

„Würfel einer Sechs“ – Schwankungen relativer Häufigkeiten

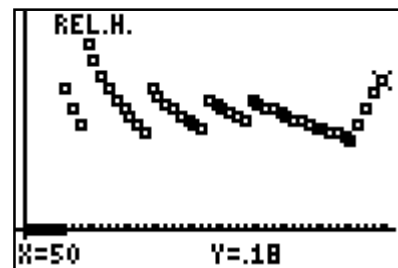
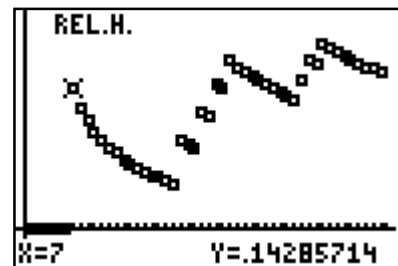
Mit Hilfe eines CELLSHEET™ – Arbeitsblattes soll das mehrfache Werfen eines fairen Spielwürfels mit sechs Seitenflächen simuliert werden; und so funktioniert 's:

- Überlege dir zunächst, wie viele Sechsen zu erwarten sind, wenn der Würfel 50 – mal nacheinander geworfen wird. (Prognose)
- Du darfst nun zusätzlich schätzen, wie sehr die in einer Versuchsreihe ermittelte Zahl geworfener Sechsen von deiner Erwartung abweichen könnte. (Irrtumsbereich oder Vertrauensintervall)
- Eine neue Versuchsreihe mit 50 Würfeln wird gestartet, in dem du im Menü "File ..." die Option "6:Recalc" wählst.

Experimentiere mit der Simulation!

Problemstellungen

- 1) Findet man Vertrauensintervalle, die zu vielen, nacheinander simulierten Versuchsreihen passen? Wie klein können diese gewählt werden?
- 2) Erstelle und beschreibe eine geeignete graphische Darstellung für eine Simulation des Würfel-Versuchs. Orientiere dich z.B. an folgenden Fragen: Was soll mit der Graphik dargestellt werden? Welche Aussagen kann man daran ableiten?
- 3) Muss die Größe der Vertrauensintervalle angepasst werden, wenn die Anzahl der Würfe verändert wird? Unterscheide bei deinen Beobachtungen absolute und relative Abweichungen!



Analyse:

Bei einem fairen, laplaceschen Spielwürfel fällt eine bestimmte Augenzahl mit der Wahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{6} = \frac{\text{Anzahl der günstigen}}{\text{Anzahl der möglichen Fälle}}$. Die Wahrscheinlichkeit kann als Vorhersage bzw. Prognose für die relative Häufigkeit des Auftretens einer bestimmten Augenzahl in einer sehr langen Versuchsreihen angesehen werden.

Der Ausgang eines einzelnen Wurfs (eines Zufallsexperimentes) ist rein zufällig und nicht vorhersehbar. Beim mehrfachen Werfen des Würfels treten zufällige Abweichungen zu der erwarteten Anzahl von Sechsen auf. Diese Abweichungen können absolut oder relativ angegeben werden, als Differenz zur erwarteten absoluten oder relativen Häufigkeit.

Die Abweichung zwischen der prognostizierten relativen Häufigkeit $h = \frac{1}{6}$ und einer experimentell ermittelten relativen Häufigkeit ist umso geringer, je größer die Anzahl der Würfe in der Versuchsreihe ist. In langen Versuchsreihen schwanken die relativen Häufigkeiten mit zunehmender Versuchszahl immer weniger um einen bestimmten Wert und kommen diesem theoretischen Wert beliebig nahe: Zwar nehmen die absoluten Abweichungen im Zähler zu, allerdings langsamer als die Zahl der Würfe im Nenner.

Die Wahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{6}$ kann auch als diejenige Zahl angesehen werden, der sich die relativen Häufigkeiten in sehr langen Versuchsreihen annähern. Sehr lange Versuchsreihen können verwendet werden, um die Wahrscheinlichkeit von Ereignissen bei Zufallsexperimenten empirisch zu ermitteln: Als Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses wird derjenige, theoretische Zahlenwert angenommen, um den die relativen Häufigkeiten schwanken.

Rechenblatt in CellSheet™ (TI-83)

WUER	A	B	C
1	WURF	ZAHL	
2	1	2	0
3	2	5	0
4	3	4	0
5	4	4	0
6	5	2	0
B2: =randInt(1,6) [Menu]			

Bild 1

WUER	C	D	E
1		SUMME	REL H
2	0	0	0
3	0	0	0
4	0	0	0
5	0	0	0
6	0	0	0
C2: =If(B2=6,1,0) [Menu]			

Bild 2

WUER	C	D	E
1		SUMME	REL H
2	0	0	0
3	0	0	0
4	0	0	0
5	0	0	0
6	0	0	0
D5: =D4+C5 [Menu]			

Bild 3

Hinweise:

- Man kann eine entsprechende Simulation als Black-Box auf die Schülerrechner überspielen. Die Vorbereitungen sind aber nicht sehr kompliziert, so dass ein gemeinsames Erstellen im Unterricht sinnvoll erscheint. Auf dem Niveau der 7. oder 8. Klasse ist damit das Erarbeiten von Grundstrukturen bei Tabellenkalkulations-Programmen verknüpft.

- Erstellen der Simulation:

Eine Spalte sollte die einzelnen Würfe durchnummerieren, in Bild 1 ist das Spalte A. Sie kann mit der "Sequenz..."-Option aus dem Menü "Options..." erzeugt werden. Die Zufallszahlen erzeugt der Befehl `randInt(1,6)`, der in die betreffenden Zellbereiche kopiert wird. Die Argumente 1 und 6 stehen als Grenzen, innerhalb derer natürliche Zufallszahlen ausgegeben werden sollen.

In Bild 2 wird die Verwendung des If- Befehls gezeigt, mit dem das Wurf Ergebnis überprüft wird. Fällt im 3. Wurf eine Sechs, so wird in der Zelle C3 eine Eins notiert, sonst eine Null. Die kumulative Summe in Spalte D wird rekursiv erzeugt, indem auf die darüber liegende Summenzelle Bezug genommen wird.

Steht in Zelle D15 eine Drei, so sind in den ersten 14 Würfeln 3 Sechsen gefallen. Mit dieser absoluten Häufigkeit kann die relative Häufigkeit des Auftretens einer Sechs bis zur aktuellen Wurfnummer wie in Bild 4 bestimmt werden.

- In der Simulation zur oberen der zwei graphischen Darstellungen ist die erste Sechs im 7. Wurf gefallen. In der Simulation zur unteren Darstellung fielen 4 Sechsen in den letzten vier Würfeln. Beide Simulationen erstrecken sich über 50 Würfe.

Die Schwankungen der absoluten und relativen Häufigkeiten sind bei kleinen Versuchszahlen noch recht stark. Der graphische Verlauf zeigt aber bereits Tendenzen auf, an denen die Gründe der Schwankungen diskutiert werden können.

- Die Rechenzeit für eine Simulation mit mehr als 50 Würfeln ist erheblich. Hier empfiehlt es sich, auf PCs auszuweichen.

Die vorgestellte Simulation ist im Grundsatz direkt auf eine Tabellenkalkulation auf dem PC übertragbar. Um Tabellenblätter vom TI-83 nach Microsoft Excel™ exportieren zu können, bietet Texas Instruments den CellSheet-Converter™ an.

- Die Schülerinnen und Schüler können die verschiedenen Aspekte der Simulation sowie die aufgeworfenen Fragen weitgehend selbstständig diskutieren. Im Unterricht bietet sich für das Experimentieren mit der Simulation eine Partnerarbeit an. Dabei stehen die Erfahrungen der Schülerinnen und Schüler mit relativen Häufigkeiten in längeren Versuchsreihen im Vordergrund.

WUER	C	D	E
10	1	2	.22222
11	0	2	.2
12	1	3	.27273
13	0	3	.25
14	0	3	.23077
15	0	3	.21429
E15: =D15/A15 [Menu]			

Bild 4