Eine Formel zur Berechnung von $\sqrt[n]{a}$ oder: Iteratives Lösen von $x^n = a$

Henning Körner

Fragestellung:

Wie kann man die Zahl finden, deren dritte Potenz 273 ist, also $\sqrt[3]{273}$ berechnen?
Den Schülerinnen und Schülern bieten sich aufgrund ihrer Vorkenntnisse zunächst (u.a.) die beiden folgenden Möglichkeiten, sich der Fragestellung zu nähern.

(1) Intervallhalbierung:

$$6 < \sqrt[3]{273} < 7 \quad \text{weil} \quad 6^3 < 273 < 7^3$$
$$6 < \sqrt[3]{273} < 6{,}5^3 \quad \text{weil} \quad 6^3 < 273 < 6{,}5^3$$
$$6{,}25^3 < \sqrt[3]{273} < 6{,}5^3 \quad \text{weil} \quad 6{,}25^3 < 273 < 6{,}5^3$$
$$6{,}375^3 < \sqrt[3]{273} < 6{,}5^3 \quad \text{weil} \quad 6{,}375^3 < 273 < 6{,}5^3$$

(2) Graphisch:

Die Schülerinnen und Schüler suchen nach dem Schnittpunkt von $y = x^3$ und $y = 273$. Zoomen ist hier nichts anderes als eine graphisch aufbereitete Intervallschachtelung.

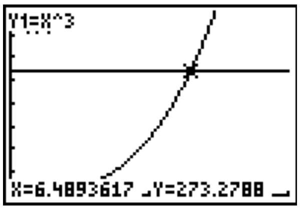


Abb. 1

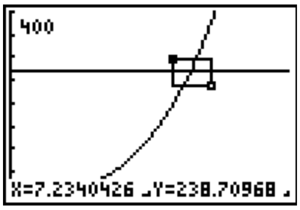


Abb.2

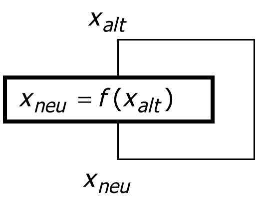
Der Unterricht sollte die Möglichkeit eröffnen, die Ansätze zu bewerten sowie die Herangehensweise als solche zu reflektieren. Ein Nachteil bei beiden Verfahren ist, dass man immer wieder hinschauen muss, wo man weitermacht, außerdem ist die Näherung nur sehr langsam; nach 4 Schritten wissen wir bei der Intervallhalbierung immer noch nicht wie die erste Stelle hinter dem Komma lautet.

Iteration über Heronverfahren

Die gleiche Situation hatten wir aber schon einmal. Als wir z.B. $\sqrt{12}$ berechnen wollten, ist es uns mit Hilfe geometrischer Überlegungen (Quadrat durch Rechtecke annähern) gelungen, eine Formel zu entwickeln, mit der sehr schnell und komfortabel die Wurzel berechnet werden kann (*Heronverfahren*). Diese Formel lautet für $\sqrt{a}$:

$$x_{neu} = \frac{1}{2}\left(x_{alt} + \frac{a}{x_{alt}}\right) \qquad (*)$$

Wir müssen einen Startwert wählen, dann muss man mit der Formel den neuen x-Wert bestimmen, diesen dann zum alten x-Wert machen, dann mit der Formel den neuen x-Wert bestimmen, diesen dann zum alten x-Wert machen, dann mit der ...



Der Taschenrechner berechnet auf diese Weise Wurzeln! Schüler stellen nun von selbst die Frage: Gibt es für $\sqrt[3]{a}$ auch so eine Formel?

Wir überlegen:

- $\sqrt{a}$ ist ja die Zahl deren Quadrat *a* ist, also Lösung der Gleichung $x^2 = a$ (diese Gleichung hat übrigens noch eine Lösung).
- Mit der Formel erhalten wir eine Näherungslösung der Gleichung. Auf dem GTR erhalten wir irgendwann (meist ziemlich schnell) immer wieder den gleichen Wert, aber das liegt ja am Runden, wir wissen ja, dass die Dezimaldarstellung oft nicht endlich ist. Wann würden wir beim exakten Rechnen immer wieder denselben Wert erhalten? Wenn $x_{neu} = x_{alt}$ ist, ändert sich nichts mehr, alles bleibt fest (fix), also:

$$x_{neu} = \frac{1}{2}\left(x_{neu} + \frac{a}{x_{neu}}\right), \text{ also: } x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right) \qquad (\#)$$

Wir formen jetzt die letzte Gleichung ein wenig um, wir spielen mit ihr:

$$x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right) \Leftrightarrow 2x = x + \frac{a}{x}$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{a}{x} \Leftrightarrow x^2 = a$$

Oh! Die Formel für das Heronverfahren ist also nichts anderes als die umgeformte Ausgangsgleichung $x^2 = a$!
Wenn wir also jetzt unsere neue Ausgangsgleichung $x^3 = a$ auf ähnliche Weise umformen, haben wir (vielleicht) eine Formel. Wir müssen so umformen, dass links „*x*" alleine steht und rechts etwas „*mit x*" steht. Hier muss also genau das gemacht werden, was sonst nicht gemacht werden durfte! Wenn wir eine solche Formel haben, dann gilt wieder:

Wir wählen einen Startwert, dann mit der Formel den neuen x-Wert bestimmen, diesen dann zum alten x-Wert machen, ...

Es gibt natürlich mehrere Möglichkeiten für solche Umformungen. Die Schülerinnen und Schüler versuchen einfach einige, wir wählen $a = 273$ und iterieren („`Enter`" wiederholt den letzten Befehl):

Wir suchen eine „Heron"-Formel

1) Naheliegend ist folgende Umformung:

$$x^3 = 273 \Leftrightarrow x = \frac{273}{x^2} \qquad (1)$$

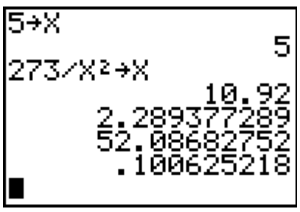


Abb. 3

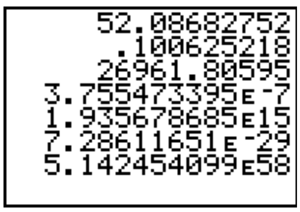


Abb.4

Die Werte springen zwischen ganz kleinen und ganz großen Werten hin und her, sie scheinen sich 0 und ∞ zu nähern, nicht einem festen Wert.

2) Diese Umformung ist weniger naheliegend:

$$x^3 = 273 \Leftrightarrow x(x^2+1) = 273 + x$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{273+x}{x^2+1} \qquad (2)$$

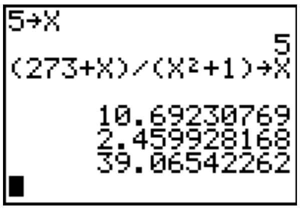


Abb.5

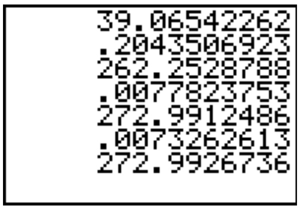


Abb.6

Hier stabilisieren sich zwar die Werte, aber nicht bei <u>einem</u> Wert sondern abwechselnd bei <u>zwei</u> Werten und beide passen überhaupt nicht.

3) Carina orientiert sich an der Heron-Formel und baut:

$$x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{273}{x^2}\right) \qquad (3)$$

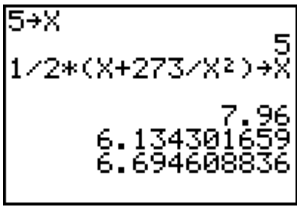


Abb.7

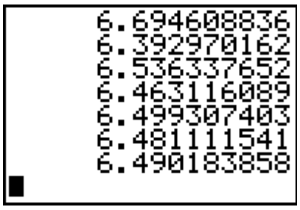


Abb.8

Die Werte stabilisieren sich anscheinend, wenn man noch weiter iteriert, bleiben sie irgendwann einmal fest. Dies geschieht zwar erst nach 33 Schritten, aber Carina hat das Problem mit einer produktiven Analogiebildung gelöst!

4) Herr Körner lässt diese Umformung vom Himmel fallen:

$$x^3 = 273 \Leftrightarrow 3x^3 = 2x^3 + 273$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2x^3+273}{3x^2} \qquad (4)$$

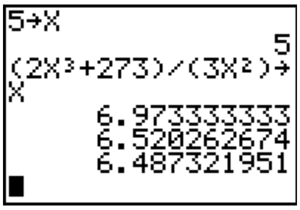


Abb.9

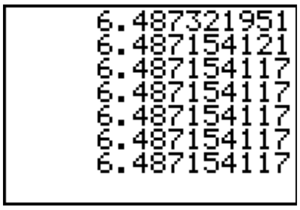


Abb.10

Die Werte stabilisieren sich wie beim Heronverfahren sehr schnell, sie konvergieren gegen die gesuchte Zahl.

Die Formel zu (4) liefert genau das, was wir wollten! Selbst wenn wir mit anderen Startwerten beginnen, stabilisieren sich die Werte schnell. Wir verallgemeinern von *273* auf *a* und erhalten folgende Formel:

$$x = \frac{2x^3+a}{3x^2} \qquad (\#\#)$$

Mit dieser Formel berechnet auch der Taschenrechner $\sqrt[3]{a}$.

Als nächstes suchen wir jetzt eine Formel für $\sqrt[4]{a}$. Suchen brauchen wir eigentlich nicht mehr, denn wir können ja Carinas Ansatz auf die neue Gleichung übertragen und erhalten:

$$x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x^3}\right)$$

Eine Überprüfung zeigt, dass die Werte sich auch hier einem bestimmten Wert nähern und sich stabilisieren, aber wieder langsam. Vielleicht besteht ja auch ein Zusammenhang zwischen der Körnerformel (4) und der Heronformel?! Versuchen wir doch mal die Heronformel umzuformen („auf einen Bruch...“):

$$x = \frac{x}{2} + \frac{a}{2x} = \frac{x^2+a}{2x} = \frac{1x^2+a}{2x^1}$$

Ein Vergleich mit (##) lässt die Vermutung aufkommen, dass

$$x = \frac{3x^4+a}{4x^3} \qquad (\#\#\#)$$

eine geeignete Formel für $\sqrt[4]{a}$ ist. Wir überprüfen zunächst, ob wir von $x^4 = a$ zu (###) kommen:

$$x = \frac{3x^4+a}{4x^3} \Leftrightarrow 4x^4 = 3x^4 + a \Leftrightarrow x^4 = a$$

So weit, so gut; jetzt iterieren und hoffen wir (und wählen a = 362):

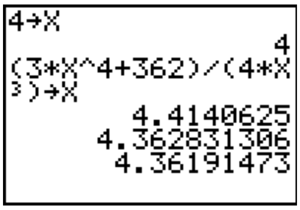


Abb. 11

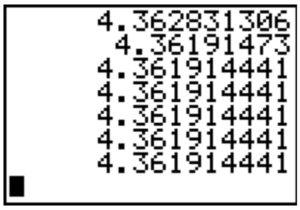


Abb. 12

Es klappt! Carinas Idee, sich auf die Heron-Formel zu beziehen, war richtig, nur gibt es da eben auch verschiedene Möglichkeiten. Damit haben wir eine Formel zur Berechnung von $\sqrt[n]{a}$ gefunden. Wir können das auch anders ausdrücken: Wir haben die Gleichung $x^n = a$ iterativ gelöst, zusammengefasst: Mit der Iterationsformel

$$x_{neu} = \frac{(n-1)\cdot x_{alt}^n + a}{n \cdot x_{alt}^{n-1}}$$

erhält man iterativ, näherungsweise, die positive Lösung der Gleichung $x^n = a$, also einen Näherungswert für $\sqrt[n]{a}$.

Gibt es noch Fragen? Natürlich.

- Für gerade Werte von *n* gibt es manchmal keine Lösung (a) und manchmal zwei Lösungen (b). Was passiert dann bei (a), wenn man die Iterationsformel anwendet? Wie bekommt man bei (b) die zweite Lösung iterativ, also wie findet man eine Iterationsformel dafür?
- Beim Heronverfahren haben uns geometrische Überlegungen geholfen, die Formel zu finden. Gibt es etwas Entsprechendes auch für $x^n = a$? Wenn nicht Herr Körner die Umformung 4) mit der Formel (##) gefunden hätte, was dann?
- Warum stabilisieren sich die Werte nur manchmal? Wie kommt es zu diesem seltsamen Pendeln zwischen zwei Werten oder dem Streben ins Unendliche?

Autor

Henning Körner, Oldenburg (D)
Studienseminar Oldenburg f.d. Lehramt an Gymnasien
hen.koerner@t-online.de