2 Algebraisch

Anstelle des wohl einsichtigen, aber langen Unterfangens 1.2.1 gelangt man in einem Zug von den Orts-Listen zu den Geschwindigkeitskomponenten durch Ausführung der in Abb.10 wiedergegebenen Terme.

```
seq(LX(I)-LX(I-1),I,2,dim(LX),1)
/Tstep→VX:seq(LY
(I)-LY(I-1),I,2,
dim(LY),1)/Tstep
→VY:SetUpEditor
X,Y,VX,VY
```

Abb. 10

1.2.3 CellSheet

Der Einsatz von "CellSheet" stellt für diesen Rechenschritt eine weitere Alternative dar, die strukturell die Abläufe von Punkt 1.2.1 und 1.2.2 kombiniert. Da diese Applikation dem "normalen" TI-83 aber nicht zur Verfügung steht, sei es mit diesem Hinweis getan.

1.2b Fortsetzung

⇒) Auf alle Fälle haben wir durch unseren letzten Bemühungen die mit [STAT] [1] in Abb.11a gezeigten Geschwindigkeitskomponenten erhalten. Deren

pythagoräischer Betrag muss konstant sein und liegt wegen des "Sekantenkalküls" geringfügig unter dem gewählten Geschwindigkeitswert von 2π . [QUIT] (Abb.11b)

Y	VX	VY	Y
0	-1.218	5.1908	
3.0615	-3.468	5.1908	
5.6569	-5.191	3.4684	
7.391	-6.123	1.2179	
8	-6.123	-1.218	
7.391	-5.191	-3.468	
5.6569	-3.468	-5.191	
VY(1)=6.122934917...			

Abb. 11a

```
round(sqrt(LVX^2+LVY^2),2)
{6.24 6.24 6.24...
```

Abb. 11b

⇒ Umgekehrt wird hier demonstriert, dass gleichbleibende Vektorbeträge noch lange keine gleichbleibenden Koordinatenwerte zur Folge haben müssen und -physikalisch interpretiert- nicht zwingend Beschleunigungsfreiheit bedeuten!

Zur grafischen Darstellung dieser Geschwindigkeiten durch Vektorpfeile lohnt sich die Erstellung eines Programms samt Unterprogramm. In das Hauptprogramm wollen wir durch Einbau aller wichtigen Anweisungen aus den Abb.1a, 5a und 10 auch gleich die Prozedur zur Schaffung der Orts- und Geschwindigkeitstabellen einarbeiten, um uns für die Vielzahl der noch folgenden Beispiele Routinearbeit zu ersparen.

Mit [PRGM] <NEW> eröffnen wir den Programm-Editor und geben die Inhalte vom Listing 1 und Listing 3 ein.

Die Durchführung des Programms mit [PRGM] <GESCHW> [ENTER] führt zur Darstellung des Geschwindigkeitsprofils (Abb.12).

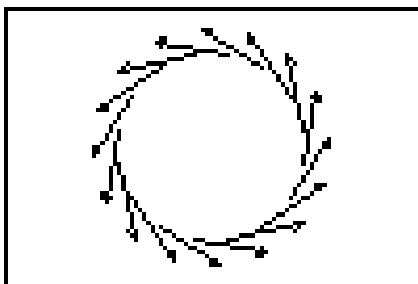


Abb. 12

⇒ Zum einen sind SchülerInnen oft erstaunt, dass die Geschwindigkeitsvektoren doppelt so lang wie die Ortsabstände ausfallen, weil sie übersehen, dass wir die Positionen in Halbskunden-Intervallen "knipsen" und die Geschwindigkeit jenen Weg weist, den der Körper -von Kräften unbeeinflusst- innerhalb 1 Sekunde zurücklegen würde.

⇒ Zum anderen irritiert sie -trotz der eben zitierten Definition- die Tangential-Lage der Geschwindigkeitsvektoren. Burschen mögen sich aber des Funkenfluges an einer Schleifscheibe entsinnen, der ja eindrucksvoll die Momentangeschwindigkeit des Schleifkorns an der Berührstelle zum Werkzeug verrät! Mädchen könnten dagegen -unter Verwendung größerer Verschlusszeit- einen Hund fotografieren, der sich gerade das Wasser aus dem Fell beutelt! Wenn sie erwarten, dass das Foto wie in Abb.13a ausfällt, liegen sie in ihrer Prognose falsch! Auch hier fliegen die Tropfen tangential, und nicht radial von der Körperoberfläche weg (Abb.13b)!

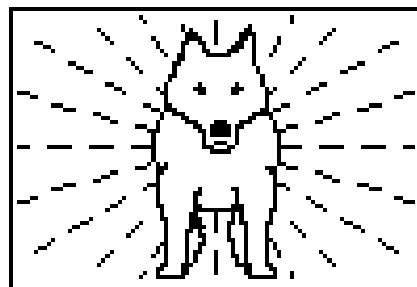


Abb. 13a

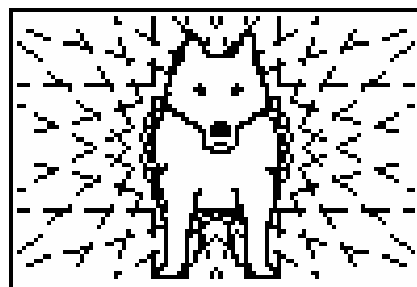


Abb. 13b

1.3 Beschleunigungssituation

Die Isomorphie zwischen den Gleichungen (1) und (2) gestattet es, die Beschleunigungen mit dem Rechner auf ähnliche Weise wie im Abschnitt 1.2 zu ermitteln. Wir benützen das kurze Verfahren aus Punkt 1.2.2, um die Beschleunigungs-Listen AX und AY aufzubauen (Abb.14a,b). [STAT] [1]

```

seq(LVX(I)-LVX(I
-1),I,2,dim(LVX)
,1)/Tstep→AX:seq
(LVY(I)-LVY(I-1)
,I,2,dim(LVY),1)
/Tstep→AY:SetUpE
ditor X,Y,VX,VY,
AX,AY

```

Abb. 14a

VY	AX	AY	6
6.1229	-4.501	-3.445	
5.1908	-3.445	-4.501	
3.4684	-1.864	-4.501	
1.2179	0	-4.872	
-1.218	1.8643	-4.501	
-3.468	3.4448	-3.445	
-5.191	4.5009	-1.864	
AY(I)=-1.86432267...			

Abb. 14b

⇒ Löscht man in den Ortslisten jeweils die erste Zelle¹⁰, so lässt ein Vergleich der darin aufscheinenden Vorzeichen mit jenen der Beschleunigungslisten die Vermutung keimen, dass die Beschleunigungen umgekehrte Richtung zu den Radien haben könnten. Eine Grafik soll dies klären!

Das Programm zur grafischen Darstellung der Beschleunigungsvektoren ähnelt dem der Geschwindigkeiten und beherbergt gleich wieder die Anweisungen aus Abb.14a zur automatischen Erstellung der Beschleunigungstabellen (Listing 2).

Achtung!

Ehe das Programm "BESCHL" gestartet wird, muss immer sicher gestellt sein, dass zum betreffenden Beispiel das Programm "GESCHW" bereits einmal ausgeführt wurde, da dieses mit seinen Geschwindigkeitstabellen die Datenbasis für das Beschleunigungs-Programm liefert!

Die mit [PRGM] <BESCHL> [ENTER] gewonnene Grafik (Abb.15) bestätigt die vorgenannte Vermutung! Da die Beschleunigungsvektoren stets auf den Kreismittelpunkt hin gerichtet sind, spricht man von "Zentri-petal-beschleunigung".

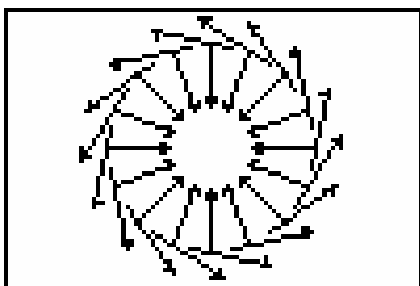


Abb. 15

1.4 Funktionale Abhängigkeit der Zentripetalbeschleunigung

Wir gehen von einer neuen Kreisbewegung $R = 4 \text{ m}$; $v = 3.5 \text{ m/sec}$; $t = 0, 4\pi/21, 8\pi/21, \dots, 52\pi/21 \text{ sec}$ (Abb.16a) aus⁶, starten die Positions-Grafik mit [GRAPH] oder [TRACE] und ergänzen sie mittels [PRGM] <GESCHW> [ENTER] und [PRGM] <BESCHL> [ENTER] zum vollständigen Geschwindigkeits- und Beschleunigungsbild⁷ (Abb.16b).

```

4→R
3.5→V
4π/21→Tstep:2πR/
V+Tstep→Tmax
7.779181809

```

Abb. 16a

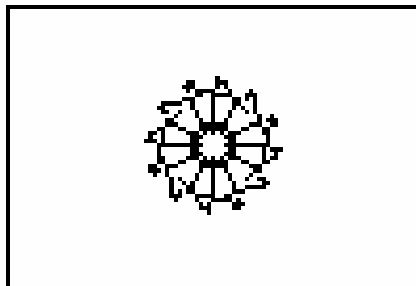


Abb. 16b

⇒ Die Verdopplung des Radius -samt Anpassung der Umlaufzeit- (Abb.17a) und der Neustart der Programme <GESCHW> und <BESCHL> führen zu Abb.17b, aus der durch Vergleich mit Abb.16b das antipathe Verhältnis zwischen Radius und Beschleunigung hervorgeht.

```

2R→R
2πR/V+Tstep→Tmax
14.95996502

```

Abb. 17a

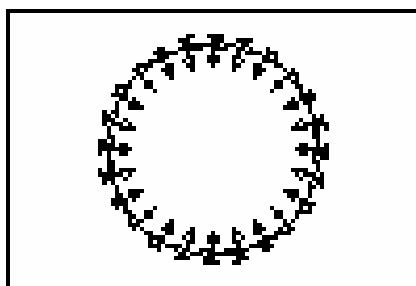


Abb. 17b

⇒) Die Verdopplung der Geschwindigkeit -samt Anpassung der Umlaufzeit- (**Abb.18a**) und der **Neustart** der Programme **<GESCHW>** und **<BESCHL>** führen zu **Abb.18b**, aus der durch Vergleich mit **Abb.17b** das überproportionale Anwachsen der Beschleunigung mit der Geschwindigkeit folgt.

```

2V→V
2πR/V+Tstep→Tmax
7
7.779181809

```

Abb. 18a

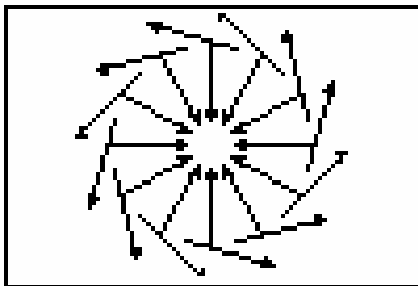


Abb. 18b

⇒) Um zu zeigen, dass der erste Zusammenhang genau ein verkehrtproportionaler und der letzte ein quadratischer ist, muss das Zeitintervall T_{step} auf "infinitesimale" Größe -etwa 0.0001 sec- herabgedrückt werden, T_{max} zur Vermeidung eines Listen-Überlaufs entsprechend reduziert werden -etwa auf $10 \cdot T_{step}$ - und nach Neustart der beiden Programme der Ausdruck $\sqrt{(LAX^2 + LAY^2)}$ jeweils errechnet und gegenseitig verglichen werden. Die Ausführung sei dem Leser überlassen.

⇒) Natürlich sollte der quantitativen Bearbeitung noch eine qualitative, "logische" folgen, etwa in Art der Betrachtung, dass eine Radienverdopplung die Richtungsänderung der selben Geschwindigkeit in gleichbleibender Zeit halbiert, was Halbierung der Beschleunigung bedeutet; und dass Geschwindigkeitsverdopplung doppelte Richtungsänderung der doppelten Geschwindigkeit in gleichbleibender Zeit mit sich bringt, was vierfache Beschleunigung mit sich bringt.

2. Gleichmäßig beschleunigende Kreisbewegung

2.1 Grundlagen

Von diesem Typus spricht man dann, wenn sogar der Betrag der Geschwindigkeit eine gleichbleibende Änderung je Zeiteinheit erfährt. Dann gilt:

$$b = \Delta|v| / \Delta t = \text{konst.} \quad (6a)$$

bzw.

$$\alpha = b/R = \text{konst.} \quad (6b)$$

Anstelle der Gleichung (5) tritt nun das bestimmte Integral von Gleichung (6b)

$$\omega = v_0/R + b/R \cdot t \quad (7)$$

und anstelle der Gleichung (4) das bestimmte Integral von Gleichung (7):

$$\varphi = v_0/R \cdot t + 1/2 \cdot b/R \cdot t^2 \quad (8)$$

Vorab modifizieren wir mit dem Substitut (8) die Gleichungen (3a,b) im Funktioneditor [**Y=**] und kontrollieren, ob bei diesen noch die Darstellungsart "punktierte Graph" eingestellt ist (**Abb.19**)

```

Plot1 Plot2 Plot3
X1t=RCos(U/R*T+
1/2*B/R*T^2)
Y1t=RSin(U/R*T+
1/2*B/R*T^2)
X2t=
Y2t=
X3t=

```

Abb. 19

2.2 Bahnbeschleunigender Fall

Die Kennwerte des folgenden, im Uhrzeigersinn laufenden Kreisbewegungsfalles mit

$$R = 7 \text{ m} ; v_0 = -0.1 \text{ m/sec} ; b = -1 \text{ m/sec}^2 ;$$

$$t = 0, 0.25, 0.5, 0.75, \dots, 9.5 \text{ sec}$$

vermitteln wir dem Rechner (**Abb.20a**) und gewinnen mit [**TRACE**] und nachfolgendem **Start** der Programme **<GESCHW>** und **<BESCHL>** akkumulierend das Orts-, Geschwindigkeits- und Beschleunigungsbild⁷ (**Abb.20b-d**).

```

7→R: -0.1→V: -1→B
0.25→Tstep:9.5→Tmax
max
9.5

```

Abb. 20a

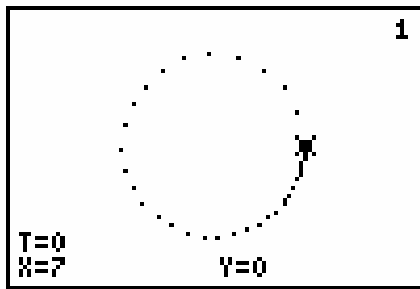


Abb. 20b

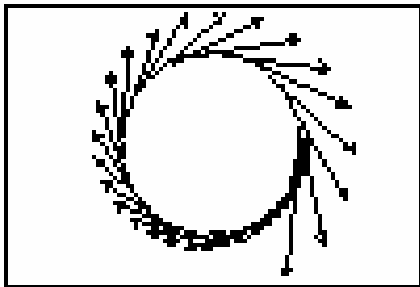


Abb. 20c

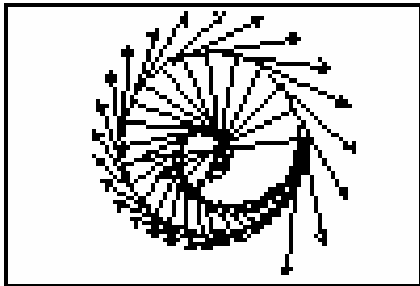


Abb. 20d

⇒ Im letzten Bild mag als erstes die innenliegende Schnecke ins Auge springen. Vom Standpunkt der Physik aus sollten wir unser Augenmerk aber viel mehr den Verlängerungen der Beschleunigungsvektoren, das sind zugleich die Wirkungslinien der einwirkenden Gesamtkräfte, schenken: Sie sind nicht mehr auf den Kreismittelpunkt hin gerichtet, sondern gehen an diesem vorbei. Ihre Einhüllende, die sich an die eingangs erwähnte Schnecke immer inniger anschmiegt, ist das Interessante! Immerhin verrät das Produkt aus deren momentanem Abstand zum Zentrum, der Größe des zugehörigen Beschleunigungsvektors und der Körpermasse das sich betätigende -in unserem Fall konstante- Drehmoment. Der Betrag der Beschleunigungsvektoren und ihr Abstand vom Kreismittelpunkt verhalten sich zueinander also indirekt proportional.

Diesen Zusammenhang können wir auch am Beispiel eines "anzuwerfenden" Lassos nachvollziehen. Anfangs führt unsere Hand mit dem Seilanfang eine relativ große Kreisbewegung aus, die sich mit Zunahme der Drehzahl auf einen immer kleineren Radius beschränkt. Die Haltekraft nimmt dabei ständig zu.

⇒ Noch ein Zweites verbirgt sich in diesem Bild: Der Berührungspunkt des Beschleunigungsvektors an die

Einhüllende läuft der Position des Körpers stets voraus. Der Winkel zwischen den beiden Punkten liegt zwischen 0° und 90° . Die -hier relativ offenkundige- Phasenlage zwischen Kraft und Ort ist eine ganz entscheidende Voraussetzung für die Entstehung einer erzwungenen Schwingung bzw. Rotation. So lässt sich über dieses Beispiel auch ein Einstieg in das Thema des Phasendiagramms und der Anregung einer Schwingung gestalten.

2.3 Bahnverzögernder Fall

Zum selbständigen Probieren sei noch eine gedämpfte Rotation mit den Kennwerten $R = 7 \text{ m}$; $v_0 = -9.5 \text{ m/sec}$; $b = 1 \text{ m/sec}^2$; $t = 0, 0.25, 0.5, 0.75, \dots, 9.5 \text{ sec}$ angeboten.

Hier liegt die Phasenverschiebung zwischen Kraft und Ort zwischen 0° und -90° .

3. Allgemeine Kreisbewegung

Wenn die Konstanz der Gleichungen (6a,b) nicht mehr gegeben ist, spricht man von einer allgemeinen Kreisbewegung. Dann gilt:

$$\alpha = b(t) / R \quad (9)$$

$$\omega = \int b(t) \cdot dt \quad (10)$$

$$\varphi = \int \omega(t) \cdot dt \quad (11)$$

Somit ist für diesen Bewegungstypus Gleichung (11) in Gleichung (3a,b) einzufügen und der gewonnene Ausdruck dem Funktioneneditor einzuverleiben. Alles Weitere vollzieht sich in der selben Weise wie bisher und wird deshalb nicht mehr näher erörtert.

4. Superponierte Kreisbewegung

4.1 Ausgangssituation

Komplexer ist der folgende Fall: Ein Punkt möge gleichförmig auf einer Kreisbahn (Deferent) rotieren und dabei den Mittelpunkt für eine weitere Kreisbahn (Epizyklus) bilden, auf der sich endlich der Körper "gleichmäßig" bewegt. In Ortsgleichungen abgefasst:

$$\begin{aligned} x &= R_1 \cdot \cos(\omega_1 \cdot t) + R_2 \cdot \cos(\omega_2 \cdot t) ; \\ y &= R_1 \cdot \sin(\omega_1 \cdot t) + R_2 \cdot \sin(\omega_2 \cdot t) \end{aligned} \quad (12a,b)$$

Mit solchen Beispielen haben wir es in variantenreichster Form bei modernen "Karussellen" in gängigen Vergnügungsparks zu tun. Im wesentlichen bestehen diese Aufbauten aus zwei exzentrisch gelagerten

Drehtellern oder -armen, an deren Peripherie bzw. Ende sich offenbar der mechanische Nervenkitzel entfaltet. Legen wir diesen mit dem TI-83/84 bloß!

4.2 Innenzykloide

Wir wählen eine "Twister"-Bahn, bei der der Epizyklus gegensinnig zum Deferenten durchlaufen wird. Er habe folgende Daten:

$$R_1 = 5 \text{ m} ; R_2 = 4 \text{ m} ; \omega_1 = 1 \text{ sec}^{-1} ; \omega_2 = -2\omega_1 ;$$

$$t = 0, \pi/24, 2\pi/24, \dots, 6.5 \text{ sec}$$

Die sich bei späteren Beispielen noch abändernden Parameter vertrauen wir gemäß **Abb.21a** numerischen Speichern an und die Bahngleichungen (12a,b) mit dem Rest der Kenndaten -aus Gründen der Übersicht in zerlegter Form- den ersten drei Parameterspeicherpaaren (**Abb.21b**). Beim **ersten Paar** achten wir wieder auf die Darstellungsart "**punktierter Graph**", während wir das **zweite und dritte Paar** auf dem Gleichheitszeichen **abschalten**. Mit **[TRACE]** erzeugen wir wie gewohnt die Grafik (Abb.21c).

```
1→W
π/24→Tstep
2π+Tstep→Tmax
```

Abb. 21a

```
Plot1 Plot2 Plot3
X1T=X2T+X3T
Y1T=Y2T+Y3T
X2T=5cos(WT)
Y2T=5sin(WT)
X3T=4cos(-2WT)
Y3T=4sin(-2WT)
X4T=
```

Abb. 21b

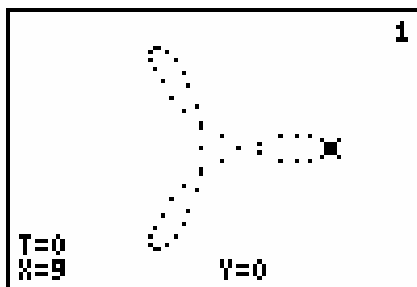


Abb. 21c

⇒) Ehe wir zur Diskussion der Bewegung und ihrer kinematischen Folgen schreiten, wollen wir bei diesem Beispiel noch einen kurzen Abstieg zu den Fundamenten der Rotation tätigen.

Der Bahn liegen zwei kreisförmige Polkurven zu Grunde, deren Radienverhältnis ρ_0 / ρ zwingend dem Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten von Epizyklus und Deferent entspricht. Bei gleichsinnigem Umlauf ergibt ihre Radiensumme, bei gegensinnigem Umlauf ihre Radiendifferenz den Deferenten-Radius R_1 . So erhalten wir aus dem Gleichungssystem

$$\rho_0 / \rho = |\omega_2 / \omega_1| = 2$$

$$\rho_0 - \rho = R_1$$

für den vorliegenden Fall die Radien von Rast- und Gangpolkreis:

$$\rho_0 = 2R_1 = 10 \text{ m} \quad \text{und} \quad \rho = R_1 = 5 \text{ m}$$

Mit einer grafischen Darstellung des Sachverhalts auf dem Rechner wollen wir diese Aussagen transparent machen und zudem einen Einblick in die Bedeutung von Rast- und Gangpolkurven für die Interpretation einer Bewegung als schlupffreien Abrollvorgang gewähren.

Den Rastpolkreis erhalten wir nach **[QUIT]** durch Eingabe und Ausführung seiner kartesischen Kreisgleichung gemäß **Abb.22a**. Nach neuerlichem **[QUIT]** fügen wir mit der Anweisungssequenz der **Abb.22b** noch den Gangpolkreis samt bahnerzeugendem Pfeil hinzu (Abb.22c).

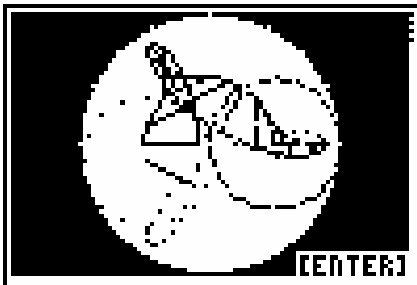
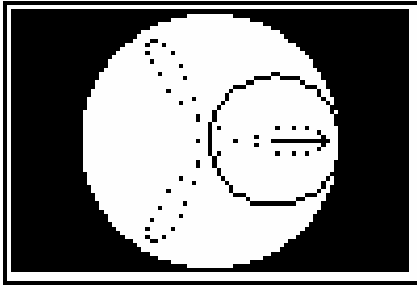
```
Shade(Ymin,Ymax,
Xmin,-10):Shade(
Ymin,Ymax,10,Xma
x):Shade(√(10²-X
²),Ymax):Shade(Y
min,-√(10²-X²))
```

Abb. 22a

```
Circle(5,0,5):Li
ne(5,0,9,0):Line
(9-ΔX,-ΔY,9-ΔX,Δ
Y)
```

Abb. 22b

4.2.1 Polkurven



⇒) Durch Abrollen eines (Gangpol)-Kreises auf der Innenseite eines doppelt großen (Rastpol)-Kreises überstreicht ein vom ersteren mitgenommener Pfeil also die Bahn (12a,b). Derart handelt es sich um eine Epizykloide zu einem Innenkreis.

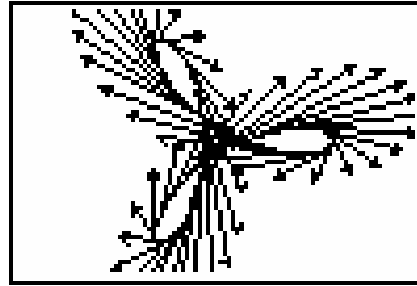
⇒) Hätten Sie ohne Kenntnis der Bahnform sofort prophezeit, dass bei einem gegensinnigen Drehzahlverhältnis der Drehteller bzw. -arme von 2:1 ein "dreiarmiges" Gebilde entsteht?

⇒) In der Tat funktioniert ein derartiger Antrieb auf Basis eines Reibungs- oder Formschlusses natürlich und wurde früher auch eingesetzt. Heutzutage wird diese Aufgabe aber von Hydraulikpumpen und -motoren oder von Elektromotoren besorgt, wobei letztere durch eine sogenannte "elektrische Welle" gekoppelt sind oder elektronisch gesteuert werden.

⇒) Falls der geistige Einblick in die Bahnentstehung noch immer nicht glückt, hilft das Programm "TWISTER" (**Listing 4**), bei dem auch gleich die Anweisungen aus Abb.22a,b integriert sind, auf die Sprünge (Abb.22d). Verfolgen Sie dabei, dass der "Fuß" des bahnerzeugenden Vektors auf der Kreisbahn des Deferenten bleibt!

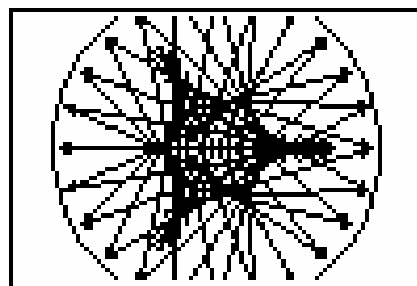
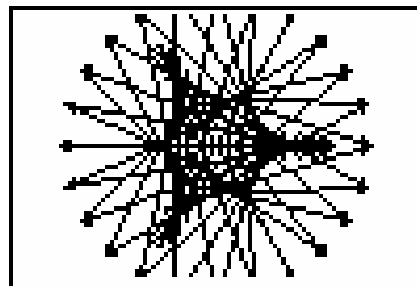
4.2.2 Geschwindigkeits- und Beschleunigungsprofil

Nach diesem Exkurs in die Getriebelehre wenden wir uns dem Geschwindigkeitsgeschehen zu. Wir löschen mit **[CLEAR] [DRAW] [1] [ENTER]** die nun störenden Polkurven und holen uns über **[PRGM] [GESCHW] [ENTER]** das Geschwindigkeitsprofil (Abb.23).



⇒) Beim ersten Hinsehen erscheint die bisherige Bahnsymmetrie einer gewissen Asymmetrie gewichen zu sein. Wenn man sich aber besinnt, dass die Pfeillängen den Vektorwurzeln zuzuordnen sind, wird wohl klar, dass die Geschwindigkeitsmaxima genau in den zentrumsnächsten Positionen auftreten, die -minima in den zentrumsfernsten Positionen und die übrige Geschwindigkeitsverteilung dazu spiegelbildlich liegt.

Mit erneutem **[CLEAR]** **[DRAW]** **[1]** **[ENTER]** und **[PRGM]** **[BESCHL]** **[ENTER]** erhalten wir das gesonderte Beschleunigungsprofil (Abb.24a).



⇒) Die Silhouette der Pfeilspitzen bildet zufällig einen Kreis, wie sich mit **[DRAW] [9] [ENTER] [→] [→] [→] ... [ENTER]** durch knappes Anlegen eines Kreises verifizieren lässt (Abb.24b). Daraus darf man aber nicht den Fehlschluss ziehen, es liege eine Beschleunigung mit konstantem Ausmaß vor. Vielmehr ändert sich der Betrag der Beschleunigung erheblich, da die Vektorwurzeln nicht vom Zentrum, sondern von den verschiedenen Stellen der -in diesem Bild nur schwach ersichtlichen- Bahn ausgehen. Zu Beginn der Bildentstehung ist dieser Umstand noch leicht mitzuverfolgen.

⇒) Abgesehen vom Variieren der Geschwindigkeits- und Beschleunigungsbeträge liegt der (nervliche) Reiz dieser Bewegung vor allem darin, dass sich deren Richtung relativ zur Person ständig ändert. Denkt man sich nämlich die Lage der Person, die in Abb.22c nur beim Start -in Gestalt des Pfeiles- festgehalten ist und ab da mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω_2 schwenkt, und das Geschwindigkeitsbild Abb.23 übereinander gelegt, errahnt man den ständig variierenden Winkel zwischen den beiden Vektoren. Konkreter liest man dies aus Abb.22d ab, in der der "Steg" die Person symbolisiert und die Verbindungen an dessen Außenende die Richtung der Geschwindigkeiten wiedergeben. Der dazwischenliegende Winkel unterliegt einer starken Änderung!

Ebenso verändert sich der Winkel zwischen Beschleunigungsvektor (Abb.24a) und Geschwindigkeitsvektor.

4.2 Aussenzykloide

Mit- statt Gegenläufigkeit des Epizyklus wird im **Funktioneditor** einfach durch **Löschung der negativen Vorzeichen in den Argumenten des dritten Gleichungspaares** und **neuerliche Inaktivierung** erzielt.

Der Rastpolradius beträgt für diesen Fall $\rho_0 = 2R_1 / 3$, der Gangpolradius $\rho = R_1 / 3$. Mit Eingabe und Ausführung der Befehlskette von **Abb.25a** führen wir uns die neue Situation vor Augen (Abb.25b) und könnten mit **[TRACE]** die Bahn wiederum abtasten.

```
Shade(-sqrt((10/3)^2-X^2),sqrt((10/3)^2-X^2),-10,10,4,2):C
ircle(5,0,5/3):L
ine(5,0,9,0):Lin
e(9-dX,-dY,9-dX,dY)
```

Abb. 25a

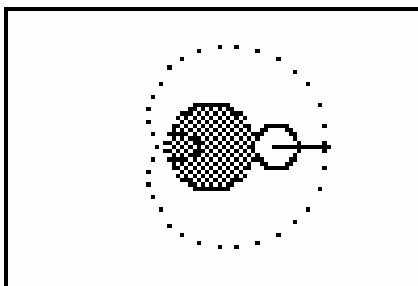


Abb. 25b

Das Weitere ist Routine ...

5. Allgemeine Bahnbewegung

Nunmehr möchten wir einige kinematische Charakteristika bei beliebig verlaufender Bahn erkunden! Als

5.1 Fallbeispiel

möge uns die Parameterkurve

$$\begin{aligned} x &= 5t - 15 \text{ m} ; \\ y &= (5t - 2)(5t - 17)(5t - 28)/150 - 3 \text{ m} \end{aligned} \quad (13a,b)$$

für $t = 0, 0.25, 0.5, \dots, 6 \text{ sec}$ dienen.

Nach Eingabe der Bahn (13a,b) in **[Y=]** (**Abb.26a**), Anpassung von $T_{\max}=6$ und $T_{\text{step}}=0.25$ im **[WINDOW]** (**Abb.26b**)

```
Plot1 Plot2 Plot3
X1T=5T-15
Y1T=(5T-2)(5T-17)(5T-28)/150-3
X2T=
Y2T=
X3T=
Y3T=
```

Abb. 26a

```
WINDOW
Tmin=0
Tmax=6
Tstep=.25
Xmin=-15.16129...
Xmax=15.161290...
Xscl=1
Ymin=-10
```

Abb. 26b

und **Start** der Programme **[GESCHW]** und **[BESCHL]** erhalten wir Abb.27, zu der mit **[DRAW] [0] [←] [↑]** noch der Kommentar hinzugefügt wurde.

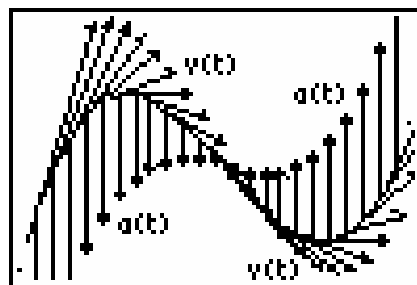


Abb. 27

[STAT] [1] gibt uns einen numerischen Einblick (Abb.28).

X	Y	VX	1
-15	-9.347	5	
-13.75	-5.107	5	
-12.5	-1.768	5	
-11.25	.74865	5	
-10	2.52	5	
-8.75	3.6247	5	
-7.5	4.1408	5	
<hr/>			
X(1) = -15			
YY	AX	AY	6
16.96	0	-14.42	
13.356	0	-13.17	
10.065	0	-11.92	
7.0854	0	-10.67	
4.4188	0	-9.417	
2.0646	0	-8.167	
.02292	0	-6.917	
<hr/>			
AY(1) = -14.416666...			

Abb. 28

Wir gewinnen folgende

5.2 Spezifische Erkenntnisse

⇒) Diese Bewegung (auf der kubischen Parabel) zeigt keine waagrechten Beschleunigungskomponenten. In der Tat verläuft sie in dieser Richtung -laut Glg.13a- gleichförmig. Besonders eindrucksvoll ist dieser Sachverhalt der Statistiktafel zu entnehmen!

⇒) Obwohl sich die Beschleunigung in diesem Beispiel als richtungskonstant erweist, fallen ihr auf Grund der schwenkenden Geschwindigkeit unterschiedliche Funktionen zu:

Vom linken Bildrand bis zum lokalen Höchstwert der Bahn wirkt sie verzögernd und immer geschwindigkeitsdrehender. Im Hochpunkt (und später im Tiefpunkt) hat sie allein zentripetale Wirkung. Vom Hoch- bis zum Wendepunkt der Bahn beschleunigt sie zudem, im Wendepunkt ist der Körper kurz beschleunigungslos, und vom Wendepunkt bis zum Tiefpunkt hat sie unter anderem wieder verzögernde Wirkung. Ab diesem bekommt sie immer mehr den Charakter einer Translationsbeschleunigung. Achten Sie bei diesen Schlüssen stets auf den Winkel zwischen Geschwindigkeit und Beschleunigung!

⇒) Der Umstand, dass Bereiche negativer Beschleunigungen zu einer nach unten gekrümmten Bahn und solche positiver Beschleunigungen zu einer nach oben gekrümmten führen, weist nicht zufällig Übereinstimmung mit Regeln zur traditionellen Kurvendiskussion auf. Nach den Gleichungen (1) und (2) ist die Beschleunigung doch die zweite (Zeit)-Ableitung der Bahnkurve!

5.3. Allgemeine Einsichten

⇒) Die Geschwindigkeiten schneiden die Bahn in mindestens 2 Punkten. Sie sind zu dieser Sekanten.

⇒) Je kürzer das Zeitintervall⁸ gewählt wird, desto näher rücken die vorgenannten Schnittpunkte zusammen. Die Geschwindigkeiten werden zusehends zu Tangenten.

⇒) Mit Verkürzung des Zeitintervalls⁸ ändert sich aber nur wenig am Betrag der Geschwindigkeiten.

⇒) Abgesehen von der vorgenannten, geringen Abhängigkeit, nimmt die Größe der Geschwindigkeit mit größeren Distanzen zwischen benachbarten Punkten (Wegen) proportional und mit Verringerung des dazwischenliegenden Zeitintervalls⁸ antiproportional zu. Siehe auch Kapitel 1.4 !

⇒) In Kurven weisen die Geschwindigkeiten stets zur Kurvenaußenseite -was jeder überraschend auf Glatteis geratene Autofahrer bestätigen wird.

⇒) Die Beschleunigungen -und damit auch die nötigen Kräfte- weisen immer auf die Kurveninnenseite und bewirken in der Folge ein Schwenken der Geschwindigkeiten nach dieser Seite. Im Straßenverkehr rühren diese Kräfte vom Asphalt auf die Reifen her. Schwinden sie wegen eines zu kleinen Reibungskoeffizienten, schwenkt die Geschwindigkeit nicht....

⇒) Die Größe der Beschleunigung nimmt mit der Krümmung proportional und mit der Geschwindigkeit gar quadratisch zu. Siehe auch Kapitel 1.4 !

6. Ableger des Problems

Wie variationsreich der angerissene Fragen-Komplex ist, ersieht man etwa an der folgenden

6.1 Aufgabenstellung

, in der es gar nicht erst um die auftretenden Beschleunigungen, sondern nur um ein "Folgeprodukt" der Geschwindigkeiten, nämlich die kinetische Energie und ihre "Vernichtung" geht:

Wir wollen uns nämlich zu einem selbstgesteckten Speedway-Kurs¹¹ ein Bild über die erforderlichen Sturzräume machen.

Als Areal möge uns ein etwa 200m langes Rechteck in den Proportionen des Rechnerdisplays zur Verfügung stehen.

Schon zum Zwecke einer komfortablen Eingabe der Bahndaten und ihrer Abspeicherung empfiehlt sich die Verfassung eines Programms, das wir in mehreren Abschnitten aufbauen wollen.

6.2 Erarbeitung des Programms

Werfen Sie absatzweise einen Blick ins Programmlisting!

Nach Verankerung der üblichen Voreinstellungen haben wir uns Gedanken über die Bereichsgrößen zu machen.

So erfordert das Display mit seinen 95 Pixeln in der Waagrechten zur annähernden Unterbringung unseres Areals ein Pixelintervall von $\Delta x = 2\text{m}$, das zwecks winkeltreuer Darstellung auch für ΔY zu gelten hat.

Das Zeitintervall wollen wir so wählen, dass bei 10km/h etwa 1 Pixelintervall, also 2m durchlaufen werden, was einen Wert von $\Delta t = 2\text{m}/v = 2\text{m}/(10/3.6\text{m/sec}) = 0.72\text{sec}$ ergibt, sodass wir uns für $T_{\text{step}} = 0.7\text{sec}$ entscheiden.

Damit sich bei den heranzuziehenden Listenspeichern keine Werte aus längeren Serien vorangegangener Programmläufe halten können, müssen wir sicherheitshalber ihre Löschung veranlassen. Bei den Geschwindigkeitslisten erfolgt dies direkt mit "DelVar ..", bei den Kurs- und Sturzraum-Listen indirekt durch die Listen-Speicher-Befehle "{X}→X", "{Y}→Y" bzw. "L.....→S", "L.....→SX", "L.....→SY".

Innerhalb einer Schleife richten wir mit "Input" die grafische Eingabe der Kurs-Punkte ein, mit "Pt-On(.." ihre Darstellung im Display und mit "X→..", "Y→.." die zellenweise Abspeicherung in den Listen LX , LY . Im Verbund mit den vorangegangenen Ortsdaten $LX(I)$, $LY(I)$ ermitteln wir die Geschwindigkeitskomponenten und den resultierenden Betrag und speichern diese Werte zellenweise in den Listen $L VX(I)$, $L VY(I)$ bzw. $L V(I)$ ab.

Beim "Repeat"-Befehl selbst muss uns bewusst sein, dass die dazu formulierte Abfrage nach allfälliger Startnähe im Programmlauf nicht an dieser Stelle, sondern erst beim zugehörigen "End"-Befehl gestellt wird!

Nach Verlassen der "Repeat"-Schleife haben wir zu sehen, dass auch dem letzten Kurspunkt alle Verarbeitungsschritte in analoger Weise zukommen.

Damit haben wir den Eingabeteil vorerst abgeschlossen und können mit dem "Pause"-Befehl innehalten. Im nächsten Schritt verbinden wir mittels einer "For"-Schleife alle Fahrerpositionen, um den Kurs hervorzuheben und halten mit "Pause" wieder an.

Nun widmen wir uns dem Stürzen, bei dem die momentane kinetische Energie $E_{\text{kin}} = mv^2/2$ per Schlittern

über den Weg s unter Reibung $R = k \cdot m \cdot g$ (k ..Reibungskoeffizient) "abgebaut" wird. Aus $E_{\text{therm}} = R \cdot s = E_{\text{kin}}$ erhalten wir für den Sturzweg $s = v^2/(2kg)$. Seine Richtung ist -mangels vorhandener Lenkmöglichkeiten- dieselbe wie die der augenblicklichen Geschwindigkeit.

So strecken wir die Geschwindigkeitsdaten per Listenoperation in einem Zug jeweils mit ihren Individualwerten $v/(2kg)$ und speichern die Resultate in den Bremsweglisten $L SX$, $L SY$ bzw. $L S$ ab.

Beim Zeichnen des Sturzraumvektors müssen wir darauf achten, dass sich die Koordinaten seiner Spitze aus dem Fußpunkts- plus dem Bremswegvektor zusammensetzen.

Da die Enden der Sturzraumvektoren weit auseinanderliegen -was in der Praxis ebenfalls zu beobachten ist-, umranden wir sie in ähnlicher Weise wie bei den Bahnpunkten. Dem Umstand, dass die Geschwindigkeits- und Bremsraumlisten um jeweils einen Wert ärmer als die Positionslisten sind, haben wir in dieser Weise Rechnung zu tragen, als wir den schließenden Schritt zur Startsituation gesondert auszuprogrammieren haben. Dabei dürfen wir den Index "I" unverändert übernehmen, weil er bei Verlassen der For-Schleife noch einmal inkrementiert wurde.

Nun erst kümmern wir uns um Zeit- und Geschwindigkeitseinblendungen.

Für erstere müssen wir an geeigneter Stelle des Programms die Anfangszeit festsetzen, weiters mit der Programmzeile "T+Tstep→T" fürs Fortschreiten dieses Wertes in Tstep-Schritten sorgen und dann vor jeder grafischen Eingabe mit "Text(.." die aktuelle Zeit einblenden. Unmittelbar davor sollten wir mit der Anweisung "Text(..,.., ".....)" für eine Löschung längerer Altwerte sorgen.

Ähnlich installieren wir schließlich die Geschwindigkeitseinblendung.

Der für die Eingabe des Rundkurses etwas lästigen Eigenschaft des Rechner-Betriebssystems, den Schlepp-Cursor gegenüber der letzten Position automatisch um 1 Pixel herabzusetzen, begegnen wir weitgehend durch Einfügen einer unmittelbar vor den "Input"-Befehlen zu platzierenden, ausladenden "Text(..."-Anweisung¹².

Um die Möglichkeit zu erlangen, die Darstellung des letzten Rundkurses in den wesentlichen Stationen nochmals ablaufen zu lassen, fügen wir noch ein Verzweigungs Menü ein. Sein zusätzlicher Repetitionszweig beginnt mit "Lbl 1" und zeichnet den Kurs nochmals in punktierter Form; der bestehende Kurssetzungszweig erhält die Anfangsmarke "Lbl 2".

Beide Zweige führen bei "Lbl 3" wieder zusammen und laufen ab hier ident weiter.

Zuletzt hängen wir mit "SetUpEditor ..." noch eine tabellarische Zusammenschau über die wichtigsten Kursdaten ans Programm an.

Wenn wir nach **[PRGM] <NEW>** nun das gesamte Programm eingegeben (**Listing 5**) und auf Richtigkeit kontrolliert haben, steigen wir mit **[QUIT]** aus dem Programmeditor aus und können an die

6.3 Ausführung des Programms

gehen, indem wir es mit **[PRGM] <SPEEDWAY> [ENTER]** starten.

Bei Eingabe des dritten Kurs-Punktes muss man sich vom Start mehr als (1/1) Pixelintervalle entfernt haben, damit die folgend beschriebene Programmeinrichtung nicht zum Bumerang wird!

Sobald man sich nämlich ab der dritten Kurspunkt-Eingabe dem Start auf (1/1) Pixelintervalle genähert hat, betrachtet das Programm den Rundkurs für geschlossen, korrigiert die eben gewählte Position genau auf den Startort, stellt die Frage nach weiteren Standorten ein und nimmt die weitere Bearbeitung der Daten in Angriff.

Bei Eingabe der Bahnpunkte haben wir nicht allein auf die beabsichtigte Linienführung zu achten, sondern legen mit dem Abstand zum letzten Punkt gleichzeitig auch die momentan gewünschte Geschwindigkeit fest. Wie bei der Programmerstellung geplant, macht dabei 1 Pixelintervall einen Wert von $2/0.7 \cdot 3.6 \text{ km/h} \approx 10 \text{ km/h}$ aus. Das gewählte Tempo sollte den Wert von 80 km/h nicht überschreiten, um weit über das Display hinausreichende Sturzwege zu vermeiden.

Falls im FORMAT-Editor mit <CoordOn> die Koordinatenanzeige eingeschaltet ist, geben die X- und Y-Werte in der Fußzeile die Position des Cursors in m, bezogen auf die linke-untere Displayecke an.

Die links-oben erscheinende Zeitangabe "t=..." gibt den Zeitpunkt zum gerade zur Auswahl stehenden Kurspunkt in sec an. Mit Abschluss des Rundkurses geht das Symbol "t" in "T" über, da es sich nunmehr um die Rundenzeit handelt.

Die rechts-oben erscheinende Geschwindigkeitsangabe "v=..." gibt die Durchschnittsgeschwindigkeit des Fahrers während des letzten Zeitintervalls in km/h an.

Am Beispiel der Streckenführung von Abb.29a,b kommen wir zum doch etwas überraschenden Schluss, dass die größten Sturzräume nicht neben den engsten Kurven, sondern im Auslauf rasch zu fahrender, langgezogener Krümmungen erforderlich sind (Abb.29c,d).

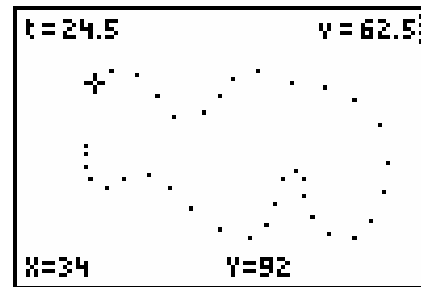


Abb. 29a



Abb. 29b

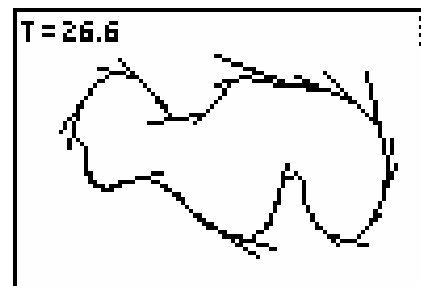


Abb. 29c

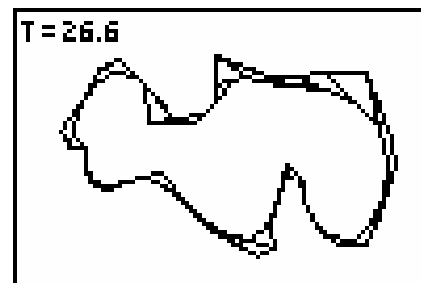


Abb. 29d

Nun können Sie es mit schlingernden Abschnitten, geraden Stücken, eckigen Verläufen etc. versuchen!

Am Ende eines Programmlaufs hat man noch die Möglichkeit, sich mit **[STAT] [1]** einen numerischen Überblick über Kurskoordinaten, Geschwindigkeiten und Sturzraumbreiten zu verschaffen (Abb.29e). Im Gegensatz zur in der Grafik benutzten Geschwindigkeitseinheit km/h liegt den Geschwindigkeitswerten in der Liste "V" die Labor-Einheit m/sec zugrunde!

Y	V	S	4
62	5.7143	2.0803	
58	8.5714	4.6808	
52	9.0351	5.2009	
46	12.778	10.402	
42	12.778	10.402	
46	17.379	19.243	
48	16.66	17.683	
S(1) = 2.080342840...			

Abb. 29e

Im Prinzip lässt sich die Bahn durch Änderungen in den X,Y-Listen korrigieren und grafisch über die Menüoption "ALT" erneut aufbereiten.

7. Schlussbetrachtung

Die beiden letzten Kapitel sind mit den vorangehenden so innig verzahnt, dass man sie ohne weiteres an den Anfang der Betrachtungen stellen könnte.

In dieser Darstellung kann der Eindruck entstehen, dass das Rechner-Handling -gemessen am Resultat- zu umfangreich ausfällt. Abgesehen davon, dass nicht jeder angeführte Schritt zwingend nachzuvollziehen ist, lohnt der Aufwand aber insofern, als die SchülerInnen jede Phase der Erarbeitung miterleben und die dahinter stehende Problematik dadurch eher verstehen und "behalten".

Drastisch lässt sich das Handling zu gleichförmiger und gleichmäßig beschleunigender Kreisbewegung vereinfachen, indem man das diesem Artikel angeschlossene Programmpaket "KREISBEW" kostenlos

herunterlädt und damit die kinematischen Tabellen und deren grafische Umsetzung per Knopfdruck serviert bekommt.

Auch die beiden Hundebilder stehen unter "HUND1" und "HUND2" zum Downloaden bereit.

Wenn man den Artikel vom Anfang her durcharbeitet, kann man sich stur an die genannten Anweisungen halten. Greift man dagegen Teile heraus, hat man sich stets zu kümmern, ob der aktuelle Status des Rechners wohl mit jenem der Artikel-Stelle übereinstimmt. Insbesondere sollte man in diesem Fall prüfen, ob die Bereichsgrößen im Window stimmen und mit <ZSquare> homogenisiert sind, ob die Statistikplots konform ein- bzw. abgeschaltet sind, ob die richtigen Funktionen aktiviert und die anderen deaktiviert sind und ob das Gerät bei Verwendung von Winkelfunktionen aufs Bogenmaß eingestellt ist!

Autor:

Mag. Heinz Pichler

Liesersteggasse 5

A-9800 Spittal/Drau

E-Mail: Pichler_H@lycos.at

8. Programm-Listings

Programmlisting 1

PROGRAM: GESCHW

Param

PlotsOfff : FnOn 1

seq(X 0, T, Tmin, Tmax, Tstep)üX

seq(Y 0, T, Tmin, Tmax, Tstep)üY

Del Var áVX: Del Var áVY

For(I, 1, dim(áX)-1)

(áX(I+1)-áX(I))/TstepüáVX(I)

(áY(I+1)-áY(I))/TstepüáVY(I)

(áX(I)+áX(I+1))/2üC

(áY(I)+áY(I+1))/2üD

áVX(I)üE

áVY(I)üF

C+EüG

D+FüH

Line(C, D, G, H)

prgmVPFEIL

End

SetUpEditor X, Y, VX, VY

Kommentare:

Unerl aessliche

Voreinstellungen

Erstellung der

Ortskoordinaten

Iterative Erstellung der

Geschwindigkeitskomponenten

Koordinaten der

Pfeilwurzel⁹

Komponenten der

Geschwindigkeiten

Koordinaten der

Pfeilspitze

Pfeilschaft

Pfeilspitze

Einrichtung der Tabelle

Programmlisting 2

PROGRAM: BESCHL

Del Var áAX: Del Var áAY

For(I, 1, di m(áVX) - 1)

(áVX(I + 1) - áVX(I)) / Tstep ð áAX(I)

(áVY(I + 1) - áVY(I)) / Tstep ð áAY(I)

áX(I + 1) ð C

áY(I + 1) ð D

áAX(I) ð E

áAY(I) ð F

C + E ð G

D + F ð H

Li ne(C, D, G, H)

prgmVPFEI L

End

SetUpEdi tor X, Y, VX, VY, AX, AY

Kommentare:

I terative Erstel lung der
Beschl euni gungskomponenten

Koordi naten der
Pfei l wurzel ¹⁰

Komponenten der
Beschl euni gungen

Koordi naten der
Pfei l spi tze

Pfei l schaft

Pfei l spi tze

Ei nri chtung der Tabel l e

Programmlisting 3

PROGRAM: VPFEI L

RðPÁ(úE, úF)

Li ne(G, H, G+. 7cos(Ans+. 5), H+. 7si n(Ans+. 5))

Li ne(G, H, G+. 7cos(Ans-. 5), H+. 7si n(Ans-. 5))

Programmlisting 4

PROGRAM: TWI STER

Shade(Ymi n, Ymax, Xmi n, ú10): Shade(Ymi n, Ymax, 10, Xmax)

Shade(ð(10Ü-XÜ), Ymax): Shade(Ymi n, úð(10Ü-XÜ))

Text(57, 68, " [ENTER]")

Radi an

5üA: 0üB: 9üC: 0üD

For(Á, 0, 2Ä+. 1, Ä/12)

5cos(Á) üE: 5si n(Á) üF

E+4cos(ü2Ä) üG: F+4si n(ü2Ä) üH

For(P, 0, ü2Ä, üÄ/8)

Pt-On(E+5cos(P), F+5si n(P)): End

Li ne(E, F, G, H)

Pause

For(P, 0, ü2Ä, üÄ/8)

Pt-Off(E+5cos(P), F+5si n(P)): End

Li ne(A, B, E, F): Li ne(C, D, G, H)

EüA: FüB: GüC: HüD: End

Programmlisting 5

PROGRAM: SPEEDWAY

RectGC: Gri dOff: AxesOff

Pl otsOff : FnOff : Cl rDraw: Cl rHome

0üXmi n: 0üYmi n: 2ü%X: Ansü%Y

0. 7üTstep

Menu("WAHL", "ALT", 1, "NEU", 2)

Lbl 1

For(I, 1, di m(áX))

Pt-On(áX(I), áY(I))

End

Goto 3

Lbl 2

Del Var áVX: Del Var áVY: Del Var áV

Text(0, 1, "t = 0")

Text(30, 15, "")

Kommentare:

Vorei nstel l ungen

Verdraengen der Vergangenhei t

Entzerrtes Grafi kfenster

Zei tl . Beobachtungsinterval l

Betri ebsartenwahl

WI EDERGABE-ZWEI G:

Erneutes Zei chnen

aller Posi ti onen

und

Sprung zur Fortfuehrung

NEUSTART-ZWEI G:

Loeschen von Al tlasten

Startzei t-Anzei ge

Cursor pl atzi eren

```

Input
{X}üX: {Y}üY
Pt-On(X, Y)
Text(0, 71, "v = 0")
TstepüT
Text(0, 10, T)
Text(min(i Part((Ymax-Y)/¾Y-. 5), 57),
      int((X-Xmin)/¾X+. 5), "")
Input
Repeat (X-áX(1))Ü+(Y-áY(1))Ü<3¾XÜ
  Pt-On(X, Y)
  di m(áX)ül
  XüáX(I+1)
  YüáY(I+1)
  (X-áX(I))/TstepüáVX(I)
  (Y-áY(I))/TstepüáVY(I)
  ð(áVX(I)Ü+AnsÜ)üáV(I)
  Text(0, 85, " ")
  Text(0, 81, 3. 6*áV(I))
  T+TstepüT
  Text(0, 14, " ")
  Text(0, 10, T)
  Text(min(i Part((Ymax-Y)/¾Y-. 5), 57),
        int((X-Xmin)/¾X+. 5), "")
Input
End
Text(0, 0, "T")
Text(0, 71, " ")
di m(áX)ül
áX(1)üáX(I+1)
áY(1)üáY(I+1)
(áX(1)-áX(I))/TstepüáVX(I)
(áY(1)-áY(I))/TstepüáVY(I)
ð(áVX(I)Ü+AnsÜ)üáV(I)
Lbl 3
Pause
For(I, 1, di m(áX)-1)
  Li ne(áX(I), áY(I), áX(I+1), áY(I+1))
End
Pause
9. 81üG: 0. 8ük
áVÜ/(2KG)üs
áVX*áV/(2KG)üSX
áVY*áV/(2KG)üSY
For(I, 1, di m(áS))
  Li ne(áX(I), áY(I), áX(I)+áSX(I), áY(I)+áSY(I))
End
Pause
For(I, 1, di m(áS)-1)
  Li ne(áX(I)+áSX(I), áY(I)+áSY(I),
        áX(I+1)+áSX(I+1), áY(I+1)+áSY(I+1))
End
Li ne(áX(I)+áSX(I), áY(I)+áSY(I),
      áX(1)+áSX(1), áY(1)+áSY(1))
SetUpEdi tor X, Y, V, S

```

```

Wahl des Startortes,
Eroeffnen der Ortslisten und
Zeichnen des Starts
Geschwindigkeitsanzeige
Zeitsetzung
Zeitanzeige
Cursor tunlichst auf die
Startposition setzen
Naechste Positionswahl
Pruefen auf Kursschliessung
Zeichnen der Aktual lage
Aktuelle Listenlaenge
Speichern der Aktual lage
in den Ortslisten
Geschwindigkeit gemaess
 $v_x=(x-x_0)/¾t$  ;  $v_y=(y-y_0)/¾t$ 
Geschwindigkeitsbetrag
Al tempo-Loeschung (9 Blanks)
Geschwindigkeitsanzeige
Gang der Zeit
Al tzeit-Loeschung (13 Blanks)
Zeitanzeige
Cursor tunlichst auf die
Letztposition setzen12
Weitere Positionswahl
Schleifenschluss
Rundenzeit-Symbol
Tempoloeschung (23 Blanks)
Aktuelle Listenlaenge
Speichern d. Ziel -Start-Lage
in den Ortslisten
Endgeschwindigkeit gemaess
 $v_x=(x-x_0)/¾t$  ;  $v_y=(y-y_0)/¾t$ 
Endgeschwindigkeitsbetrag
GEMEINSAME FORTFUEHRUNG:
Zwischenstopp
Verbinden aller
Positionen
und
Zwischenstopp
Defin. Erdbeschl. Reibkoeff.
Bremswege  $s=v^2/(2a)$  mit  $a=k*g$ 
und ihre
Komponenten
Zeichnen aller
Sturzwege
und
Zwischenstopp
Verbinden
aller
Aussenpunkte
und
Schliessen der
Umrandung
Tabellezusammenstellung

```

- ¹) Durch Annahme dieses Irrational-Wertes legt der Körper den Irrational-Wert des Kreisumfanges in einer ganzzahligen Umlaufzeit $T = 2\pi R / v$ zurück!
- ²) [] Taste drücken! Auf erforderliches [2nd] oder [ALPHA] wird in der Darstellung verzichtet!
- ³) Von fett gedruckten Abbildungen sind die Inhalte auszuführen!
- ⁴) Wegen der folgenden Differenzbildungen, bei denen die Werteanzahl stets um 1 sinkt, setzen wir die zeitliche Obergrenze Tmax ein Zeitintervall über der Umlaufzeit an!
- ⁵) < > ... Option aufsuchen und mit [ENTER] bestätigen!
- ⁶) Diesmal wird dem Irrationalwert des Weges ein irrationales Zeitintervall entgegengestellt, um zu einer ganzzahligen Anzahl der Zeitschritte für 1 Umlauf zu kommen.
- ⁷) Falls die Vektorpfeile die Bildinformation mehr verschleiern als klären, entfernt man im betreffenden Programm einfach die Zeile mit dem Sprungbefehl "prgmVPFEIL".
- ⁸) Bei Verringerung des Zeitintervalls Tstep darf der Ausdruck (Tmax-Tmin)/Tstep den Wert 998 nicht übersteigen, ansonsten es wegen der Maximal-Listenlänge von 999 zum Abbruch kommt!
- ⁹) Der Geschwindigkeitsvektor resultiert aus den Daten zweier, aufeinander folgender Orte. Sein Fußpunkt liegt daher mittig zu den beiden Orten.
- ¹⁰) Da der Beschleunigungsvektor bereits auf drei aufeinander folgenden Ortsdaten aufbaut, ist seine Pfeilwurzel dem jeweils mittleren Ort zuzuordnen.
- ¹¹) Im Gegensatz zum Ausritt mit einem Gokart sind Lenkbewegungen nach einem Sturz mit dem Bike nahezu ausgeschlossen, was unserem Bedürfnis nach Kalkulierbarkeit entgegenkommt!
- ¹²) Diese Anweisung sollte man in Erinnerung behalten, da sie in jedem Programm mit polygonhafter Eingabe unmittelbar vor dem grafischen Input-Befehl einsetzbar ist!