

Jede Stimme zählt!

Die Bundestagswahl 2002 ist entschieden: eine knappe Mehrheit für Rot-Grün. Wer entscheidet eigentlich, wie viele Sitze im Bundestag eine Partei bekommt? Der Wähler? Der Wahlleiter? Die Politiker?

Bis zur Bundestagswahl 1983 wurde die Zahl der Abgeordneten jeder Partei nach dem Verfahren von d'HONDT bestimmt. Seit der Wahl 1987 ist man zu einem neuen Verfahren übergegangen.

Höchstzahlverfahren nach d'HONDT¹⁾	Proportionalverfahren von HARE²⁾ und NIEMEYER³⁾
<p>Die Abgeordnetensitze werden nur an Parteien verteilt, die mindestens 5% der Stimmen auf sich vereinigen konnten.</p> <p>Die Anzahl der Stimmen jeder Partei wird jeweils durch eins, zwei, drei, vier, fünf usw. geteilt.</p> <p>Es ergibt sich für jede Partei eine Liste von kleiner werdenden Zahlen.</p> <p>Aus der <i>Gesamtliste</i> aller Parteien wird die höchste Zahl ermittelt; die entsprechende Partei erhält einen Sitz. Der zweite Sitz geht an die Partei mit der nächsthöheren Zahl. Das Verfahren wird fortgesetzt, bis alle Sitze vergeben sind.</p>	<p>Die Gesamtzahl der zu vergebenden Abgeordnetensitze wird multipliziert mit der Anzahl der gültigen Zweitstimmen einer Partei (die die 5%-Hürde übersprungen hat). Das Ergebnis wird geteilt durch die Gesamtzahl der gültigen Zweitstimmen aller Parteien, die einen Stimmenanteil von mindestens 5% erreicht haben.</p> <p>Es ergibt sich für jede Partei eine <i>Proportionalzahl</i>: Die Stellen vor dem Komma geben die Zahl der Sitze jeder Partei an. Die verbleibenden Sitze erhalten die Parteien, deren Proportionalzahlen die höchsten Bruchteile aufweisen.</p>

Problemfelder

- 1) Informiere dich über die Bedeutung von Erst- und Zweitstimme bei einer Bundestagswahl. Warum muss/darf man zwei Stimmen abgeben?
- 2) Wende beide Verfahren auf folgendes Beispiel an:
Es sind 10 Abgeordnete zu wählen. Vier Parteien erhalten mehr als 5% der gültigen Stimmen; insgesamt 67000 gültige Stimmen wurden abgegeben. Auf die Partei A entfallen 24000, auf Partei B 22600, auf Partei C 14800 und auf Partei D 5600 Stimmen.
- 3) Ein Grund für den Wechsel des Systems zur Bundestagswahl 1987 war die Behauptung, das neue Verfahren sei gerechter. Erfüllt sich diese Erwartung?
- 4) Die PDS ist im neuen Bundestag mit zwei Abgeordneten vertreten, die Direktmandate errungen haben. 1998 waren es drei Direktmandate. Das Bundeswahlgesetz sieht vor, dass in letzterem Fall eine Partei auch mit weniger als 5% Anteil an der Gesamtzahl der Stimmen so viele Sitze im Bundestag erhält, wie es der von ihr erreichten Prozentzahl entspricht. Was bedeutet dies für die anderen Parteien? Was passiert, wenn du auf die 5%-Hürde verzichtest und Splittergruppen zulässt? Experimentiere!
- 5) Finde andere (gerechtere?) Auszählungsverfahren und vergleiche!
- 6) Sind Überhangmandate fair?

Analyse

- Die recht einfache Programmierung in CellSheet™ ermöglicht eine gut erweiterbare Tabelle insbesondere für die Diskussion der Splittergruppen.
- Die Vergabe der Sitze erfolgt wie hier in den Klammern und der Summe angegeben:

d'HONDT

Partei	A	B	C	D
Stimmzahl	24000	22600	14800	5600
:1	24000 (1)	22600 (2)	14800 (3)	5600
:2	12000 (4)	11300 (5)	7400 (8)	2800
:3	8000 (6)	7533 (7)	4933	1867
:4	6000 (9)	5650 (10)	3700	1400
Sitze:	4	4	2	0

HARE-NIEMEYER

Partei	A	B	C	D
Stimmzahl	24000	22600	14800	5600
Prop.-Zahl	3,58	3,37	2,21	0,84
Ganze Zahl	3 (3)	3 (3)	2 (2)	0 (0)
Bruchteil	0,58 (1)	0,37	0,21	0,84 (1)
Sitze:	4	3	2	1

- Beim Vergleich der beiden Verfahren in 3) lässt sich der Sitzanteil z. B. für Partei A als

$$Quote\ A = \frac{Stimmzahl\ für\ A}{Gesamtstimmzahl} \cdot Abgeordnetenzahl$$

berechnen. Tatsächlich handelt es sich bei der Bildung eines Parlaments (mathematisch betrachtet) um eine Abbildung der Bevölkerung (genauer gesagt des Anteils der Bevölkerung, der wahlberechtigt ist, eine gültige Stimme abgegeben hat und keine Splitterpartei gewählt hat) auf eine vergleichsweise kleine Gruppe von Abgeordneten. Die algebraisch ermittelte Quote entspricht der gerechten Verteilung der Sitze.

Die Schwierigkeit besteht dabei darin, dass eine Rundung von Q nach IN stattfinden muss, da nur eine natürliche Zahl an Abgeordnetensitzen zu vergeben ist. Welche Art der Rundung ist gerecht, d.h. spiegelt den Willen der Bevölkerung am ehesten wieder?

- Die graphische Interpretation mit Hilfe des Strahlensatzes ermöglicht es, das Verfahren von d'HONDT als die Drehung einer schiefen Gerade um das Streckungszentrum einer zentrischen Streckung zu deuten.

Dazu wird die Quote jeder Partei über der Zahl der für sie abgegebenen Stimmen aufgetragen (vgl. Bild 8). Die ganzzahligen y-Werte unterhalb der entstehenden Ursprungsgerade entsprechen dann der Zahl der unmittelbar für die jeweilige Partei vergebenen Sitze; im Beispiel also für

Partei A	3 Sitze
Partei B	3 Sitze
Partei C	2 Sitze
Partei D	0 Sitze

Es bleiben also noch zwei Plätze zu vergeben.

Markiert man per Plot die ganzzahligen y-Werte (vgl. Bild 8), so ist unmittelbar zu erkennen, dass der Wert 1 für Partei D, der Wert 4 für Partei A und der Wert 4 für Partei B der Gerade am nächsten liegen. Dreht man die Gerade um den Ursprung, so überstreicht sie zuerst den ganzzahligen Wert für Partei A, dann den für Partei B. Die restlichen Sitze

sind somit vergeben. Gegebenenfalls kann auch der Ursprung als weiterer Geradenpunkt zur Erhöhung der Übersichtlichkeit hinzugefügt werden. (Die mathematische und politische Bedeutung dieser Hinzufügung wäre zu diskutieren.)

- Im Gegensatz dazu bedeutet das HARE-NIEMEYER-Verfahren in der Strahlensatzfigur eine Parallelverschiebung der schiefen Gerade (vgl. Bild 14).

Bei der Verschiebung nach oben überstreicht die Gerade zunächst den ganzzahligen Wert der Partei D, dann den der Partei A. Auch hier sind die restlichen beiden Plätze vergeben, allerdings hat bei diesem Verfahren Partei D gegenüber Partei B profitiert.

Eine Betrachtung über die Änderung der Geradensteigung (d'HONDT) bzw. des Achsenabschnitts (Hare-Niemeyer) zur Ermittlung der Restplätze bietet sich an. Die Frage der Fairness stellt sich praktisch von selbst.

- Weitere Informationen sind im Internet unter (<http://www.wahlrecht.de>) zu finden.

Rechenblatt in CellSheet™ (TI-83)

DHON	A	B	C
1	PARTIA	B	
2	DIV	24000	22600
3	1	24000	22600
4	2	12000	11300
5	3	8000	7533.3
6	4	6000	5650
E6: =B3:B2/A6 [Menu]			

Bild 1

DHON	C	D	E
1	B	C	D
2	22600	14800	5600
3	22600	14800	5600
4	11300	7400	2800
5	7533.3	4933.3	1866.7
6	5650	3700	1400
E6: =E3:E2/A6 [Menu]			

Bild 2

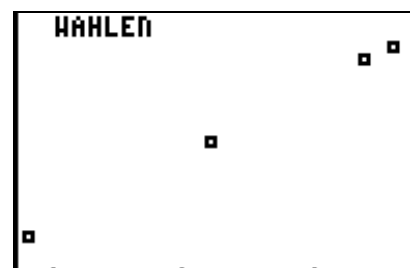


Bild 3

HARE	A	B	C
1	ABGEORDNETE		10
2	PARTIA	B	
3	STIMZ	24000	22600
4	PROPZ	3.5821	3.3731
5	GAHZZ	3	3
6	BRUCHT	.58209	.37313
E5: =int(B4) [Menu]			

Bild 4

HARE	D	E	F
1			
2	C	D	SUMME
3	14800	5600	67000
4	2.209	.83582	
5	2	0	
6	.20896	.83582	
E6: =E4-E5 [Menu]			

Bild 5

```

LinReg(ax+b)
XRange:B4:E4
YRange:B3:E3
FreqRange:B4:E4
Sto Ean To:Y1
calculate

```

Bild 6

Hinweise

- Die Darstellung mit TI-89/92/Voyage200 ist analog möglich (vgl. Bild 7) und ist deutlich übersichtlicher.
- Die in der Analyse beschriebene graphische Veranschaulichung der beiden Verfahren ist in Bild 8 umgesetzt. Dazu berechnet man zunächst die Quoten für die einzelnen Parteien A bis D (vgl. Bild 7, hier in den Spalten B bis E zu erkennen) und lässt sie sich mit einer xy-Gerade und Angabe der einzelnen Punkte in Abhängigkeit von den Stimmanteilen (y-Achse) plotten (Bild 9).
Um die Vergabe der Abgeordnetensitze besser erkennbar zu machen, bietet es sich an, die ganzzahligen Koordinatenpunkte sichtbar zu machen (Gitterkreuze in Bild 8, Umsetzung s. Bild 10).
- Mit Hilfe linearer Regression (F7 1: Calculate; 5: LinReg) lässt sich die Geradengleichung bestimmen (Bild 11 und 12). Durch Veränderung von Steigung und y-Achsenabschnitt (vgl. Bild 13 und 14) können die oben beschriebene Drehung und die Parallelverschiebung experimentell durchgeführt werden.
- Diese graphischen Überlegungen können prinzipiell auch mit dem TI-83 angestellt werden, sind aber weniger komfortabel durchführbar (s. Bild 3 und 6).
- Eingehendere Betrachtungen sind möglich, wenn die Schülerinnen und Schüler das Rechenblatt mittels des Programms *TI CellSheet Konverter™* nach MS-Excel™

exportieren und sich dort geeignet darstellen lassen. Dadurch kann einerseits die Skalierung der Achsen deutlicher dargestellt werden und die Trendlinie kann flexibler variiert werden.

Graphische Darstellung mit dem TI-92/Voyage 200

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8
File	Plot	Edit	Undo	\$	Funcs	Stat	ReCalc
dho	A		B	C	D	E	
3	Stimmzahl	24000.	22600.	14800.	5600.		
4		1	24000.	22600.	14800.	5600.	
5		2	12000.	11300.	7400.	2800.	
6		3	8000.	7533.3	4933.3	1866.7	
7		4	6000.	5650.	3700.	1400.	
8	Quote	3.5821	3.3731	2.209	.83582		
9		1.	1.	1.	1.		
B8: =B3/\$F\$3*\$G\$1							
TEST DEG APPROX FUNC							

Bild 7

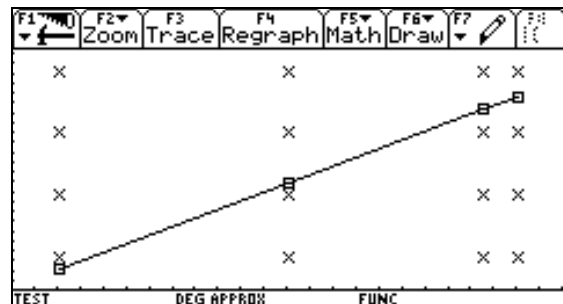


Bild 8

Define Plot 1

Plot Type..... xyline→

Mark..... Box→

xRange..... b3:e3

yRange..... b8:e8

Hist. Bucket Width 1

Use Freq and Categories? NO→

Freq.....

Category.....

(Include Categories) C

Enter=SAVE ESC=CANCEL

TYPE + ENTER=OK AND ESC=CANCEL

Bild 9

Define Plot 2

Plot Type..... Scatter→

Mark..... Cross→

xRange..... b4:e4

yRange..... b10:e10

Hist. Bucket Width 1

Use Freq and Categories? NO→

Freq.....

Category.....

(Include Categories) C

Enter=SAVE ESC=CANCEL

USE + AND → TO OPEN CHOICES

Bild 10

Calculate

Calculation Type.. LinReg →

x..... b3:e3

y..... b8:e8

Store RegEQ to.... y1(x)→

Use Freq and Categories? NO→

Freq.....

Category.....

(Include Categories) C

Enter=YES ESC=NO

USE + AND → TO OPEN CHOICES

Bild 11

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8
File	Plc						ReCalc
dho	A						E
3	Sti	a	=1.492537E-4				5600.
4		b	=9.E-15				5600.
5		corr	=1.				2800.
6		R²	=1.				1866.7
7							1400.
8	Quo						.83582
9							1.
B7: =5b53/A7							
TEST DEG APPROX FUNC							

Bild 12

PLOTS 12345

Plot 6: X xtest\ncplot5 ytest\ncplot5

Plot 4: X xtest\ncplot4 ytest\ncplot4

Plot 3: X xtest\ncplot3 ytest\ncplot3

Plot 2: X xtest\ncplot2 ytest\ncplot2

Plot 1: X xtest\ncplot1 ytest\ncplot1

y1=1.4925373134328E-4·x+9.E-15

y2=1.8925373134328E-4·x+9.E-15

y3=1.4925373134328E-4·x+9.E-15+.5

y4=

y3(x)=1.4925373134328E-4·x+9. ...

TEST DEG APPROX FUNC

Bild 13

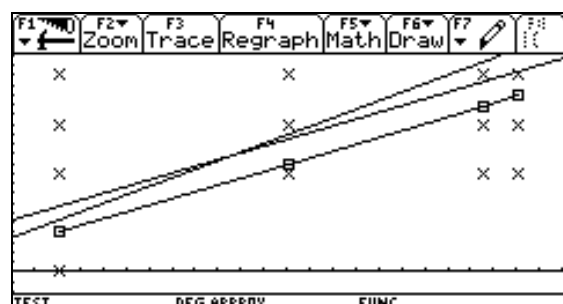


Bild 14

- 1) Victor d'HONDT, (1841-1901) Belgischer Jurist
- 2) Thomas HARE (1806-1891), Jurist, London
- 3) Horst NIEMEYER (*1928), Professor für Mathematik, RWTH-Aachen