
Thema: Lage einer Ebene und Darstellung in 3D

Franz Schlöglhofer

☒ TI-NSPIRE™ CAS

Schlagworte: Ebenengleichung, Parameterdarstellung, Punkte einer Ebene, Gleichungen umformen, Lage einer Ebene im Koordinatensystem, 3D-Grafik

Unterrichtsmaterial

Aufgabe:

- 1) Von einer Ebene sind die drei Punkte $P = (1/-1/0)$, $Q = (-2/1/1)$ und $R = (1/0/1)$ gegeben. Berechne ohne Rechner eine Gleichung der durch die Punkte gegebenen Ebene.

Berechne eine Gleichung der Ebene mit Hilfe des TI-NSPIRE und stelle die Ebene grafisch dar in der 3D-Grafik zunächst mit einer Funktion $z(x,y)$ und dann in Parameterform. Erstelle die Berechnungen selbst oder verwende die fertige TI-NSPIRE-Datei.

Beschreibe die Berechnungen, die in der beigelegten .tns-Datei verwendet werden. Welche TI-NSPIRE-Anweisungen werden verwendet?

- 2) Gegeben sind jeweils drei Punkte. Ist durch drei Punkte immer eine Ebene gegeben? Stelle die Ebenen jeweils mit TI-NSPIRE dar. Beschreibe die Lage der Ebenen.

- a) $P=(1/-5/-2)$, $Q=(-2/3/4)$, $R=(1/3/4)$
- b) $P=(2/-1/2)$, $Q=(-4/2/-4)$, $R=(3/1/2)$
- c) $P=(4/1/3)$, $Q=(4/1/-1)$, $R=(-3/2/1)$
- d) $P=(1/1/0)$, $Q=(-2/3/1)$, $R=(1/4/4)$
- e) $P=(2/-1/0)$, $Q=(-1/0/3)$, $R=(-4/2/0)$

Ordne die Fälle a) – e) den folgenden Fällen I) – VI) zu.

- I) Die gegebene Ebene ist parallel zur xy - Ebene
- II) Der Ursprung $O = (0/0/0)$ ist ein Punkt der Ebene
- III) Die x -Achse ist parallel zur Ebene
- IV) Die z -Achse ist parallel zur Ebene
- V) Mit den angegebenen Punkten funktioniert die Gleichungsdarstellung nicht, die Parameterdarstellung schon.
- VI) Für die angegebenen Punkte existiert keine Ebene.

Überlege allgemein, wie man die einzelnen Fälle schon an der Gleichung der Ebene (also an den Koordinaten) erkennen kann.



Didaktischer Kommentar

Zunächst sollen für die einzelnen Angaben die Berechnungen ohne TI-NSPIRE durchgeführt werden, anschließend mit der fertigen TI-NSPIRE-Datei. Wichtig ist der geometrische Zusammenhang zwischen der Gleichungsdarstellung und der geometrischen Lage. Es könnten die Berechnungen in TI-NSPIRE selbst ausgeführt werden oder die Anweisungen der .tns-Datei erklärt werden.

Vorschlag zur Umsetzung

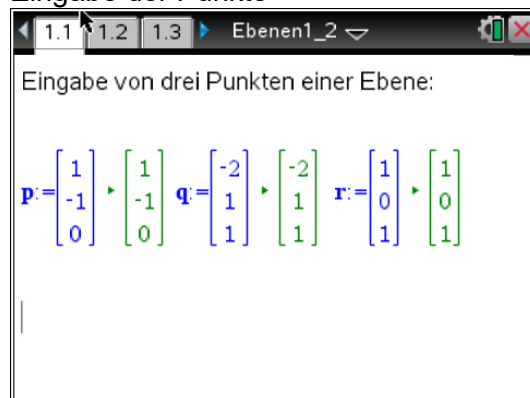
- 1) Berechnung Normalvektor: $\overrightarrow{PQ} = Q - P = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{PR} = R - P = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\vec{n} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

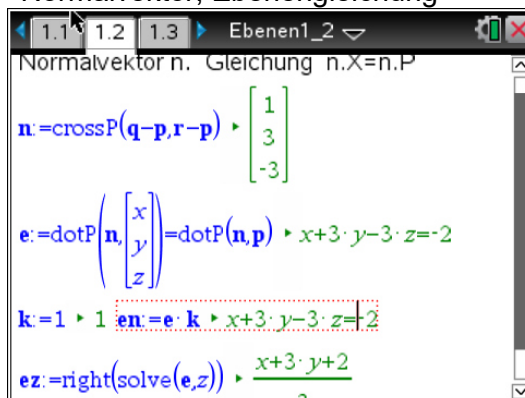
$$\text{Ebenengleichung: } x + 3 \cdot y - 3 \cdot z = -2$$

Berechnung mit TI-NSPIRE:

Eingabe der Punkte



Normalvektor, Ebenengleichung

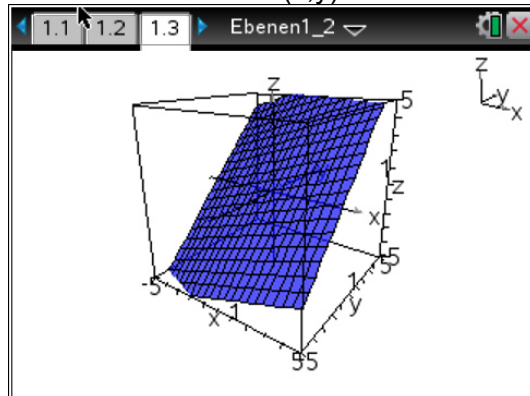


Fenster 1.2:

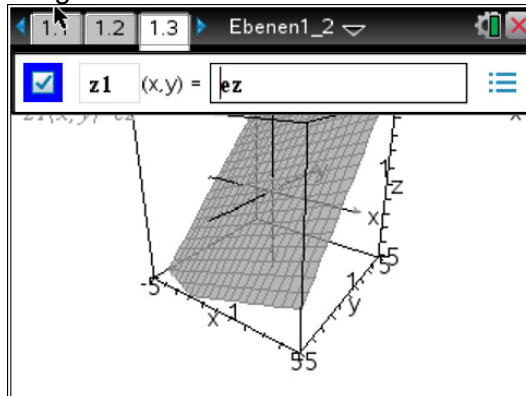
Zunächst wird mit Hilfe des Kreuzproduktes ein Normalvektor berechnet, gespeichert auf n. Nach der Formel für die Ebenengleichung wird eine Gleichung (mit Hilfe des Skalarprodukts) berechnet und auf e gespeichert.

Die Gleichung wird nach z aufgelöst und nur die rechte Seite auf ez gespeichert.

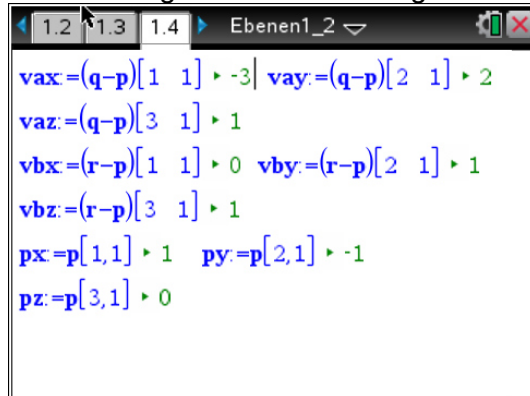
Ebene als Funktion $z(x,y)$



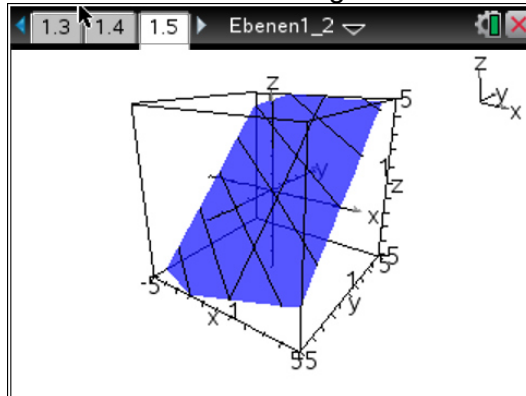
Eingabe der Ebene



Vorbereitung der Parametereingabe



Ebene mit Parametereingabe

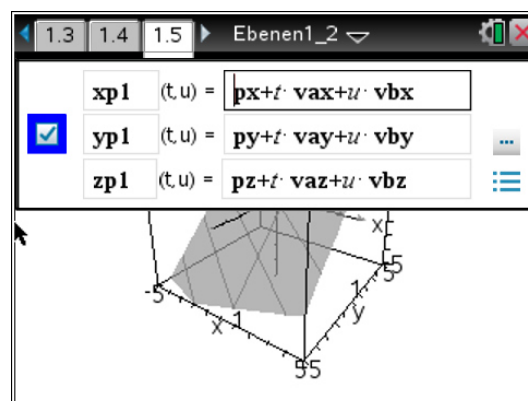


Fenster 1.4

Berechnung der beiden Richtungsvektoren \overrightarrow{PQ} und \overrightarrow{PR} . Im Beispiel sind das die Vektoren $(vax;vay;vaz)$ und $(vbx;vby;vbz)$. Der Zusatz $[1\ 1]$ z.B. bedeutet erste Zeile und erste Spalte des jeweiligen Vektors.

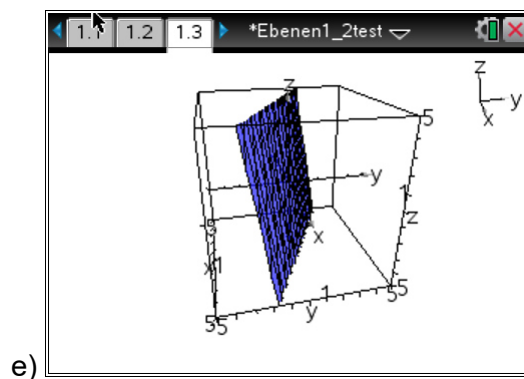
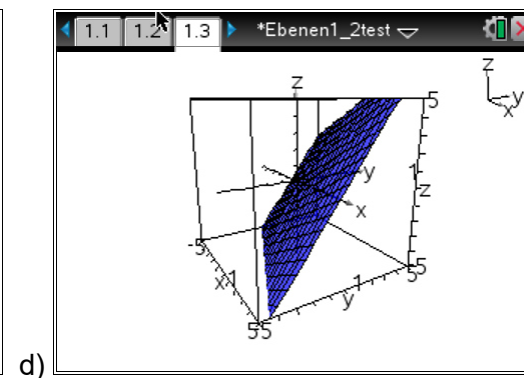
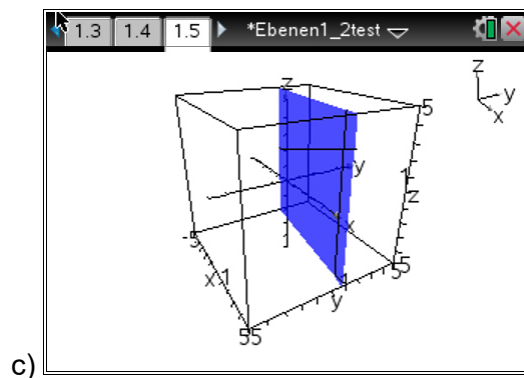
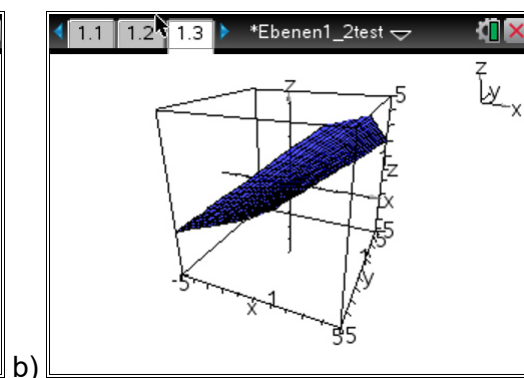
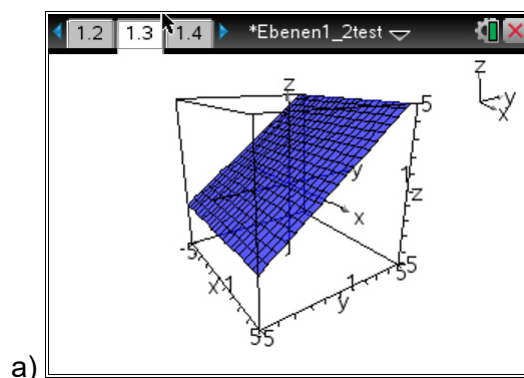
In der Parameterdarstellung wählt man den jeweiligen Bereich für t bzw. u so, dass möglichst der ganze Bereich des „Würfels“ ausgefüllt wird. Mit den gewählten Angaben könnte man beispielsweise für t und u das Intervall $[-20;20]$ wählen.

Parametereingabe:



Lösung 2)

- a) $P=(1/-5/-2)$, $Q=(-2/3/4)$, $R=(1/3/4)$ x-Achse parallel zur Ebene
- b) $P=(2/-1/2)$, $Q=(-4/2/-4)$, $R=(3/1/2)$ Der Ursprung $O=(0/0/0)$ liegt in der Ebene
- c) $P=(4/1/3)$, $Q=(4/1/-1)$, $R=(-3/2/1)$ z-Achse parallel zur Ebene, keine Gleichungsdarst.
- d) $P=(1/1/0)$, $Q=(-2/3/1)$, $R=(1/4/4)$ Allgemeine Lage
- e) $P=(2/-1/0)$, $Q=(-1/0/3)$, $R=(-4/2/0)$ Der Ursprung $O=(0/0/0)$ liegt in der Ebene



Technologiehilfe

Verwendung bzw. Anfertigung eines tns-Modells zur Darstellung einer Ebene. Dabei sollen die Parameter- und Gleichungsform verwendet werden. Die Technologie hilft bei der Visualisierung der Lage im Koordinatensystem.

Es kann die fertige TNS-Datei verwendet werden einerseits zur Demonstration und andererseits zum Experimentieren durch Schüler und Schülerinnen.

Auf verschiedenen Stufen können Schüler und Schülerinnen auch zum Teil die Darstellung einer Ebene selbst im TI-NSPIRE erarbeiten. Eine Aufgabe könnte z.B. sein, eine durch eine Gleichung gegebene Ebene zu visualisieren oder eine durch drei Punkte gegebene Ebene in Parameterform darzustellen.