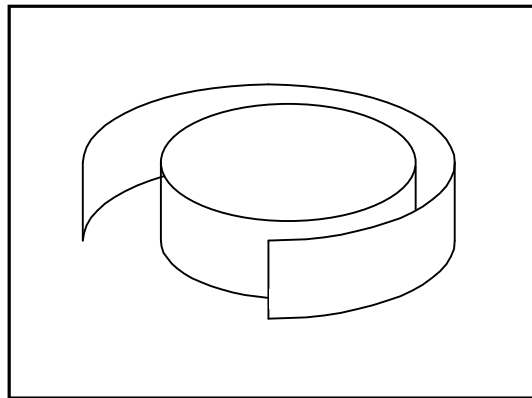


Berechnungen am Kreis – eine runde Sache

Maren und Karen backen Kuchen. Es wird eine Marzipantorte, und Karen fragt sich, wie groß das Rechteck aus Marzipan sein muss, das zum Schluss um die Torte gelegt wird. „Wie hoch, das ist einfach! Nämlich genauso hoch wie der Kuchen. Aber welchen Umfang hat die Torte?“ Maren packt der Ehrgeiz, und sie sagt: „Abmessen ist nicht! Wir rechnen das aus.“

Kannst du den beiden helfen?



Zeichne einen Kreis mit dem Radius $r = 10\text{ cm}$ und versuche seinen Umfang möglichst genau zu bestimmen. Welche Möglichkeiten gibt es?

Problemfelder

- 1) Berechne zunächst den Umfang eines einbeschriebenen (bzw. umbeschriebenen) Quadrats. Ergänze es danach zu einem regelmäßigen Achteck, 16-Eck usw. und wiederhole deine Berechnungen.
Welcher Umfang kommt wohl dem des Kreises am nächsten? Warum?
- 2) Stelle deine Ergebnisse mithilfe einer Tabellenkalkulation zusammen. Versuche zu schätzen, wie stark deine Ergebnisse vom Umfang des Kreises abweichen.
- 3) Berechne auch den Umfang u anderer Kuchen (z. B. für die Radien $r = 15\text{ cm}$; $r = 20\text{ cm}$ indem du den Parameter r in deiner Tabellenkalkulation variierst). Stelle auch diese Ergebnisse zusammen.
- 4) Versuche zudem geeignete Funktionsterme für u aufzustellen, wenn du den Wert direkt für den Kreis berechnen möchtest.
- 5) Kannst du mit diesen Überlegungen nun sogar die Fläche des Kreises annähern und möglichst genau bestimmen? Wie kannst du daraus das Volumen der Marzipantorte berechnen?

Analyse

- Die Berechnung der Kanten der jeweils kongruenten, gleichschenkligen Dreiecke in den Vielecken kann je nach Vorwissen der Schülerinnen und Schüler entweder mit Hilfe trigonometrischer Funktionen (vgl. Rechenblatt in CellSheet™ mit dem TI-83) oder lediglich mit Hilfe des Satzes von PYTHAGORAS (vgl. Darstellung mit TI-89/92/Voyage 200) berechnet werden. Beide Möglichkeiten sind analog mit jedem der Rechner programmierbar.
- Sinnvoll ist sowohl die Approximation des Kreisumfangs durch einbeschriebene (vgl. Bild 1-3) als auch durch umbeschriebene regelmäßige n -Ecke (vgl. Bild 4-6).
- Bild 1 und 2 zeigen eine mögliche Spalteneinteilung für die Berechnung der einbeschriebenen regelmäßigen n -Ecke. Der Radiusparameter kann in der oberen Zeile variiert werden (vgl. 3)).
In den einzelnen Spalten können, wie in 2) vorgeschlagen, die Anzahl der Ecken (bzw. der Kanten) des regelmäßigen einbeschriebenen n -Ecks (hier in A), die zugehörige halbierte Winkelgröße des gleichschenkligen Dreiecks des jeweiligen n -Ecks (B), die sich mithilfe trigonometrischer Seitenverhältnisse daraus ergebende (Grund-) Seitenlänge des jeweiligen n -Ecks (C) und der zugehörige Umfang u des n -Ecks (D) berechnet werden.

- Ergänzend kann für 2) der Flächeninhalt eines gleichschenkligen Dreiecks (E) und letztendlich der Flächeninhalt des einbeschriebenen regelmäßigen n-Ecks (F) zusätzlich angegeben und iterativ berechnet werden.
- Die Bilder 3 und 6 vermitteln einen Eindruck von der „langsamen“ Konvergenz des Verfahrens. Der Vergleich regt zu Spekulationen über den genauen Kreisumfang an und lädt zu eingehenderen Betrachtungen der Konvergenzgeschwindigkeit ein.

Rechenblatt in CellSheet™ (TI-83) unter Zuhilfenahme trigonometrischer Funktionen

| PII | A | B | C |
|---------------------|--------|--------|--------|
| 1 | RAD R= | 10 | |
| 2 | | | |
| 3 | ANZEC | WINKEL | SEIS |
| 4 | 3 | 60 | 17.321 |
| 5 | 4 | 45 | 14.142 |
| 6 | 5 | 36 | 11.756 |
| C4: =2*%B%1*sin(B4) | | | |

Bild 1

| PII | D | E | F |
|------------|--------|--------|--------|
| 3 | UMFU | A3-ECK | FLAE A |
| 4 | 51.962 | 43.301 | 129.9 |
| 5 | 56.569 | 50 | 200 |
| 6 | 58.779 | 47.553 | 237.76 |
| 7 | 60 | 43.301 | 259.81 |
| 8 | 60.744 | 39.092 | 273.64 |
| F4: =A4*E4 | | | |

Bild 2

| PII | D | E | F |
|---------------|--------|--------|--------|
| 10 | 61.564 | 32.139 | 289.25 |
| 11 | 61.803 | 29.389 | 293.89 |
| 12 | 61.981 | 27.032 | 297.35 |
| 13 | 62.117 | 25 | 300 |
| 14 | 62.222 | 23.236 | 302.07 |
| 15 | 62.306 | 21.694 | 303.72 |
| D15: =A15*C15 | | | |

Bild 3

| PIA | A | B | C |
|---------------------|--------|--------|--------|
| 1 | RAD R= | 10 | |
| 2 | | | |
| 3 | ANZEC | WINKEL | SEIS |
| 4 | 3 | 60 | 34.641 |
| 5 | 4 | 45 | 20 |
| 6 | 5 | 36 | 14.531 |
| C4: =2*%B%1*tan(B4) | | | |

Bild 4

| PIA | D | E | F |
|------------|--------|--------|--------|
| 3 | UMFU | A3-ECK | FLAE A |
| 4 | 103.92 | 173.21 | 519.62 |
| 5 | 80 | 100 | 400 |
| 6 | 72.654 | 72.654 | 363.27 |
| 7 | 69.282 | 57.735 | 346.41 |
| 8 | 67.42 | 48.157 | 337.1 |
| F6: =A6*E6 | | | |

Bild 5

| PIA | D | E | F |
|---------------|--------|--------|--------|
| 15 | 63.908 | 22.824 | 319.54 |
| 16 | 63.767 | 21.256 | 318.83 |
| 17 | 63.652 | 19.891 | 318.26 |
| 18 | 63.557 | 18.693 | 317.79 |
| 19 | 63.478 | 17.633 | 317.39 |
| 20 | 63.411 | 16.687 | 317.05 |
| F20: =A20*E20 | | | |

Bild 6

Hinweise

- Das Problem lässt sich gut in Partner- oder Kleingruppenarbeit bearbeiten. Besonderen Wert sollte auf den Vergleich der unterschiedlichen Näherungsverfahren gelegt werden, die insbesondere aus der inneren und äußeren Annäherung erwachsen.
- Da alle Verfahren nur sehr langsam konvergieren, bietet es sich für eingehendere Betrachtungen an, dass die Schülerinnen und Schüler das Rechenblatt in der Schule oder zu Hause mittels des Programms *TI CellSheet Konverter™* nach MS-Excel™ exportieren und sich dort geeignet darstellen lassen. Dadurch können wesentlich genauere Annäherung an den Kreisumfang und die Kreisfläche erreicht werden.
- Die automatische Rechenblattberechnung sollte für diese Betrachtungen ausgeschaltet werden, um längere Rechenzeiten zu vermeiden.

Die Umsetzung auf dem TI-89/92/Voyage 200 ohne die Zuhilfenahme trigonometrischer Funktionen sieht wie folgt aus:

| F1 | F2 | F3 | F4 | F5 | F6 | F7 | F8 |
|--------------------------|--------|-------|--------|--------|--------|------|--------|
| File | Plot | Edit | Undo | \$ | Funcs | Stat | ReCalc |
| pi | A | B | C | D | E | F | |
| 1 | Radius | 10. | | | | | |
| 2 | | | | | | | |
| 3 | s | AnzKa | Umf u | Flae A | x | y | |
| 4 | 14.142 | 4. | 56.569 | 200. | 7.0711 | 2.92 | |
| 5 | 7.6537 | 8. | 61.229 | 306.15 | 9.2388 | 7.61 | |
| 6 | 3.9018 | 16. | 62.429 | 312.14 | 9.8079 | 1.92 | |
| 7 | 1.9603 | 32. | 62.731 | 313.65 | 9.9518 | .048 | |
| D5: =B5*(<(A5/2)*\$B\$1) | | | | | | | |
| TEST RAD APPROX SEQ | | | | | | | |

Bild 7

| F1 | F2 | F3 | F4 | F5 | F6 | F7 | F8 |
|---------------------|--------|-------|--------|--------|--------|------|--------|
| File | Plot | Edit | Undo | \$ | Funcs | Stat | ReCalc |
| pi | A | B | C | D | E | F | |
| 7 | 1.9603 | 32. | 62.731 | 313.65 | 9.9518 | .048 | |
| 8 | .98135 | 64. | 62.807 | 314.03 | 9.988 | .012 | |
| 9 | .49082 | 128. | 62.826 | 314.13 | 9.997 | .003 | |
| 10 | .24543 | 256. | 62.83 | 314.15 | 9.9992 | .000 | |
| 11 | .12272 | 512. | 62.831 | 314.16 | 9.9998 | .000 | |
| 12 | .06136 | 1024. | 62.832 | 314.16 | 10. | .000 | |
| 13 | | | | | | | |
| C12: =A12*B12 | | | | | | | |
| TEST RAD APPROX SEQ | | | | | | | |

Bild 8