Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder 2024 für WTR

Aufgaben für das Fach Mathematik

Wilfried Zappe

Teachers Teaching with Technology™

T³ DEUTSCHLAND

Autor:
Wilfried Zappe

Dieses und weiteres Material steht Ihnen zum pdf-Download bereit: www.t3deutschland.de
sowie unter www.ti-unterrichtsmaterialien.net

Das Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen (IQB) gibt jedes Jahr Beispielaufgaben auch für das Mathematikabitur heraus. In den dazu veröffentlichten Begleitdokumenten heißt es unter anderem:

„Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder[1]

Auf der Grundlage von Beschlüssen der Kultusministerkonferenz werden für die Fächer Deutsch und Mathematik … auf der Basis der Bildungsstandards für die Allgemeine Hochschulreife ländergemeinsame Abituraufgabenpools entwickelt. Dies soll insbesondere dazu beitragen, die mit den Abiturprüfungen der Länder verbundenen Anforderungen anzugleichen und die hohe Qualität dieser Prüfungen zu sichern. Mit der Koordination der Entwicklung der Pools wurde als wissenschaftliche Einrichtung der Länder das IQB beauftragt.

…

Erarbeitung der Aufgaben der Pools

Zuständig für die Entwicklung der Aufgaben ist für jedes Fach eine Arbeitsgruppe, in die jedes Bundesland eine Lehrkraft für dieses Fach an allgemeinbildenden Gymnasien entsendet; zusätzlich ist die Perspektive der beruflichen Gymnasien in jeder Arbeitsgruppe durch zwei Lehrkräfte vertreten. …. Die Arbeitsgruppen werden von Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftlern der jeweiligen Fachdidaktik bzw. des jeweiligen Fachs beraten. Damit wird gewährleistet, dass die Perspektiven aller Länder sowie aktuelle Erkenntnisse der jeweiligen Fachdidaktik und Fachwissenschaft in den Arbeitsprozess einfließen. …

Veröffentlichung

Für jedes Prüfungsjahr werden nach Abschluss der Abiturprüfungen die von den Ländern entnommenen Aufgaben der Pools — einschließlich der für die Lehrkräfte vorgesehenen Materialien (insbesondere Erwartungshorizonte und Bewertungshinweise) — auf den Internetseiten des IQB veröffentlicht. Voraussetzung dafür sind ggf. Nutzungsrechte für urheberrechtlich geschützte Materialien, die den Aufgaben zugrunde liegen.“

Ausführlichere Hinweise zum Fach Mathematik sind auf den Seiten des IQB unter
https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/dokumente/mathematik/
zu finden.

Im Zusammenhang mit der hier vorliegenden Veröffentlichung ist die **Zulassung von Rechenhilfsmitteln** besonders interessant.

„Mit den "Hinweisen zur Verwendung von Hilfsmitteln" haben sich die Länder auf gemeinsame Regelungen zur Funktionalität digitaler Hilfsmittel geeinigt. Diese Regelungen betreffen modulare Mathematiksysteme (MMS) und einfache wissenschaftliche Taschenrechner (WTR).“[2]

Für jedes der beiden zugelassenen Hilfsmittel MMS bzw. WTR werden spezielle IQB-Abituraufgaben im Fach Mathematik angeboten.

[1] https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/
[2] https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/dokumente/mathematik/

„Auf dieser Grundlage enthält der Pool für das Fach Mathematik Aufgaben der folgenden Arten:

♦ Aufgaben, für deren Bearbeitung eine Verwendung von Hilfsmitteln nicht vorgesehen ist …;

♦ Aufgaben, für deren Bearbeitung als digitales Hilfsmittel ein einfacher wissenschaftlicher Taschenrechner (WTR) vorgesehen ist;

♦ Aufgaben, für deren Bearbeitung als digitales Hilfsmittel ein modulares Mathematiksystem (MMS) … vorgesehen ist. …
Abgesehen von denjenigen Aufgaben für das Fach Mathematik, die ohne Verwendung von Hilfsmitteln zu bearbeiten sind, ist für die Bearbeitung der Aufgaben … der Einsatz einer mathematisch-naturwissenschaftlichen Formelsammlung … vorgesehen. …“[3]

Aus Platzgründen werden hier nicht alle Hinweise und Festlegungen des IQB in diesem Zusammenhang angegeben. Sie können jederzeit unter den angegebenen Quellen nachgelesen werden.

Die Originalaufgaben und kurze Lösungshinweise für verschiedene Jahrgänge sind veröffentlicht unter https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/sammlung/.

Das vorliegende Material enthält Aufgaben und ausführliche Lösungen zum WTR-Mathematikabitur, die erstmals im Jahre 2024 vom IQB veröffentlicht wurden[4].

Insbesondere die Verwendung des zertifizierten und zugelassenen wissenschaftlichen Taschenrechners TI-30X Prio MathPrint™ wird dabei detaillierter beschrieben, als das in den Kurzlösungen des IQB möglich wäre.

Der besseren Lesbarkeit der Lösungen wegen werden die Aufgabenstellungen des IQB mit Erlaubnis von KMK und IQB vor den ausführlichen Lösungshinweisen ebenfalls veröffentlicht.

Die Genehmigung dafür ist gegeben durch:

[5]

[3] https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/dokumente/mathematik/
[4] https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/pools2024/mathematik/.
[5] https://education.ti.com/de/produkte/taschenrechner/wissenschaftliche-rechner/ti-30xprio-mp

	BE
1 Die Abbildung 1 zeigt den Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f mit $f(x)=2\cdot(x^2-1)\cdot e^x$.	
a Zeigen Sie, dass für die erste Ableitungsfunktion f' von f gilt: $f'(x)=2\cdot(x^2+2x-1)\cdot e^x$	2
b Weisen Sie nach, dass f genau zwei Nullstellen hat und dass diese -1 und 1 sind. Berechnen Sie die x-Koordinate des Tiefpunkts des Graphen von f. *(zur Kontrolle: x-Koordinate des Tiefpunkts: $-1+\sqrt{2}$)*	6
c Begründen Sie mithilfe der Abbildung 1, dass es eine Zahl $b>1$ gibt, für die $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx + \int_{1}^{b} f(x)\,dx = 0$ gilt.	3

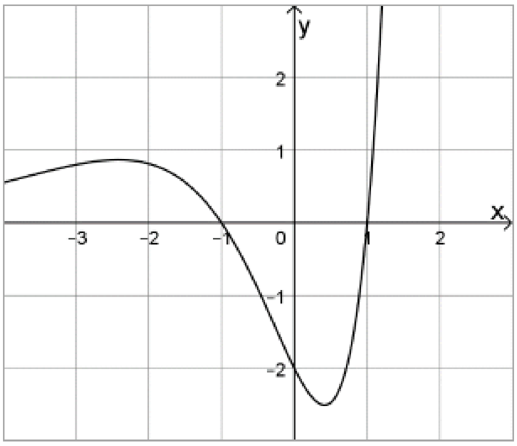


Abb. 1

Lösung:

1a: Ableitungsterm <u>nachweisen:</u>

Faktor- und Produktregel zum Ableiten anwenden:

$f(x) = 2\cdot(x^2-1)\cdot e^x = u(x)\cdot v(x)$

$u(x) = 2\cdot(x^2-1)$ $\quad u'(x) = 4x$ $\quad v(x) = e^x$ $\quad v'(x) = e^x$

$f'(x) = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)$

$f'(x) = 4x\cdot e^x + 2\cdot(x^2-1)\cdot e^x = 2\cdot e^x\cdot(2x+x^2-1) = 2\cdot(x^2+2x-1)\cdot e^x$

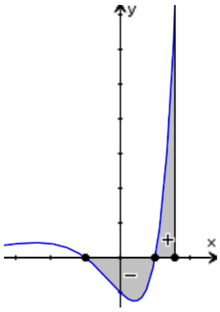
1b: <u>Nachweisen</u>: f hat genau zwei Nullstellen -1 und 1;
x-Koordinate des Tiefpunktes <u>berechnen:</u>

Nullstellen von f sind diejenigen x-Werte, für die f(x) = 0 gilt.
Da $f(x) = 2\cdot(x^2-1)\cdot e^x$ ein Produkt mit den Faktoren 2, (x^2-1) und e^x ist, kann der Satz vom Nullprodukt zur Anwendung kommen. Wegen $2 \neq 0$ und $e^x \neq 0$ muss noch untersucht werden, für welche Zahlen x der Faktor $x^2-1=0$ ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn $x_1 = 1$ oder $x_2 = -1$ gilt. Deshalb sind dies die zwei einzigen Nullstellen von f(x).

Für die notwendige Bedingung für lokale Extremstellen müssen die Nullstellen von $f'(x)$ bestimmt werden. Es kommt der Satz vom Nullprodukt zur Anwendung, denn $f'(x) = 0$ gilt wegen $2 \neq 0$ und $e^x \neq 0$ genau dann, wenn $x^2+2x-1=0$ ist.
Mit der pq-Formel folgt $x_{e1/e2} = -1 \pm \sqrt{(-1)^2+1} = -1 \pm \sqrt{2}$.
An der Aufgabenstellung und dem Graphen ist zu erkennen, dass der (einzige) lokale Tiefpunkt eine positive x-Koordinate hat. Diese ist also $x_{e1} = -1+\sqrt{2}$ die gesuchte x-Koordinate(siehe Kontrollergebnis).

1c: Gleichung <u>begründen</u>:

Deutung der Integrale als Maßzahlen von Flächeninhalten:
Das Integral $\int_{-1}^{1} f(x)dx$ beschreibt den Flächeninhalt der vom Graphen von f und der x-Achse im Intervall [-1; 1] eingeschlossenen Fläche. Weil diese Fläche unterhalb der x-Achse liegt, gibt dieses Integral den Flächeninhalt mit negativem Vorzeichen an.



Das Integral $\int_{1}^{b} f(x)dx$ ist jedoch positiv, weil die Funktion f für b > 1 stets positive Funktionswerte hat. Weil f für b > 1 außerdem monoton steigend ist, muss es also eine Zahl b > 1 geben, so dass die vom Graphen von f, der x-Achse und der Geraden x = b eingeschlossene Fläche einen Flächeninhalt hat, der dem Betrage nach genau so groß ist wie der Flächeninhalt der unterhalb der x-Achse gelegenen Fläche.
Die Summe beider Flächenhalte ist dann null.

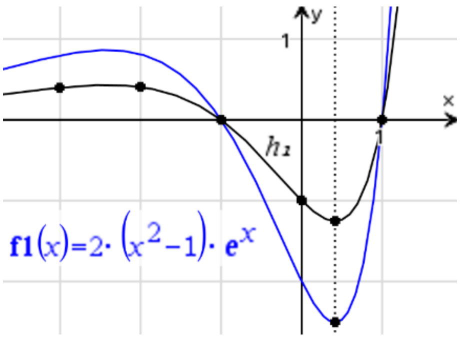
Für jeden Wert $k \in \mathbb{R}^+$ wird die Funktion h_k mit $h_k(x) = k \cdot (x^2 - 1) \cdot e^x$ und $x \in \mathbb{R}$ betrachtet. Damit entspricht die Funktion h_2 der Funktion f, deren Graph in Abbildung 1 dargestellt ist.

d Begründen Sie ohne Rechnung, dass der Graph von h_1 einen Tiefpunkt besitzt, der im gleichen Quadranten wie der Tiefpunkt des Graphen von h_2 liegt. Skizzieren Sie den Graphen von h_1 in der Abbildung 1.

1d: <u>Ohne Rechnung</u> Existenz eines Tiefpunktes <u>begründen</u>. Graph von h_1 <u>skizzieren</u>.

Kenntnisse über den Streckfaktor k in $y = k \cdot f(x)$ anwenden:

Der Faktor k in $h_k(x) = k \cdot (x^2 - 1) \cdot e^x$ bewirkt für k > 0 eine Streckung/ Stauchung der Funktionswerte in y-Richtung von $g(x) = (x^2 - 1) \cdot e^x$ um eben diesen Faktor.
Die Funktionswerte von $f(x) = 2 \cdot (x^2 - 1) \cdot e^x$ sind also doppelt so groß wie die von $h_1(x) = 1 \cdot (x^2 - 1) \cdot e^x$.
Um den Graphen von h_1 zu skizzieren, müssen also nur einige der Funktionswerte von f(x) halbiert werden.
Die Nullstellen bleiben erhalten.



Die Funktion H_k mit $H_k(x) = k \cdot \left(x^2 - 2x + 1\right) \cdot e^x$ und $x \in \mathbb{R}$ ist eine Stammfunktion von h_k.	
e Für jeden Wert von k schließen der Graph von h_k und die x-Achse ein Flächenstück ein. Bestimmen Sie denjenigen Wert von k, für den das Flächenstück den Inhalt 1 hat.	5
f Die Funktion h_2 besitzt zwei Stammfunktionen, deren Graphen jeweils in einem Punkt die x-Achse als Tangente haben. Ermitteln Sie jeweils einen Term dieser Stammfunktionen.	4

1e: Wert für k <u>bestimmen</u>:

Das Flächenstück, dass der Graph von h_k mit der x-Achse einschließt, liegt unterhalb der x-Achse zwischen den beiden von k unabhängigen Nullstellen $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$.

Der Flächeninhalt A dieses Flächenstücks kann mit dem bestimmten Integral $\int_{-1}^{1} h_k(x)dx$ berechnet werden. Dabei ist zu beachten, dass dieses Integral einen negativen Wert zurückgibt, weil das Flächenstück unterhalb der x-Achse liegt. Also ist $A = \left|\int_{-1}^{1} h_k(x)dx\right|$. Da die Stammfunktion von H_k bekannt ist, ergibt sich weiter:

$$A = \left|[k \cdot (x^2 - 2x + 1) \cdot e^x]_{-1}^{1}\right|$$

$$A = |(k \cdot (1^2 - 2 \cdot 1 + 1) \cdot e^1) - (k \cdot ((-1)^2 - 2 \cdot (-1) + 1) \cdot e^{-1})|$$

$$A = \left|0 - k \cdot 4 \cdot \frac{1}{e}\right| = \frac{4k}{e}$$

Der Flächeninhalt A soll den Wert 1 haben. Also gilt $\frac{4k}{e} = 1$ und damit $k = \frac{e}{4}$.

1f: Terme von Stammfunktionen <u>ermitteln</u>:

Die Funktion h_2 besitzt unendlich viele Stammfunktionen $H_2(x) + c$ mit $c \in \mathbb{R}$, die sich nur durch eine additive Konstante c unterscheiden.

Nach Definition gilt $H_2'(x) = h_2$. Wenn ein Graph von $H_2(x) + c$ die x-Achse als Tangente hat, dann muss dort der Anstieg null sein.
Es ist also zu prüfen, wann $h_2(x)$ den Wert null hat.
Die Nullstellen von $h_2(x) = f(x)$ sind in Teilaufgabe 1b bereits mit $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$ thematisiert worden. Sie sind unabhängig von k.
Demzufolge können die Werte der Integrationskonstanten c aus $H_2(-1) + c = 0$ und $H_2(1) + c = 0$ ermittelt werden:
$H_2(-1) + c = 0 \Longrightarrow\ 2 \cdot ((-1)^2 - 2 \cdot (-1) + 1) \cdot e^{-1} + c = 0$
$\Longrightarrow 8 \cdot e^{-1} + c = 0 \Longrightarrow c_1 = -\ \frac{8}{e}$
$H_2(1) + c = 0 \Longrightarrow\ 2 \cdot ((1)^2 - 2 \cdot (1) + 1) \cdot e^{-1} + c = 0$
$\Longrightarrow 2 \cdot 0 + c = 0 \Longrightarrow c_2 = 0$
Die Terme der gesuchten Stammfunktionen sind
$H_2(x) = 2 \cdot (x^2 - 2x + 1) \cdot e^x - \frac{8}{e}$ und $H_2(x) = 2 \cdot (x^2 - 2x + 1) \cdot e^x + 0$.

2 Zur Bestimmung der Wasserqualität eines Gewässers wurde über einen Zeitraum von 40 Jahren der Zusammenhang zwischen der Phosphorkonzentration und der Algenkonzentration in dem Gewässer untersucht.

Die zeitliche Entwicklung der Phosphorkonzentration kann modellhaft durch die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion p und die zeitliche Entwicklung der zugehörigen Algenkonzentration durch die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion a beschrieben werden. Dabei ist t die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Jahren, $p(t)$ die Phosphorkonzentration in $\frac{mg}{m^3}$ und $a(t)$ die Algenkonzentration in $\frac{mg}{m^3}$.

Für $0 \leq t \leq 40$ zeigt die Abbildung 2 den Graphen von p, die Abbildung 3 den Graphen der ersten Ableitungsfunktion von a.

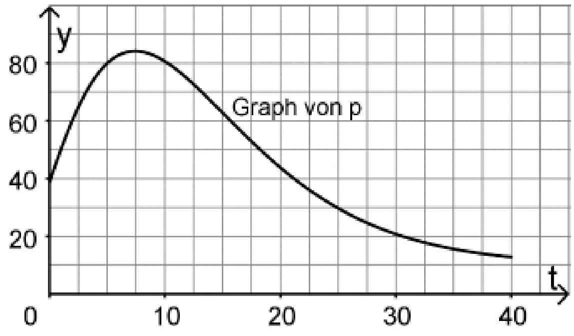


Abb. 2

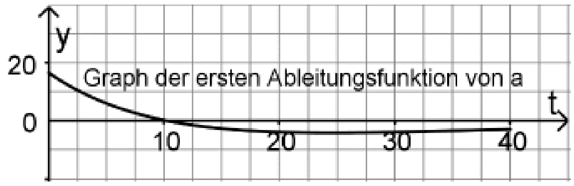
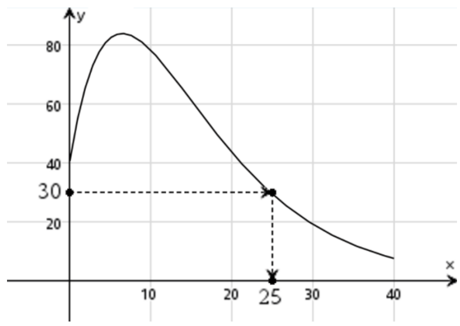


Abb. 3

a Geben Sie den Zeitpunkt an, zu dem die Phosphorkonzentration $30\,\frac{mg}{m^3}$ beträgt. 2

b Der Graph von p besitzt für $t \geq 10$ einen Wendepunkt. Beschreiben Sie die Bedeutung dieses Wendepunkts für die Entwicklung der Phosphorkonzentration im Gewässer. 2

2a: Zeitpunkt <u>angeben:</u>



Aus dem Graphen von p lässt sich der gesuchte Zeitpunkt ablesen. Nach ca. 25 Jahren nach Beobachtungsbeginn beträgt die Phosphorkonzentration 30 mg/m³.

2b: Bedeutung des Wendepunktes <u>beschreiben</u>.

Die Zeitkoordinate des Wendepunktes gibt an, zu welchem Zeitpunkt die Phosphorkonzentration des Gewässers innerhalb des Beobachtungszeitraums am stärksten abnimmt.

c Beurteilen Sie anhand der Abbildungen 2 und 3 die folgende Aussage: *Ab dem Zeitpunkt, ab dem sich die Phosphorkonzentration verringert, verringert sich auch die Algenkonzentration.*	3
d Zehn Jahre nach Beobachtungsbeginn beträgt die Algenkonzentration $100\,\frac{\text{mg}}{\text{m}^3}$. Bestimmen Sie die Algenkonzentration zu Beobachtungsbeginn. Veranschaulichen Sie Ihr Vorgehen in der Abbildung 3.	4
	35

2c: Aussage <u>beurteilen</u>:

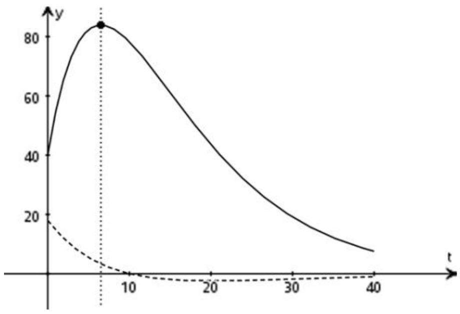


Abb. 2

Um die Aussage zu beurteilen, muss man ihren Wahrheitsgehalt feststellen und seine Meinung begründen.

Der Zeitpunkt t_1, ab dem sich die Phosphorkonzentration verringert, ist daran zu erkennen, dass für $t \geq t_1$ der Graph von p monoton fällt. Dies ist, wie man der Abbildung 2 entnehmen kann, nach etwa 7 Jahren der Fall ($t_1 \approx 7$).

Die Algenkonzentration verringert sich dann, wenn ihre Änderungsrate negativ ist. Diese Änderungsrate ist in der Abbildung 3 dargestellt. Sie wird für $t > t_2 = 10$ negativ.

Wegen $t_2 > t_1$ ist die Aussage falsch.

2d: Algenkonzentration <u>bestimmen</u>; Vorgehen in Abb. 3 <u>veranschaulichen</u>:

Da der Graph in Abb. 3 die Änderungsrate der Algenkonzentration darstellt, kann die Algenkonzentration selbst als Flächeninhalt der Fläche interpretiert werden, die vom Graph von a und der t-Achse selbst im Intervall $0 \leq t \leq 10$ eingeschlossen wird. Diese Fläche kann näherungsweise durch ein rechtwinkliges Dreieck mit den Kathetenlängen 10 und 13 beschrieben werden.

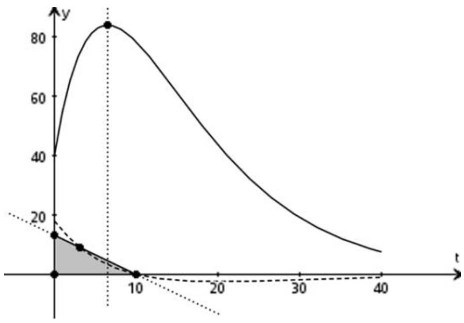


Abb. 3

Deren Flächeninhalt ist $\mathrm{A} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 13 = 65\ \mathrm{mg/m^3}$. Innerhalb der ersten 10 Jahre nimmt die Algenkonzentration also um ca. 65 mg/m³ zu. Laut Aufgabenstellung beträgt die Algenkonzentration 10 Jahre nach Beobachtungsbeginn 100 mg/m³.
Zu Beobachtungsbeginn muss die Algenkonzentration demnach etwa 100 mg/m³-65 mg/m³ = 35 mg/m³ betragen haben.

BE

1 Gegeben ist die in IR definierte Funktion f mit $f(x)=\frac{3}{1000}\cdot x^4-\frac{8}{100}\cdot x^3+\frac{6}{10}\cdot x^2$.

Abbildung 1 zeigt den Graphen von f sowie den Punkt $P\left(0\,|\,-\frac{5}{8}\right)$.

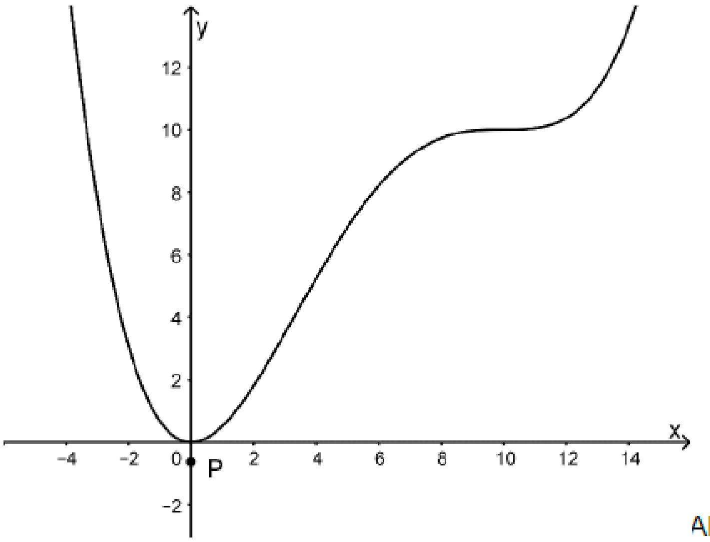


Abb. 1

a Geben Sie die Koordinaten des Tiefpunkts des Graphen von f an. Zeigen Sie rechnerisch, dass der Graph von f keine weiteren Extrempunkte besitzt. 6

1a: Tiefpunkt angeben; rechnerisch zeigen, dass es keine weiteren Extrempunkte gibt:

Da man die Koordinaten des Tiefpunktes nur angeben soll, kann man sie dem Graphen entnehmen: T(0|0).

Für die Existenz von lokalen Extrempunkten sind die Nullstellen der 1. Ableitung eine notwendige Bedingung.

$$f(x)=\frac{3}{1000}x^4-\frac{8}{100}x^3+\frac{6}{10}x^2$$

$$f'(x)=\frac{12}{1000}x^3-\frac{24}{100}x^2+\frac{12}{10}x=\frac{12}{10}x\cdot\left(\frac{1}{100}x^2-\frac{2}{10}x+1\right)$$

Für die Berechnung der Nullstellen von $f'(x)$ kommt der Satz vom Nullprodukt zur Anwendung:

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{12}{10}x=0 \text{ oder } \frac{1}{100}x^2-\frac{2}{10}x+1=0$$

Die Bedingung $\frac{12}{10}x=0$ führt auf $x=0$ und damit auf die x-Koordinate des Tiefpunktes T(0|0).

Um $\frac{1}{100}x^2-\frac{2}{10}x+1=0$ zu lösen, wird durch Multiplikation mit 100 die Normalform einer quadratischen Gleichung hergestellt:

$$\frac{1}{100}x^2-\frac{2}{10}x+1=0 \mid \cdot 100$$

$$x^2-20x+100=0$$

Diese Gleichung kann mit der p-q-Formel oder durch Umwandlung in ein vollständiges Quadrat gelöst werden:

p-q-Formel: $x_{1/2} = 10 \pm \sqrt{10^2 - 100} = 10$

Mit binomischer Formel $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ Umwandlung in ein vollständiges Quadrat:

$x^2 - 20x + 100 = (x-10)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 10$

Mit der hinreichenden Bedingung $f''(x) \neq 0$ für lokale Extrema kann geprüft werden, ob an den möglichen Extremstellen $x_{e1} = 0$ und $x_{e2} = 10$ wirklich lokale Extrema vorliegen und welcher Art sie ggf. sind.

$f'(x) = \frac{12}{1000}x^3 - \frac{24}{100}x^2 + \frac{12}{10}x$

$f''(x) = \frac{36}{1000}x^2 - \frac{48}{100}x + \frac{12}{10}$

$f''(0) = \frac{12}{10} > 0$

Damit wird nochmals die Existenz eines lokalen Minimums an der Stelle $x_{e1} = 0$ bestätigt.

$f''(10) = \frac{36}{10} - \frac{48}{10} + \frac{12}{10} = 0$

An der Stelle $x_{e2} = 10$ liegt kein lokales Extremum vor. Mit Blick auf den Graphen von f ist zu erkennen, dass dort mit hoher Wahrscheinlichkeit ein Wendepunkt existiert.

Dies kann mithilfe der 3. Ableitung - wie verlangt - auch rechnerisch gezeigt werden:

$f''(x) = \frac{36}{1000}x^2 - \frac{48}{100}x + \frac{12}{10}$

$f'''(x) = \frac{72}{1000}x - \frac{48}{100}$

$f'''(10) = \frac{72}{100} - \frac{48}{100} = \frac{24}{100} > 0$

Hier liegt ein Rechts-Links-Wendepunkt vor.

Alternative Lösung:

$f'(x) = \frac{12}{1000}x^3 - \frac{24}{100}x^2 + \frac{12}{10}x = \frac{12}{1000}x \cdot (x^2 - 20x + 100) = \frac{12}{1000}x \cdot (x-10)^2$

Die Nullstellen von f' sind als mögliche Extremstellen sofort zu erkennen: $x_{e1} = 0$ und $x_{e2} = 10$.

Zieht man als hinreichende Bedingung für lokale Extremstellen einen Vorzeichenwechsel von f' in der Umgebung der möglichen Nullstellen in Betracht, so ist zu erkennen, dass die zum Faktor $\frac{12}{1000}x$ gehörende lineare Funktion $y = \frac{12}{1000}x$ an der Stelle x = 0 das Vorzeichen von Minus nach Plus wechselt. Dort liegt also ein lokales Minimum vor.

Die zum Faktor $(x-10)^2$ gehörende quadratische Funktion $y = (x-10)^2$ ergibt als Graphen eine verschobene Normalparabel, die die x-Achse von oben an der Stelle x = 10 berührt, aber dort nicht das Vorzeichen wechselt. Deshalb liegt dort kein lokales Extremum vor.

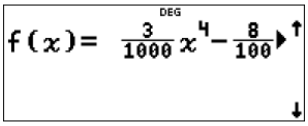
Die Tangente an den Graphen von f im Punkt $(5\,|\,f(5))$ wird mit t bezeichnet.	
b Ermitteln Sie eine Gleichung von t.	4

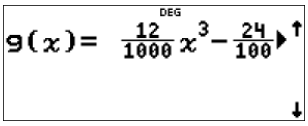
1b: Gleichung der Tangente in (5|f(5)) <u>ermitteln</u>:

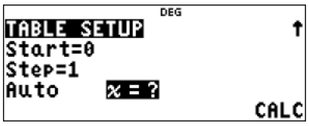
Es muss die y-Koordinate von T(5|f(5)) ermittelt werden. Außerdem wird der Anstieg, also der Wert der 1. Ableitung von f an der Stelle x = 5 benötigt.

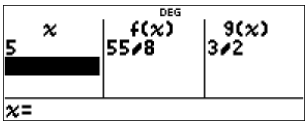
Zur Berechnung wird der WTR TI-30X Prio MathPrint verwendet.

Mit [table][1] wird die Tabellieranwendung geöffnet. Unter f(x) wird die gegebene Funktion eingetragen, unter g(x) ihre 1. Ableitung (siehe Teilaufgabe 1a). Die Funktionswerte für x = 5 lassen sich in der Tabelle anzeigen.









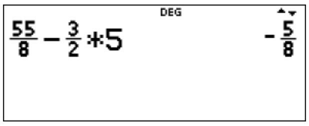
$f(5) = \frac{55}{8}$ $\qquad f'(5) = \frac{3}{2}$

Die Tangente im Punkt $T\left(5|\frac{55}{8}\right)$ hat den Anstieg $m = \frac{3}{2}$. Durch Einsetzen dieser Werte in die allgemeine Tangentengleichung $y = m \cdot x + n$ kann der Wert für n ermittelt werden.

$\frac{55}{8} = \frac{3}{2} \cdot 5 + n$

$\frac{55}{8} - \frac{3}{2} \cdot 5 = n$

$n = -\frac{5}{8}$

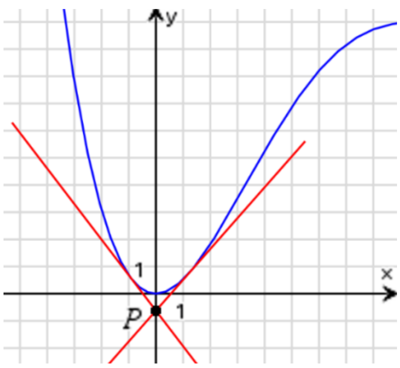


Tangentengleichung: $y = \frac{3}{2} \cdot x - \frac{5}{8}$

c Skizzieren Sie in Abbildung 1 zwei von t verschiedene Tangenten an den Graphen von f, die die y-Achse im Punkt P schneiden und deren Steigungen unterschiedliche Vorzeichen haben.	3

1c: Zwei Tangenten durch P <u>skizzieren</u>:

Durch Anlegen eines Lineals, dessen Kante durch den Punkt P verläuft und den Graphen berührt, lassen sich zwei solcher Tangenten einzeichnen. Dabei ist zu beachten, dass ihre Anstiege unterschiedliche Vorzeichen haben und dass sie von t verschieden sind.



d Der Graph der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion g kann aus dem Graphen von f erzeugt werden. Der Punkt $(12\|12)$ des Graphen von g wird dabei aus dem Punkt $(10\|10)$ des Graphen von f erzeugt und für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $g(x) = a \cdot f(b \cdot x)$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+$. Geben Sie in diesem Zusammenhang die Bedeutung von a und b an und berechnen Sie die Werte von a und b.	4

1d: Bedeutung von a und b <u>angeben</u>; die Werte von a und b <u>berechnen</u>:

Wenn der Punkt (12|12) auf dem Graphen von g liegt, dann gilt $g(12) = 12$.

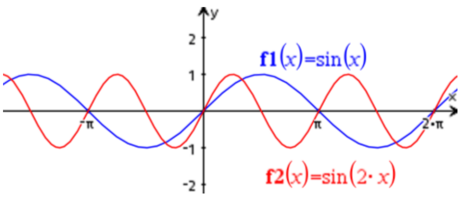
Wenn der Punkt (10|10) auf dem Graphen von f liegt, dann gilt $f(10) = 10$.

Es soll gelten $g(x) = a \cdot f(b \cdot x)$, d.h.:

Der Graph von g wird durch Streckung in y-Richtung mit dem Faktor a und durch Streckung in x-Richtung mit dem Faktor $\frac{1}{b}$ aus dem Graphen von f erzeugt.

Hinweis: $f(b \cdot x_1) = f(x_0) \Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{b} \cdot x_0$

Wenn z. B. die Funktion $f(x) = \sin(x)$ ihre Nullstellen bei $x_0 = k \cdot \pi \ \ (k \in \mathbb{Z})$ hat, dann besitzt die Funktion $g(x) = \sin(2x)$ ihre Nullstellen bei $x_1 = k \cdot \frac{\pi}{2} \ \ (k \in \mathbb{Z})$.



Streckung in y-Richtung:

$g(12) = a \cdot f(10)$

Nach Voraussetzung ist $g(12) = 12$ und $f(10) = 10$. Dies in obige Gleichung eingesetzt, ergibt $12 = a \cdot 10$, also $a = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$.

Streckung in x-Richtung:

$\frac{1}{b} \cdot 10 = 12$, also $b = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$.

2 Zwei Radfahrer starten gleichzeitig nebeneinander auf einer geradlinigen Bahn aus einer Ruheposition. Radfahrer A beschleunigt 10 Sekunden lang und fährt danach mit konstanter Geschwindigkeit weiter. Radfahrer B beschleunigt 12 Sekunden lang und fährt dann mit konstanter Geschwindigkeit weiter.

Abbildung 2 stellt die Geschwindigkeitsverläufe der beiden Radfahrer in den ersten 15 Sekunden nach dem Start dar. Dabei wird der Geschwindigkeitsverlauf von Radfahrer A in den ersten 10 Sekunden nach dem Start durch die Funktion f aus Aufgabe 1 beschrieben. Der Geschwindigkeitsverlauf von Radfahrer B wird in den ersten 12 Sekunden nach dem Start durch eine Funktion h beschrieben.

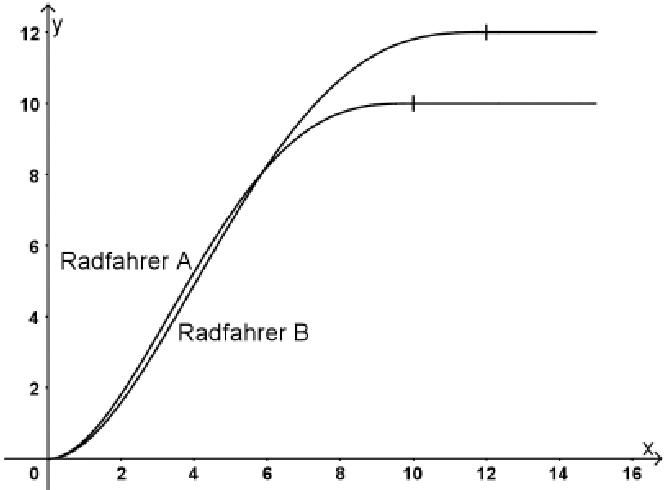


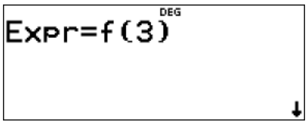
Abb. 2

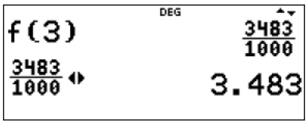
Dabei ist x die seit dem Start vergangene Zeit in Sekunden und $f(x)$ bzw. $h(x)$ die Geschwindigkeit in Meter pro Sekunde.

a Berechnen Sie die Geschwindigkeit von Radfahrer A drei Sekunden nach dem Start. 2

2a: Geschwindigkeit von Radfahrer A <u>berechnen</u>:

Radfahrer A mit Funktion f aus Teilaufgabe 1:2b:





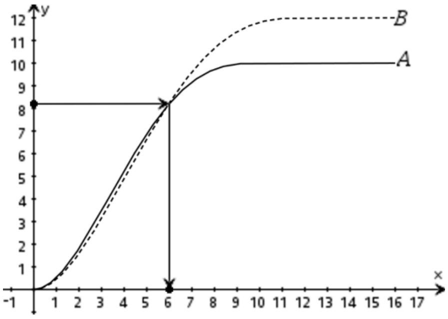
Da die Funktion f unter [table] gespeichert ist, lässt sich f(3) z.B. mit Hilfe von [2nd] [expr-eval] berechnen.

Die Geschwindigkeit von Radfahrer A beträgt 3 Sekunden nach dem Start etwa 3,5 m/s.

Nach dem Start gibt es genau einen Zeitpunkt, zu dem die Geschwindigkeiten beider Radfahrer gleich groß sind. Im Modell wird dieser Zeitpunkt mit x_S bezeichnet.	
b Ermitteln Sie x_S mithilfe von Abbildung 2 und geben Sie den Zeitraum an, in dem die Geschwindigkeit von Radfahrer A größer ist als die Geschwindigkeit von Radfahrer B.	3

2b: Zeitpunkt <u>ermitteln</u>; Zeitraum <u>angeben</u>:

Um den Zeitpunkt der gleichen Geschwindigkeiten zu ermitteln, werden beide Graphen auf Schnittpunkte untersucht. Es gibt außerhalb des Ursprungs genau einen solchen Schnittpunkt für $x_S = 6\ s$. Sechs Sekunden nach dem Start haben beide Radfahrer dieselbe Geschwindigkeit.



Da nur im Zeitraum $0 < x < 6$ der Graph von A über dem von B liegt, besitzt Radfahrer A in diesem Zeitraum eine größere Geschwindigkeit als Radfahrer B.

c Im Folgenden ist ein Lösungsweg für eine Aufgabe im gegebenen Sachzusammenhang dargestellt. Geben Sie die Bedeutung von $d(x)$ für $0 < x < x_S$ im Sachzusammenhang an und interpretieren Sie das Ergebnis 0,37. $d(x) = f(x) - h(x)$ $d'(x) = 0$ hat für $0 < x < x_S$ nur die Lösung $x_1 \approx 3{,}64$. $d''(x_1) \approx -0{,}13 < 0$ $d(x_1) \approx 0{,}37$	4

2c: Bedeutung von d(x) <u>angeben</u> und Ergebnis 0,37 <u>interpretieren</u>:

Die Differenz $d(x) = f(x) - h(x)$ gibt für den Zeitpunkt x Sekunden

(mit $0 < x < x_S$) nach dem Start an, um wie viele Meter pro Sekunde Radfahrer A schneller ist als Radfahrer B.

Die Nullstelle von $d'(x)$ ist der Zeitpunkt x_1 eines möglichen lokalen Extremums. Wegen $d'(x_1) < 0$ liegt zum Zeitpunkt x_1 ein lokales Maximum vor. Der Wert $d(x_1) \approx 0{,}37$ dieses Maximums ist der größte Wert für den Unterschied zwischen den Geschwindigkeiten von Radfahrer A gegenüber Radfahrer B.

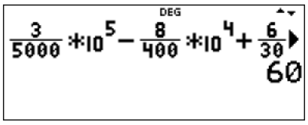
d Berechnen Sie die Länge der Strecke, die Radfahrer A in den ersten 15 Sekunden nach dem Start zurücklegt.	6

2d: Länge der Strecke berechnen:

Für die ersten zehn Sekunden kann die Länge der Strecke s_1 mit $\int_0^{10} f(x)dx$ berechnet werden.

$$s_1 = \int_0^{10} f(x)dx = \int_0^{10}\left(\frac{3}{1000}x^4 - \frac{8}{100}x^3 + \frac{6}{10}x^2\right)dx = \left[\frac{3}{5000}x^5 - \frac{8}{400}x^4 + \frac{6}{30}x^3\right]_0^{10}$$

$$s_1 = \frac{3}{5000}\cdot 10^5 - \frac{8}{400}\cdot 10^4 + \frac{6}{30}\cdot 10^3 = 60$$



In den ersten 10 Sekunden wird ein Weg von $s_1 = 60\ m$ zurückgelegt.

Für die verbleibenden 5 Sekunden von insgesamt 15 Sekunden liegt eine gleichförmige Bewegung mit der konstanten Geschwindigkeit von $v_0 = 10\ \frac{m}{s}$ vor. Der in diesem Abschnitt zurückgelegte Weg ist $s_2 = 10\ \frac{m}{s} \cdot 5\ s = 50\ m$.

Der insgesamt zurückgelegte Weg ist $s = 60\ m + 50\ m = 110\ m$.

e Es gibt ein z mit $0 < z < 10$, für das gilt: $\int_0^z \left(f(x) - h(x)\right)dx = 0$ Geben Sie die Bedeutung von z im Sachzusammenhang an und begründen Sie im Sachzusammenhang, dass $z > x_S$ gilt.	3
	35

2e: Bedeutung von z angeben und begründen, dass $z > x_S$ gilt:

$\int_0^z (f(x) - h(x))dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^z f(x)dx = \int_0^z h(x)dx$
Das Integral $\int_0^z f(x)dx$ gibt den von Radfahrer A in den ersten z Sekunden zurückgelegte Weg s_A an.

Das Integral $\int_0^z h(x)dx$ gibt den von Radfahrer B in den ersten z Sekunden zurückgelegte Weg s_B an.

Damit ist $\int_0^z f(x)dx = \int_0^z h(x)dx$ gleichbedeutend mit $s_A = s_B$.

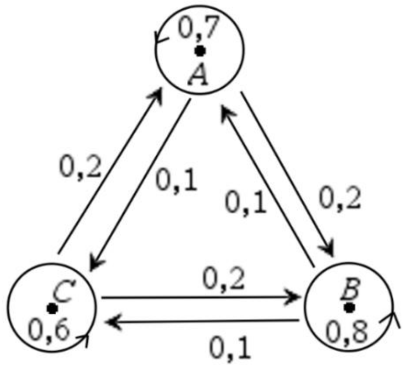
Zum Zeitpunkt, der im Modell mit z angegeben ist, haben beide Radfahrer die gleiche Strecke zurückgelegt.

Es gilt $z > x_S$, da sich Radfahrer A in den ersten x_S Sekunden stets vor Radfahrer B befindet (vgl. Teilaufgabe 2b).

	BE
1 Ein Unternehmen bietet in einer Stadt insgesamt 900 E-Scooter zum Ausleihen an. Das Stadtgebiet wurde in drei Bereiche A, B und C aufgeteilt. Die Nutzung der E-Scooter ist nur in diesen Bereichen möglich. Die Verteilung der E-Scooter im Stadtgebiet kann durch Vektoren $\overrightarrow{v_n}$ der Form $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ beschrieben werden, wobei a, b und c die Anzahlen der E-Scooter in den Bereichen A, B bzw. C sind. Die Entwicklung der Verteilung vom Ende eines Tages n zum Ende des nächsten Tages wird modellhaft durch die Gleichung $\overrightarrow{v_{n+1}} = M \cdot \overrightarrow{v_n}$ mit $M = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}6 \end{pmatrix}$ und $n \geq 0$ beschrieben. Hierbei bezeichnet $\overrightarrow{v_0}$ die Verteilung der E-Scooter zu Beginn der Beobachtung.	
a Stellen Sie die Entwicklung der Verteilung der E-Scooter vom Ende eines Tages bis zum Ende des nächsten Tages in einem Übergangsdiagramm dar.	3

1a: <u>Darstellen</u> im Übergangsdiagramm:

nach↓	von→	**A**	**B**	**C**
	A	0,7	0,1	0,2
	B	0,2	0,8	0,2
	C	0,1	0,1	0,6



b Es gilt $M \cdot \begin{pmatrix} 300 \\ 200 \\ 400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Berechnen Sie den Wert von b und geben Sie seine Bedeutung im Sachzusammenhang an.	2

1b: Wert von b <u>berechnen</u> und <u>deuten</u>:

Mit dem Schema von Falk erhält man:

			300
			200
			400
0,7	0,1	0,2	
0,2	0,8	0,2	$\mathbf{300 \cdot 0{,}2 + 200 \cdot 0{,}8 + 400 \cdot 0{,}2 = 300 = \boldsymbol{b}}$
0,1	0,1	0,7	

Deutung: Am Ende des nächsten Tages befinden sich 300 E-Scooter im Bereich B.

c Am Ende eines Tages befindet sich ein Drittel der E-Scooter im Bereich A. Ermitteln Sie, wie viele E-Scooter mindestens und wie viele E-Scooter höchstens am Ende des nächsten Tags im Bereich A zu erwarten sind.	4

1c: Intervall für Anzahlen ermitteln:

Am Tag n befinden sich ein Drittel aller E-Scooter im Bereich A. Das sind $\frac{1}{3} \cdot 900 = 300$ E-Scooter. Für die Bereiche B und C lassen sich die Anzahlen z. B. so angeben:
Im Bereich B sind am Ende von Tag n unbekannte b E-Scooter, im Bereich C sind es $900 - 300 - b = 600 - b$ E-Scooter, wobei gilt $0 \leq b \leq 600$.

Mit dem Schema von Falk kann man nun den Übergang vom Tag n zum Ende des nächsten Tages n+1 im Modell beschreiben.

			300
			b
			600 - b
0,7	0,1	0,2	$\mathbf{300 \cdot 0,7 + b \cdot 0,1 + (600 - b) \cdot 0,2}$
0,2	0,8	0,2	
0,1	0,1	0,7	

Nebenrechnung:

$300 \cdot 0{,}7 + b \cdot 0{,}1 + (600 - b) \cdot 0{,}2 = 210 + 0{,}1b + 120 - 0{,}2b = 330 - 0{,}1b$

Mit $0 \leq b \leq 600$ folgt daraus, dass sich der größte Wert von 330 – 0,1b für b = 0 ergibt, also ist der größte Wert, den b annehmen kann, b = 330.

Mit $0 \leq b \leq 600$ folgt daraus, dass sich der kleinste Wert von 330 – 0,1b für b = 600 ergibt, also ist der kleinste Wert, den b annehmen kann, $330 - 0{,}1 \cdot 600 = 330 - 60 = 270$.

Im Bereich A sind am Ende des nächsten Tages mindestens 270 und höchstens 330 E-Scooter zu erwarten.

d In einer bestimmten Woche werden am Ende des Dienstags 20 % der E-Scooter, die sich im Bereich C befinden, zu Wartungszwecken entnommen und nach 48 Stunden in den Bereich C zurückgebracht. Der Vektor $\vec{d}$ beschreibt die Verteilung der E-Scooter am Ende des Dienstags direkt vor der Entnahme. Entscheiden Sie, welcher der folgenden drei Vektoren $\vec{f}$, $\vec{g}$ und $\vec{h}$ die Verteilung der E-Scooter am Ende des Freitags in der betrachteten Woche beschreibt. Erläutern Sie für die anderen beiden Vektoren jeweils ein mögliches Szenario im vorgegebenen Sachkontext. ♦ $\vec{f}=M\cdot M\cdot\left(M\cdot\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0{,}2\end{pmatrix}\cdot\vec{d}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0{,}8\end{pmatrix}\cdot\vec{d}\right)$ ♦ $\vec{g}=M\cdot\left(M\cdot M\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0{,}8\end{pmatrix}\cdot\vec{d}+\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0{,}2\end{pmatrix}\cdot\vec{d}\right)$ ♦ $\vec{h}=M\cdot\left(M\cdot M\cdot\left(\vec{d}-0{,}2\cdot\vec{d}\right)+\begin{pmatrix}0\\0\\20\end{pmatrix}\right)$	5

1d: <u>Entscheiden</u>, welche Verteilung richtig ist. <u>Erläutern</u>, was die beiden anderen Verteilungen im Sachkontext beschreiben.

Richtig ist die Entscheidung für Vektor $\vec{g}$.

Eine Begründung wird mit dem Operator „Entscheiden Sie“ nicht verlangt. Sie wird zum besseren Verständnis hier angegeben:

Der Vektor $\vec{d}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ beschreibe die Verteilung am Dienstagabend vor der Entnahme der 20 % Fahrzeuge aus Bereich C.

Das Matrix-Vektor-Produkt $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0{,}8\end{pmatrix}\cdot\vec{d}=\begin{pmatrix}x\\y\\0{,}8z\end{pmatrix}$ gibt dann die Verteilung nach der Entnahme von 20 % E-Scooter am Dienstagabend an.

Am Mittwoch und Donnerstag erfolgt dann die Verteilung der E-Scooter nach der Verteilungsmatrix M. Am Donnerstagabend vor der Zurückgabe der entnommenen E-Scooter wird der Bestand durch den Term $M\cdot M\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0{,}8\end{pmatrix}\cdot\vec{d}$ beschrieben. Der Summand $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0{,}2\end{pmatrix}\cdot\vec{d}$ steht für die Anzahl der Rückgabe der am Dienstagabend entnommenen E-Scooter.

Der Term $M \cdot M \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \vec{d} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}2 \end{pmatrix} \cdot \vec{d}$ gibt den Bestandsvektor der Verteilung am Donnerstagabend nach der Rückgabe der am Dienstag entnommenen E-Scooter an.

Nun erfolgt bis zum Freitagabend nochmals eine Umverteilung nach der Umverteilungsmatrix M. Dies wird durch den Vektor $\vec{g}$ beschrieben:

$$\vec{g} = M \cdot \left[M \cdot M \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \vec{d} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}2 \end{pmatrix} \cdot \vec{d} \right]$$

Szenario zu Vektor $\vec{f}$:

Im Bereich C werden am Ende des Dienstags 80 % der E-Scooter und in den Bereichen A und B alle E-Scooter entnommen. Im Laufe des Mittwochs erfolgt eine Umverteilung nach Modell M. Am Ende des Mittwochs werden die entnommenen E-Scooter wieder in die entsprechenden Bereiche zurückgebracht.

Der neue Zustandsvektor vom Mittwochabend wird dann bis zum Freitagabend noch zweimal nach M umverteilt.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}2 \end{pmatrix} \cdot \vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0{,}2z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \vec{d} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0{,}8z \end{pmatrix}$$

Szenario zu Vektor $\vec{h}$:

In jedem Bereich werden am Ende des Dienstags 20 % der E-Scooter entnommen. Sie werden am Mittwoch und im Laufe des Donnerstags nach Modell M umverteilt. Am Abend des Donnerstags werden 20 E-Scooter im Bereich C hinzugefügt. Dieser neue Zustandsvektor wird dann bis zum Freitagabend nochmals nach dem Modell M umverteilt.

Im Folgenden werden ausschließlich Vektoren betrachtet, die für den Vektor $\overrightarrow{v_0}$ infrage kommen. Die Vektoren, die die Verteilung der 900 E-Scooter beschreiben, lassen sich in einem Koordinatensystem auch geometrisch auffassen.

e Entscheiden Sie, ob zwei der betrachteten Vektoren unterschiedliche Beträge haben können. Begründen Sie Ihre Entscheidung. 2

f Beurteilen Sie jede der folgenden Aussagen: 4

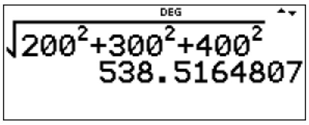
- Unter den betrachteten Vektoren gibt es zwei unterschiedliche, die einen Winkel der Größe 0° einschließen.
- Unter den betrachteten Vektoren gibt es zwei, die einen Winkel der Größe 90° einschließen.

20

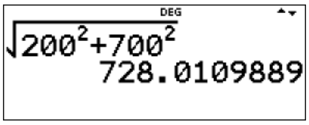
1e: Entscheiden und begründen, ob zwei Anfangsvektoren unterschiedliche Beträge haben können:

Die Vektoren $\overrightarrow{v_0}$ beschreiben die Verteilung der E-Scooter zu Beginn. Bekannt ist, dass zu Beginn 900 E-Scooter vorhanden waren. Also ist die Summe der Koordinaten bei jedem Vektor $\overrightarrow{v_0}$ gleich 900. Es ist möglich, dass zwei solche Vektoren unterschiedliche Beträge haben.

Beispiel: $\left|\begin{pmatrix}200\\300\\400\end{pmatrix}\right| = \sqrt{200^2+300^2+400^2} \approx 538{,}5$



und : $\left|\begin{pmatrix}200\\700\\0\end{pmatrix}\right| = \sqrt{200^2+700^2+0^2} \approx 538{,}5$



1f: Aussagen beurteilen:

Aussage 1:

Zwei unterschiedliche dieser Vektoren haben immer die Summe 900 ihrer Koordinaten. Wenn die Koordinaten aber außerdem verschieden voneinander sind, kann nicht ein Vektor ein Vielfaches des zweiten Vektors sein. Dies wäre aber die Voraussetzung, um einen Winkel von 0° einzuschließen. Die Aussage ist falsch.

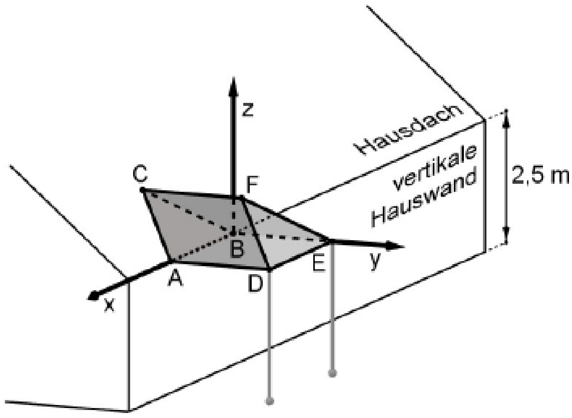
Aussage 2:

Die Aussage ist richtig, wie ein Beispiel belegt:

$$\begin{pmatrix}200\\0\\700\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}0\\900\\0\end{pmatrix} = 0$$

Die Vektoren schließen ein Winkel von 90° ein, weil ihr Skalarprodukt null ist.

BE



Die Abbildung zeigt modellhaft eine Eingangsüberdachung, die an einem Hausdach angebracht ist. Die Eingangsüberdachung besteht aus einer dreieckigen und zwei viereckigen Dachflächen, deren Eckpunkte im verwendeten Koordinatensystem durch die Punkte $A(3|0|0)$, $B(0|0|0)$, $C(1{,}5|-1{,}2|1)$, $D(3|2|0)$, $E(0|2|0)$ und $F(1{,}5|0{,}8|1)$ dargestellt werden. Die Punkte A, B und C markieren Befestigungspunkte am Hausdach. Es gilt $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CF}$ und $|\overrightarrow{DF}| = |\overrightarrow{EF}|$.
Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht einem Meter in der Realität. Alle Materialstärken werden im Folgenden vernachlässigt. Der Übergang vom Hausdach zur vertikalen Hauswand liegt im Modell in der x-Achse.

a Die beiden viereckigen Dachflächen der Eingangsüberdachung haben jeweils einen Flächeninhalt von etwa $3{,}6\,m^2$. Die Eingangsüberdachung soll mit Dachziegeln gedeckt werden. Bestimmen Sie den Inhalt der zu bedeckenden Fläche. 4

1a: Flächeninhalt <u>bestimmen</u>:

Aus $|\overrightarrow{DF}| = |\overrightarrow{EF}|$ folgt, dass das Dreieck DEF gleichschenklig mit der Grundseite $\overline{DE}$ ist.

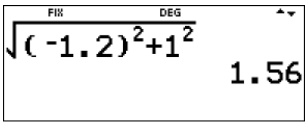
Die Länge von $\overline{DE}$ entspricht dem Betrag des Vektors $\overrightarrow{DE}$:

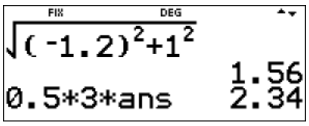
$$|\overrightarrow{DE}| = \left|\begin{pmatrix} 0-3 \\ 2-2 \\ 0-0 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = 3.$$

Die Höhe des Dreiecks DEF entspricht der Länge des Vektors $\overrightarrow{MF}$, wobei M der Mittelpunkt der Seite $\overline{DE}$ ist $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OD} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{DE} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

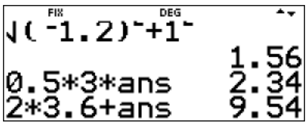
$$|\overrightarrow{MF}| = \left|\begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 0{,}8 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ -1{,}2 \\ 1 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{0^2 + (-1{,}2)^2 + 1^2} = \sqrt{2{,}44}$$

Der Inhalt der dreieckigen Stirnfläche DEF ist $A = 0{,}5 \cdot 3 \cdot \sqrt{2{,}44} \approx 2{,}3\ m^2$





Der Inhalt der gesamten zu bedeckenden Fläche beträgt $2 \cdot 3{,}6\ m^2 + 2{,}3\ m^2 \approx 9{,}5\ m^2$.



b Zur Beleuchtung werden an einer Strebe, die im Modell zwischen den Punkten A und E verläuft, zwei Lampen so befestigt, dass deren Befestigungspunkte diese Strebe in drei gleich lange Abschnitte teilen. Bestimmen Sie für einen dieser Befestigungspunkte die Koordinaten im Modell.	2

1b: Koordinaten für einen der Punkte <u>bestimmen</u>:

Für die beiden Befestigungspunkte L_1 und L_2 gilt:

$\overrightarrow{OL_1} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{AE}$ bzw. $\overrightarrow{OL_2} = \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{AE}$

Es genügt, für einen der Befestigungspunkte die Koordinaten zu bestimmen.

$$\overrightarrow{OL_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \cdot \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$L_1 \left(2 | \frac{2}{3} | 0\right) \qquad L_2 \left(1 | \frac{4}{3} | 0\right)$

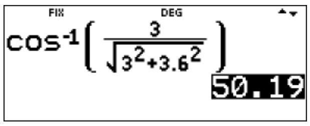
c Die in der Abbildung dargestellte Fläche des Hausdachs liegt im Modell in der Ebene mit der Gleichung $3y + 3{,}6z = 0$. Bestimmen Sie die Größe des Winkels im Inneren des Hauses zwischen Hausdach und vertikaler Hauswand. Ermitteln Sie für die Ebene, in der die dreieckige Dachfläche der Eingangsüberdachung liegt, eine Gleichung in Koordinatenform.	6

1c: Größe des Winkels zwischen Dachebene und Hauswand <u>bestimmen</u>;
Gleichung der Ebene, in der Dreieck DEF liegt, <u>ermitteln</u>:

Die Größe des Winkels kann mithilfe der Normalenvektoren beider den Winkel einschließenden Ebenen bestimmt werden.

Ebene der vertikalen Hauswand: $\overrightarrow{n_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ Ebene des Hausdachs: $\overrightarrow{n_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3{,}6 \end{pmatrix}$

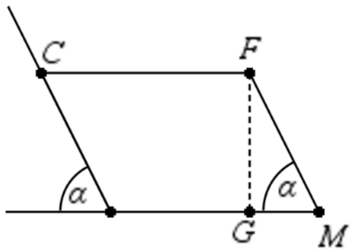
Winkel α zwischen den Normalenvektoren:



$$\alpha = arccos\left(\frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3{,}6 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3{,}6 \end{pmatrix}\right|} \right) = arccos\left(\frac{3}{1 \cdot \sqrt{3^2 + 3{,}6^2}}\right) \approx 50{,}2°$$

Der Winkel zwischen der Fläche des Hausdachs und der vertikalen Hauswand ist aber ein stumpfer Winkel der Größe $180° - 50{,}2° = 129{,}8°$.

Alternative Berechnung:
Denkt man sich einen Längsschnitt entlang der Kante $\overline{CF}$ und durch den Mittelpunkt M der Seite $\overline{DE}$ (vgl. Teilaufgabe 1a), dann taucht der gesuchte Winkel auch im rechtwinkligen Dreieck FGM auf und es gilt
$\alpha = arctan\left(\frac{1}{1{,}2}\right) \approx 39{,}8°$.



Der Winkel zwischen der Fläche des Hausdachs und der vertikalen Hauswand ist dann ein stumpfer Winkel der Größe $90° + 39{,}8° = 129{,}8°$.

Die Ebene, in der die Fläche DEF liegt, ist nach den beschriebenen Gegebenheiten parallel zur Ebene der Fläche des Hausdaches. Deshalb kann aus deren Gleichung geschlossen werden:

1. Der Normalenvektor entspricht dem Vektor $\overrightarrow{n_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3{,}6 \end{pmatrix}$.
2. Alle drei Punkte D, E oder F erfüllen mit ihrem Ortsvektor die gesuchte Ebenengleichung.

In Normalenform kann die gesuchte Ebene z. B. beschrieben werden durch $\overrightarrow{n_2} \circ \left(\vec{x} - \overrightarrow{OD}\right) = 0$.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3{,}6 \end{pmatrix} \circ \left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = 0$$

In Koordinatenform lautet die gesuchte Gleichung $3y + 3{,}6z - 6 = 0$.

d Das Sonnenlicht, das zu einem bestimmten Zeitpunkt auf die Eingangsüberdachung trifft, kann durch parallele Geraden mit dem Richtungsvektor $\begin{pmatrix} -0{,}9 \\ -1 \\ -0{,}6 \end{pmatrix}$ beschrieben werden. Erläutern Sie im Sachzusammenhang die Schlussfolgerungen, die in Verbindung mit der Abbildung aus den folgenden Schritten gezogen werden können. I $\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -0{,}9 \\ -1 \\ -0{,}6 \end{pmatrix}$ liefert $\lambda = 2$ und somit $(-1{,}8 \mid 0 \mid -1{,}2)$. II $-1{,}8 < 0$ und $-2{,}5 < -1{,}2 < 0$	4

1d: Schlussfolgerungen <u>erläutern</u>:

Der Richtungsvektor der Gleichung I entspricht dem Richtungsvektor der Sonnenstrahlen. Der Stützvektor entspricht dem Ortsvektor des Punktes E. Der Vektor $\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$ ist wegen y = 0 ein Punkt, der in der Ebene der vertikalen Hauswand liegt. Er gibt also an, wo der Schatten des Punktes E liegt.

Aus $0 = 2 + \lambda \cdot (-1)$ ergibt sich $\lambda = 2$ und damit $x = 0 + 2 \cdot (-0{,}9) = -1{,}8$ sowie

$z = 0 + 2 \cdot (-0{,}6) = -1{,}2$.

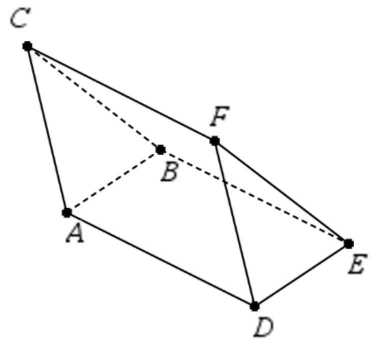
Der Schattenpunkt E' von E hat die Koordinaten $E'(-1{,}8|0| - 1{,}2)$.

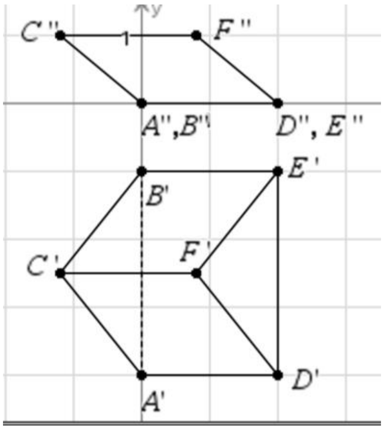
Aus Gleichung II ergibt sich in Verbindung mit der Abbildung, dass der Schattenpunkt E' rechts von der Eingangsüberdachung auf der vertikalen Hauswand liegt, wenn man von vorn in Richtung auf die Hauswand schaut.

e Die in der Abbildung dargestellten sechs Punkte A bis F sind die Eckpunkte eines Körpers K, der von fünf Flächen begrenzt wird. K wird von der Ebene mit der Gleichung $y = s$ in einem Vieleck geschnitten, falls $-1{,}2 < s < 2$ gilt. Geben Sie die Anzahl der Ecken des Vielecks in Abhängigkeit von s an und geben Sie das Intervall aller Werte von s an, so dass die zugehörigen Vielecke alle dieselbe Form und denselben Flächeninhalt besitzen.	4
	20

1e: Anzahl der Ecken <u>angeben</u> und Intervall <u>angeben</u>:

Körper K im Schrägbild und in der Zweitafelprojektion:





Für $-1{,}2 < s \leq 0{,}8$ gibt es drei Ecken:

Die Ebene schneidet für $-1{,}2 < s \leq 0$ die Kanten $\overline{CF}, \overline{AC}, \overline{BC}$.
Die Ebene schneidet für $0 \leq s \leq 0{,}8$ die Kanten $\overline{CF}, \overline{AD}, \overline{BE}$.
In diesem Falle sind die Schnittfiguren kongruente, gleichschenklige Dreiecke, weil die geschnittenen Kanten parallel zueinander sind.

Für $0{,}8 < s < 2$ gibt es vier Ecken:

Die Ebene schneidet die Kanten $\overline{DF}, \overline{EF}, \overline{AD}, \overline{BE}$

Für $0 \leq s \leq 0{,}8$ sind sowohl Form wie auch Flächeninhalt der zugehörigen Dreiecke gleich.

1 Aufgabe

	BE
Gegeben sind das gerade Prisma ABCDEF mit den Eckpunkten $C(0\|0\|0)$, $D(6\|0\|5)$, $E(0\|8\|5)$ und $F(0\|0\|5)$ sowie der Punkt $M(3\|4\|5)$ (vgl. Abbildung 1).	
a Berechnen Sie den Inhalt der Oberfläche des Prismas.	4
b Begründen Sie, dass die Punkte D, E und F auf einem Kreis mit dem Mittelpunkt M liegen.	3

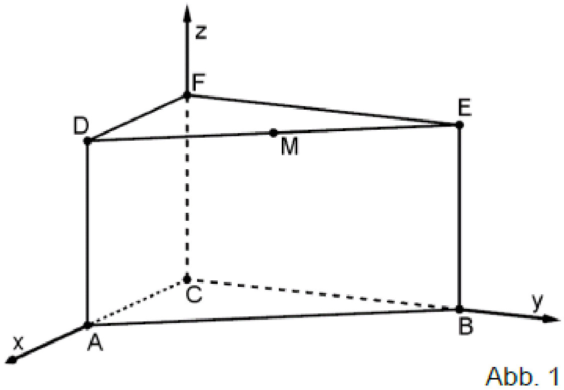


Abb. 1

1a: Inhalt der Oberfläche berechnen:

Im Prisma sind Grund- und Deckfläche kongruent zueinander. Da es sich um ein gerades Prisma handelt, sind seine Seitenflächen Rechtecke. Die Punkte A und B liegen auf der x-Achse bzw. auf der y-Achse senkrecht unter D bzw. E: A(6|0|0); B(0|8|0). Da A und B auf den Koordinatenachsen liegen und C im Ursprung liegt, schließen $\overrightarrow{CA}$ und $\overrightarrow{CB}$ einen rechten Winkel ein. Die Dreiecke ABC und DEF sind also rechtwinklig. Die rechtwinkligen Dreiecke ABC und DEF haben die Kathetenlängen 6 und 8 und deshalb jeweils den Flächeninhalt$A_\Delta = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24\ FE$.
Die Hypotenusen der kongruenten, rechtwinkligen Dreiecke ABC und DEF lassen sich nach dem Satz des Pythagoras berechnen:
$|\overline{AB}| = |\overline{DE}| = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10\ LE$
Die Höhe des Prismas entspricht $|\overline{CF}| = 5\ LE$.
Die Flächeninhalte der drei rechteckigen Seitenflächen sind $A_{ABED} = 10 \cdot 5 = 50\ FE$, $A_{ACFD} = 6 \cdot 5 = 30\ FE$ und $A_{BEFC} = 8 \cdot 5 = 40\ FE$
Die Summe der Flächeninhalte von Grund-, Deck- und Seitenflächen ist die gesuchte Oberfläche des Prismas: $A_O = 2 \cdot 24 + 50 + 40 + 30 = 168\ FE$.

1b: Begründen, dass D, E und F auf einem Kreis liegen:

Der Mittelpunkt der Seite $\overline{DE}$ hat die Koordinaten $\left(\frac{6+0}{2} \middle| \frac{0+8}{2} \middle| \frac{5+5}{2}\right) = (3|4|5)$, d.h. M ist der Mittelpunkt der Seite $\overline{DE}$. Da $\overline{DE}$ die Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks DEF ist, liegen die Punkte D, E und F auf dem Thaleskreis mit dem Mittelpunkt M.

Alternative Lösung:

Die Strecken $\overline{MF}, \overline{MD}, \overline{ME}$ haben alle die gleiche Länge 5 LE. Also liegen die Punkte E, D und F auf ein und demselben Kreis mit dem Radius 5 LE.

c Die Ebene W enthält die Punkte M, F und $S(7{,}5\,|\,0\,|\,0)$ (vgl. Abbildung 2). Bestimmen Sie eine Gleichung von W in Koordinatenform.
(zur Kontrolle: $4x-3y+6z=30$) — 4

d Im Folgenden sind zwei Schritte der Lösung einer Aufgabe angegeben, die im Zusammenhang mit den betrachteten geometrischen Objekten steht: — 2

(1) $P(6\,|\,0\,|\,r)$ mit $0 \le r \le 5$

(2) $4 \cdot 6 - 3 \cdot 0 + 6 \cdot r = 30$

Geben Sie eine passende Aufgabenstellung an.

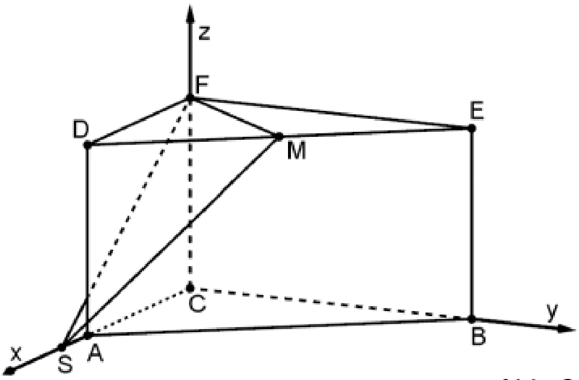


Abb. 2

1c: Gleichung der Ebene FMS in Koordinatenform <u>bestimmen</u>:

Die Vektoren $\overrightarrow{MF}$ und $\overrightarrow{MS}$ spannen die Ebene W auf. Ihr Skalarprodukt mit dem Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene W hat jeweils den Wert null.

$$\overrightarrow{MF} \circ \vec{n} = \begin{pmatrix} 0-3 \\ 0-4 \\ 5-5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = 0 \Longrightarrow -3n_1 - 4n_2 = 0 \Longrightarrow n_1 = -\tfrac{4}{3}n_2 \;(1)$$

$$\overrightarrow{MS} \circ \vec{n} = \begin{pmatrix} 7{,}5-3 \\ 0-4 \\ 0-5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = 0 \Longrightarrow 4{,}5n_1 - 4n_2 - 5n_3 = 0 \;(2)$$

(1) in (2) einsetzen:
$$\tfrac{9}{2} \cdot \left(-\tfrac{4}{3}n_2\right) - 4n_2 - 5n_3 = 0 \Longrightarrow -10n_2 = 5n_3 \Longrightarrow n_2 = -\tfrac{1}{2}n_3$$

Für n_3 kann eine beliebige reelle Zahl ungleich null eingesetzt werden.
Mit $n_3 = 6$ ist $n_2 = -3$ und $n_1 = 4$.

Als Normalenvektor kann $\vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$ verwendet werden.

Normalengleichung von W: $\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \circ \left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}\right] = 0$

Koordinatengleichung von W: $4x - 3y + 6z - 30 = 0$
(Übereinstimmung mit dem Kontrollergebnis)

Alternativer Lösungsweg:

Das Vektorprodukt für die Berechnung des Normalenvektors verwenden.

$$\overrightarrow{MF} \times \overrightarrow{MS} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ -15 \\ 30 \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \Longrightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

1d: Passende Aufgabenstellung angeben:

(1) Der Punkt $P(6|0|r)$ mit $0 \leq r \leq 5$ ist ein Punkt auf der Strecke $\overline{AD}$.
(2) Einsetzen der Koordinaten von P in die Ebenengleichung von W.

Aufgabenstellung:
Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes P der Strecke $\overline{AD}$, der in der Ebene W liegt.

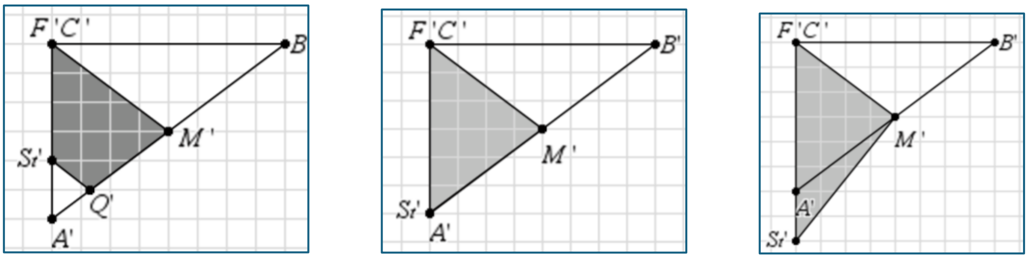
Anstelle des Punkts S werden nun Punkte $S_t(t|0|0)$ mit $t \geq 0$ auf der x-Achse betrachtet. Für jeden Wert von t schneidet die Ebene durch die Punkte M, F und S_t das Prisma ABCDEF in einem Vieleck.

e Geben Sie die Anzahl der Ecken des Vielecks in Abhängigkeit von t an sowie alle Werte von t, für die das Vieleck zwei Symmetrieachsen besitzt. — 4

f Bestimmen Sie denjenigen Wert von t, für den das Dreieck MFS_t im Punkt M rechtwinklig ist. — 3

20

1e: Anzahl der Ecken eines Vielecks angeben:



Die durch F, M und S_t bestimmten Ebenen lassen sich als „Ebenenbündel“ vorstellen, dessen Ebenen alle die Gerade g(FM) gemeinsam haben, sich gewissermaßen um diese Gerade drehen.

Wenn S_t auf der Strecke $\overline{AC}$ (mit Ausnahme des Punktes A) liegt, dann schneidet die Ebene W die Seitenfläche ACFD in der Strecke $\overline{S_tF}$, die Seitenfläche ABDE wird in einer Strecke $\overline{QM}$ geschnitten (Q liegt auf $\overline{AB}$). Die Strecke $\overline{S_tQ}$ ist eine zu $\overline{FM}$ parallele Strecke Es gibt also vier Ecken.

Wenn S_t in A liegt, dann fallen S_t und Q zusammen, es gibt nur drei Ecken.

Wenn S_t auf der x-Achse vor dem Prisma liegt, dann gibt es außer des Punktes M keinen gemeinsamen Punkt mit der Seitenfläche ABED. Es gibt drei Ecken. Es sind dies neben F und M ein Punkt auf der Strecke $\overline{AD}$.

Für $t = 0$ schneidet die Ebene ein Rechteck aus, da S_t senkrecht unter F und Q senkrecht unter M liegt. Das Rechteck hat die beiden Mittelsenkrechten der Seiten als Symmetrieachsen.

Da nur das Angeben der Eckenzahl verlangt ist, genügt es z. B. zu schreiben:

$0 \leq t < 6$: vier Ecken; $t \geq 6$: drei Ecken
Zwei Symmetrieachsen: $t = 0$

1f: Wert von t bestimmen:

Damit das Dreieck MFS_t im Punkt M rechtwinklig ist, müssen die Vektoren $\overrightarrow{MS_t}$ und $\overrightarrow{MF}$ einen rechten Winkel einschließen. Das Skalarprodukt dieser Vektoren muss den Wert null haben.

$$\overrightarrow{MS_t} \circ \overrightarrow{MF} = 0 \Longrightarrow \begin{pmatrix} t-3 \\ 0-4 \\ 0-5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0-3 \\ 0-4 \\ 5-5 \end{pmatrix} = 0 \Longrightarrow \begin{pmatrix} t-3 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Longrightarrow (t-3) \cdot (-3) + 16 = 0 \Longrightarrow -3t + 9 + 16 = 0 \Longrightarrow t = \frac{25}{3}$$

Für $t = \frac{25}{3}$ ist das Dreieck MFS_t im Punkt M rechtwinklig.

	BE
1 Bei einer Studie über das Kaufverhalten von Kunden einer Baumarktkette werden ausschließlich Kunden, die sich registrieren ließen, betrachtet. Aus dem Kreis dieser Kunden wird eine Person zufällig ausgewählt. Betrachtet werden folgende Ereignisse: T: „Die Person ist sogenannter Treuekunde, d. h. sie ist bereits länger als fünf Jahre ein registrierter Kunde der Baumarktkette." M: „Die Person ist sogenannter Morgenkunde, d. h. sie kauft überwiegend vor 10 Uhr ein." Bei dieser Studie wurde festgestellt, dass 60 % aller Kunden Treuekunden und 20 % aller Kunden Morgenkunden sind.	
a Es gilt $P(\overline{T} \cap M) = 0{,}05$. Interpretieren Sie diese Gleichung im Sachzusammenhang.	2
b Stellen Sie den Sachverhalt in einer vollständig ausgefüllten Vierfeldertafel dar.	3
c Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die ausgewählte Person entweder ein Treuekunde oder ein Morgenkunde ist.	2
d Untersuchen Sie, ob die Ereignisse T und M stochastisch unabhängig sind.	3

1a: Gleichung <u>interpretieren</u>:

Das Ereignis $\overline{T}$ ist das Gegenereignis zum Ereignis T. Demnach bedeutet $\overline{T}$, dass ein zufällig ausgewählter Kunde kein Treuekunde ist.

Die Gleichung $P(\overline{T} \cap M) = 0{,}05$ bedeutet in diesem Sachzusammenhang, dass die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Kunde kein Treuekunde, aber ein Morgenkunde ist, 5 % beträgt.

1b: Sachverhalt in Vierfeldertafel <u>darstellen</u>:

Die eingerahmten Daten lassen sich dem Text entnehmen. Unten rechts muss die „1" stehen (Gesamtwahrscheinlichkeit). Die anderen Felder werden sukzessive durch geeignete Subtraktion ausgefüllt, z. B. $1 - 0{,}2 = 0{,}8$.

	T	$\overline{T}$	
M	0,15	$\boxed{0{,}05}$	$\boxed{0{,}2}$
$\overline{M}$	0,45	0,35	0,8
	$\boxed{0{,}6}$	0,4	1

1c: Wahrscheinlichkeit <u>ermitteln</u>:

„Entweder - oder" beschreibt das ausschließende „Oder".

Es soll gelten: Die ausgewählte Person ist ein Treuekunde und kein Morgenkunde ($T \cap \overline{M}$) oder sie ist kein Treuekunde, aber ein Morgenkunde ($\overline{T} \cap M$). Die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten lassen sich der Vierfeldertafel entnehmen:

$P(T \cap \overline{M}) + P(\overline{T} \cap M) = 0{,}45 + 0{,}05 = 0{,}50$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt 50 %.

1d: auf stochastische Unabhängigkeit untersuchen:

Die Ereignisse T und M sind stochastisch unabhängig, wenn $P_T(M) = P(M)$ gilt.

Mit $P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)}$ folgt aus der Vierfeldertafel $P_T(M) = \frac{0{,}15}{0{,}6} = 0{,}25$.

Der Wert von $P(M)$ ist gegeben: $P(M) = 0{,}20$

Da $P_T(M) \neq P(M)$ sind die Ereignisse stochastisch abhängig.

Alternativer Lösungsweg: Die Ereignisse T und M wären stochastisch unabhängig, wenn gilt $P(M \cap T) = P(M) \cdot P(T)$.

Der Vierfeldertafel lässt sich entnehmen: $P(M \cap T) = 0{,}15$. Aus dem Aufgabentext ist bekannt: $P(M) = 0{,}2$ und $P(T) = 0{,}6$. Damit ist $P(M) \cdot P(T) = 0{,}2 \cdot 0{,}6 = 0{,}12 \neq 0{,}15$.

Die Ereignisse M und T sind stochastisch abhängig.

2 Im Rahmen einer Werbeaktion wird in einem Baumarkt der Kette ein Gewinnspiel mit einem Glücksrad angeboten. Das Glücksrad besteht aus gleich großen Sektoren, von denen einige mit 5 und die anderen mit 2 beschriftet sind. Bei diesem Gewinnspiel dreht eine Person zweimal das Glücksrad. Das Produkt der beiden dabei erzielten Zahlen entspricht dem Rabatt in Prozent, der dieser Person beim nächsten Einkauf gewährt wird. Die Wahrscheinlichkeit dafür, in beiden Drehungen die Zahl 5 zu erzielen, beträgt $\frac{1}{36}$ und die Wahrscheinlichkeit dafür, den kleinstmöglichen Rabatt zu erzielen, beträgt $\frac{25}{36}$.

a Stellen Sie das dem Gewinnspiel zugrundeliegende Zufallsexperiment in einem beschrifteten Baumdiagramm dar. 3

b Betrachtet werden sieben Personen, die nacheinander jeweils einmal am Gewinnspiel teilnehmen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dabei genau viermal der kleinstmögliche Rabatt erzielt wird und dies bei vier Personen unmittelbar hintereinander. 3

c Um die Werbeaktion attraktiver zu gestalten, setzt die Geschäftsführung des Baumarkts ein anderes Glücksrad ein, das ebenfalls zweimal gedreht wird. Dieses hat ebenfalls mehrere Sektoren, von denen einige mit 5 und die anderen mit 2 beschriftet sind. Durch Änderung der Größen der Sektoren kann jedoch die Wahrscheinlichkeit q dafür, beim einmaligen Drehen die Zahl 5 zu erzielen, variiert werden. Der Rabatt, der einer Person beim nächsten Einkauf gewährt wird, wird auf gleiche Weise wie bisher ermittelt. 4

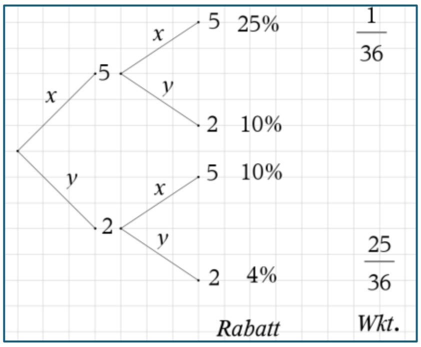
Zeigen Sie, dass die Gleichung $9q^2 + 12q - 5 = 0$ denjenigen Wert für q liefert, mit dem beim Gewinnspiel mit diesem Glücksrad auf lange Sicht im Mittel ein Rabatt von 9 % zu erwarten ist.

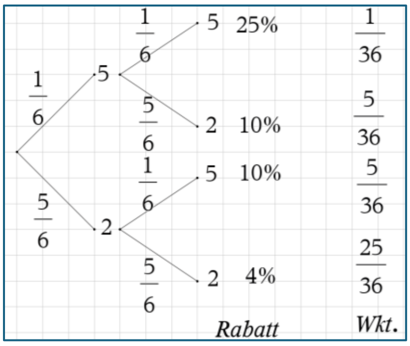
20

2a: Sachverhalt <u>darstellen im Baumdiagramm</u>:

Da zweimal gedreht wird, muss ein zweistufiges Baumdiagramm gezeichnet werden. Die Einzelwahrscheinlichkeiten für das Drehen einer „5“ oder einer „2“ sind nicht gegeben. Sie müssen aber in beiden Stufen gleich sein, denn die Ergebnisse in beiden Stufen sind unabhängig voneinander. Aus den Wahrscheinlichkeiten für das Ereignis in beiden Drehungen die Zahl 5 zu erzielen, bzw. den kleinsten Rabatt zu erzielen, kann auf die Einzelwahrscheinlichkeiten geschlossen werden.

Mit $0 \leq x, y \leq 1$ und $x \cdot x = \frac{1}{36}$ sowie $y \cdot y = \frac{25}{36}$ folgt $x = \frac{1}{6}$ und $y = \frac{5}{6}$.





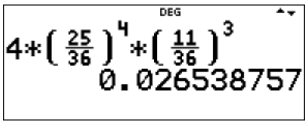
2b: Wahrscheinlichkeit berechnen:

Es sei K die Bezeichnung für eine Person, die den kleinsten Rabatt erzielt. Da diese vier Personen unmittelbar aufeinander folgen sollen, gibt es folgende Möglichkeiten:

$KKKK\overline{K}\overline{K}\overline{K}$, $\overline{K}KKKK\overline{K}\overline{K}$, $\overline{K}\overline{K}KKKK\overline{K}$, $\overline{K}\overline{K}\overline{K}KKKK$

Mit $P(K) = \frac{25}{36}$ folgt $P(\overline{K}) = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$.

Damit ergibt sich für die gesuchte Wahrscheinlichkeit $4 \cdot \left(\frac{25}{36}\right)^4 \cdot \left(\frac{11}{36}\right)^3 \approx 0{,}027$.



2c: Zeigen, dass die Gleichung $9q^2 + 12q - 5 = 0$ im Mittel einen Rabatt von 9 % ergibt.

Eine Tabelle der zugehörigen Wahrscheinlichkeitsverteilung kann so aussehen:

Ergebnisse	$\{5;5\}$	$\{5;2\}$ oder $\{2;5\}$	$\{2,2\}$
Rabatt in Euro	25	10	4
Wahrscheinlichkeit	q^2	$2 \cdot q \cdot (1-q)$	$(1-q)^2$

Der Erwartungswert für den Rabatt soll 9 Euro betragen. Der Erwartungswert für den Rabatt ist die Summe aus den Produkten der einzelnen Rabattwerte mit der zugehörigen Wahrscheinlichkeit:

$$25 \cdot q^2 + 10 \cdot 2 \cdot q \cdot (1-q) + 4 \cdot (1-q)^2 = 9$$

Zusammenfassen und ordnen:

$$25 \cdot q^2 + 20 \cdot q - 20 \cdot q^2 + 4 \cdot (1 - 2q + q^2) = 9$$

$$5 \cdot q^2 + 20 \cdot q + 4 - 8 \cdot q + 4 \cdot q^2 = 9$$

$$9 \cdot q^2 + 12 \cdot q - 5 = 0$$

Was zu zeigen war.

BE

1 Eine umfassende Studie zu den Arbeits- und Lebensbedingungen von Studierenden einer Universität ergab, dass 56 % der Studierenden einen Laptop und 33 % einen Desktop-PC besitzen. 72 % der Studierenden haben mindestens eines dieser beiden Endgeräte.

Unter den Studierenden der Universität wird eine Person zufällig ausgewählt und zum Besitz von digitalen Endgeräten befragt. Folgende Ereignisse werden betrachtet:

L: „Die Person besitzt einen Laptop."

D: „Die Person besitzt einen Desktop-PC."

a Zeigen Sie, dass $P(\overline{L} \cap \overline{D}) = 0{,}28$ gilt, und geben Sie das zugrundeliegende Ereignis im Sachzusammenhang an. — 3

b Stellen Sie den Sachverhalt in einer vollständig ausgefüllten Vierfeldertafel dar. Geben Sie die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass die zufällig ausgewählte Person zwar einen Laptop, jedoch keinen Desktop-PC besitzt. — 4

c Nun wird unter allen Befragten, die einen Desktop-PC haben, eine Person zufällig ausgewählt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese einen Laptop besitzt. — 2

1a: <u>Zeigen</u>, dass $P(\bar{L} \cap \bar{D}) = 0{,}28$ gilt, Ereignis <u>angeben</u>:

Aus „72 % der Studierenden haben mindestens eines dieser beiden Endgeräte" folgt $P(L \cap D) = 0{,}72$. Damit ist $P(\bar{L} \cap \bar{D}) = 1 - P(L \cap D) = 1 - 0{,}72 = 0{,}28$.

Das zugehörige Ereignis kann im Sachzusammenhang so angegeben werden: „Ein zufällig ausgewählter Student besitzt weder einen Laptop noch einen Desktop-PC."

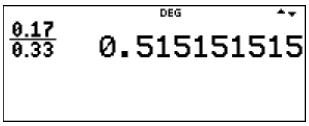
1b: Sachverhalt in Vierfeldertafel <u>darstellen</u>, Wahrscheinlichkeit <u>angeben</u>:

Die eingerahmten Daten lassen sich dem Text entnehmen. Unten rechts muss die „1" stehen (Gesamtwahrscheinlichkeit). Die anderen Felder werden sukzessive durch geeignete Subtraktion ausgefüllt, z. B. $1 - 0{,}56 = 0{,}44$. Dass eine zufällig ausgewählte Person zwar einen Laptop, aber keinen Desktop-PC besitzt, kann mit den eingeführten Bezeichnungen beschrieben werden durch $P(L \cap \bar{D})$. Der Wert der zugehörigen Wahrscheinlichkeit kann der Vierfeldertafel entnommen werden: $P(L \cap \bar{D}) = 0{,}39$.

	D	$\bar{D}$	
L	0,17	0,39	$\boxed{0{,}56}$
$\bar{L}$	0,16	$\boxed{0{,}28}$	0,44
	$\boxed{0{,}33}$	0,67	1

1c: Bedingte Wahrscheinlichkeit <u>berechnen</u>:

Gesucht ist die bedingte Wahrscheinlichkeit $P_D(L)$. Sie wird berechnet durch $P_D(L) = \frac{P(D \cap L)}{P(D)}$. Die zugehörigen Werte können der Vierfeldertafel entnommen werden.



$$P_D(L) = \frac{P(D \cap L)}{P(D)} = \frac{0{,}17}{0{,}33} \approx 0{,}52$$

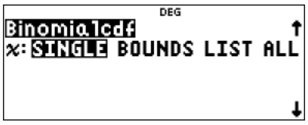
2 In derselben Studie wurde auch festgestellt, dass 68 % der Besitzer von Laptops und Desktop-PCs bei einem Software-Problem versuchen, dieses selbstständig zu lösen. Unter den Besitzern dieser Endgeräte werden 900 Personen zufällig ausgewählt. Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl derjenigen unter diesen 900 Personen, die versuchen, ein Software-Problem selbstständig zu lösen. Dabei wird X als binomialverteilt angenommen.	
a Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass höchstens 70 % dieser 900 Personen bei einem Software-Problem versuchen, dieses selbstständig zu lösen.	2
b Berechnen Sie den Erwartungswert μ von X und ermitteln Sie die kleinste mögliche natürliche Zahl k, sodass $P(\mu - k \leq X \leq \mu) \geq 30\,\%$ gilt.	4

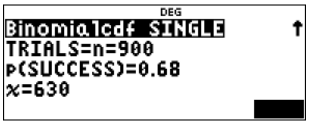
2a: Wahrscheinlichkeit berechnen:

Da die Zufallsgröße X binomialverteilt mit n = 900 und p = 0,68 ist und weil 70 % von 900 Personen 630 Personen sind, muss $P_{900;0,68}(X \leq 630)$ berechnet werden .

Die Berechnung kann mit dem Taschenrechner TI-30X Prio MathPrint auf folgende Weise erfolgen:

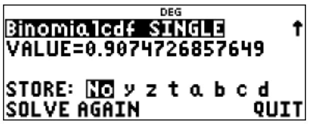
Wähle die Zweitbelegung von [data], dort die Verteilungsfunktion DISTR 3 Binomialcdf und wähle SINGLE aus. Gib für n die Zahl 900, für p die Zahl 0,68 und für x die Zahl 630 ein.



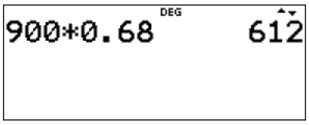


Berechne mit CALC die gesuchte Wahrscheinlichkeit.

Ergebnis: $P_{900;0,68}(X \leq 630) \approx 0{,}91$

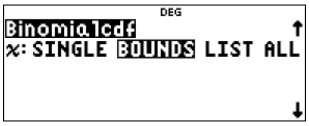


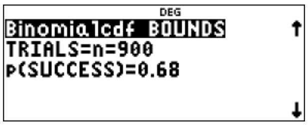
2b: Erwartungswert μ berechnen; kleinstmögliche Zahl k für $P(\mu - k \leq X \leq \mu) \geq 0{,}30$ ermitteln:

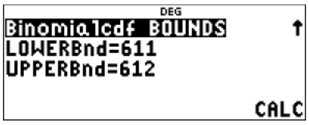


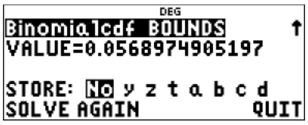
Erwartungswert $\mu = n \cdot p = 900 \cdot 0{,}68 = 612$

Die kleinstmögliche Zahl k für $P(\mu - k \leq X \leq \mu) \geq 0{,}30$ lässt sich durch systematisches Probieren ermitteln. Es wird wie oben der Taschenrechner verwendet, aber statt SINGLE wird BOUNDS genutzt. Die obere Grenze ist ständig 612, die untere Grenze wird um immer größer werdende natürliche Zahlen k verkleinert, das Berechnungsintervall also vergrößert, bis erstmals die Wahrscheinlichkeit für dieses Intervall mindestens 30% ist.



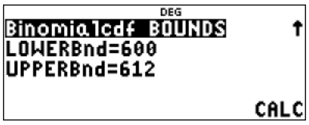


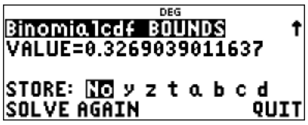




zu kleine Wahrscheinlichkeit

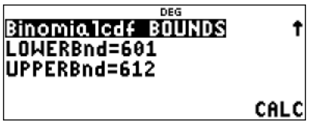
Mit SOLVE AGAIN wird eine Neuberechnung veranlasst und die untere Grenze verkleinert, um das Berechnungsintervall zu vergrößern:

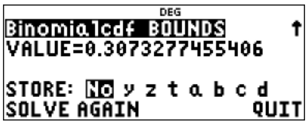




zu große Wahrscheinlichkeit

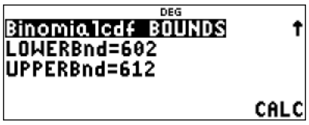
Mit SOLVE AGAIN wird eine Neuberechnung veranlasst und die untere Grenze vergrößert, um das Berechnungsintervall zu verkleinern:

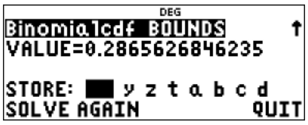




immer noch etwas zu große Wahrscheinlichkeit.

Ist die Wahrscheinlichkeit auch für die untere Grenze 602 schon größer als 30 %?



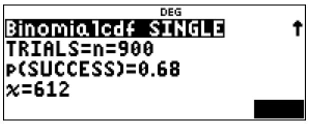


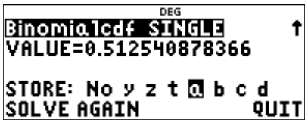
Nein, im Intervall [602; 612] ist die Intervallwahrscheinlichkeit noch kleiner als 30 %.

Erstmals für k = 11: 612 – 11= 601, also erstmals im Intervall [601; 612] ist die Wahrscheinlichkeit $P(\mu - k \leq X \leq \mu) \geq 0{,}30$.

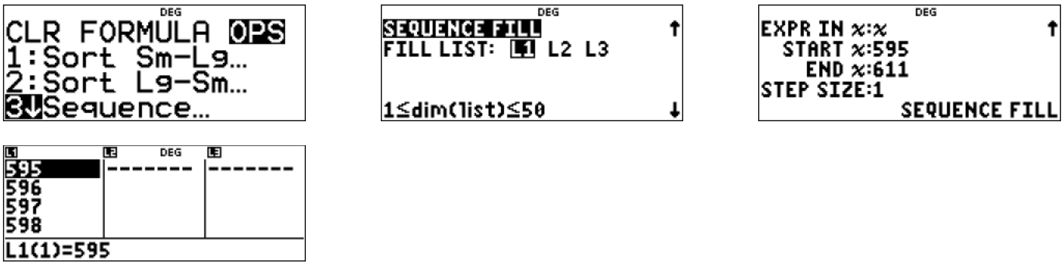
Alternative Lösung unter Verwendung des Listeneditors des TI-30X Prio MathPrint:

Die Berechnung von $P(612 - k \leq X \leq 612)$ lässt sich zurückführen auf die Differenz $P(X \leq 612) - P(X \leq 612 - k - 1)$. Die Wahrscheinlichkeit der oberen Grenze des Intervalls, also $P(X \leq 612)$ wird berechnet und unter der Variablen a gespeichert:

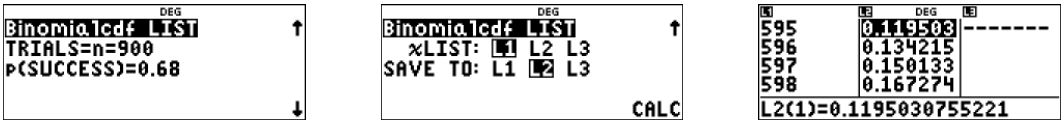




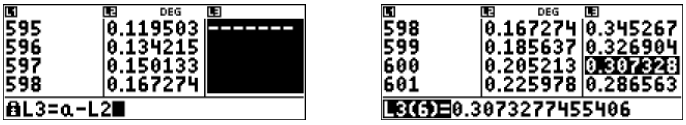
Für die untere Grenze des Intervalls wird unter [data] [data] eine Liste L1 angelegt, die z. B. eine Folge der natürlichen Zahlen enthält, in der sich die untere Intervallgrenze vermuten lässt, z. B. die natürlichen Zahlen von 595 bis 611:



Nun wird die Anwendung Binomialcdf mit dem Merkmal LIST aktiviert. Die Summenwahrscheinlichkeiten sollen für die Zahlen in L1 unter der Liste L2 abgespeichert werden. Die Liste L2 enthält also die Wahrscheinlichkeiten $P(X \leq L1(i))$, wobei L1(i) alle Elemente von L1 beschreibt:



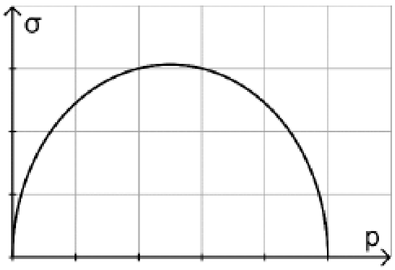
In der Liste L3 werden nun die Differenzen aus der gespeicherten Variablen a (das war $P(X \leq 612)$) und den Werten von L2 gebildet:



Die Liste L3 muss man so lesen, wie hier am Beispiel der Zeile L3(6) beschrieben wird.

Der Wert 0,307328 ist die Wahrscheinlichkeit $P(X \leq 612) - P(X \leq 600)$, also die Wahrscheinlichkeit $P(601 \leq X \leq 612)$ für das Intervall [601; 612]. In diesem Intervall ist die Wahrscheinlichkeit also erstmals größer als 30 %. Wegen $612 - 11 = 601$ hat k für diesen gesuchten Fall den Wert k = 11.

3 Für binomialverteilte Zufallsgrößen mit den Parametern $n = 15000$ und p ist in der Abbildung die Standardabweichung σ in Abhängigkeit von p dargestellt.
Ergänzen Sie im dargestellten Koordinatensystem die Skalierungen der Achsen und erläutern Sie Ihr Vorgehen.



5

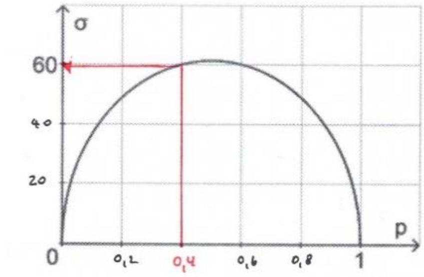
20

3: Achsenskalierungen <u>ergänzen</u> und das Vorgehen <u>erläutern</u>:

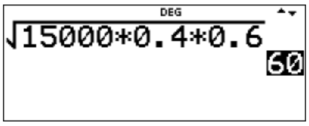
Für die Wahrscheinlichkeit p gilt $0 \leq p \leq 1$.
Der Anfang der Kurve im Ursprung liegt bei p = 0, das Ende der Kurve bei p = 1.

Zu jedem Wert von p lässt sich die zugehörige Standardabweichung der binomialverteilten Zufallsgröße berechnen: $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$

Für p = 0,4 und p = 0,6 schneidet die Kurve einen Gitterpunkt, deshalb ist es sinnvoll für einen dieser Werte die Standardabweichung zu berechnen.

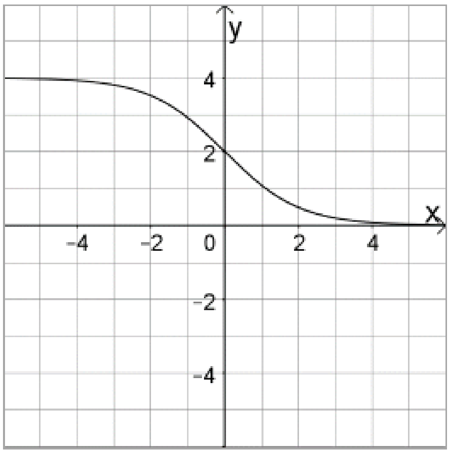


$\sigma = \sqrt{15000 \cdot 0{,}4 \cdot (1-0{,}4)} = 60$



BE

1 Die Abbildung zeigt den Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $f: x \mapsto \frac{4}{1+e^x}$.
Der Graph ist symmetrisch bezüglich seines Wendepunkts $(0|2)$.



a Begründen Sie anhand des Funktionsterms von f, dass f keine Nullstelle hat, und geben Sie $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ sowie $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ an. **3**

b Berechnen Sie die mittlere Steigung des Graphen von f im Bereich $-1 \le x \le 1$ auf Hundertstel genau und bestimmen Sie grafisch die Steigung des Graphen von f in seinem Wendepunkt. **5**

1a: <u>Begründung</u> für „keine Nullstelle“ und Grenzwerte <u>angeben</u>:

Die Funktion $f(x) = \frac{4}{1+e^x}$ hat keine Nullstelle, weil der Funktionsterm ein Bruch ist, dessen Zähler 4 stets ungleich null ist. Dieser Bruch kann niemals den Funktionswert $f(x) = 0$ annehmen.

Die Grenzwerte können ohne Begründung angegeben werden:

$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, *(Der Nenner $1 + e^x$ wird für $x \to \infty$ bei konstantem Zähler unendlich groß.)*

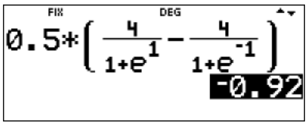
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 4$, *(Der Nenner $1 + e^x$ geht für $x \to -\infty$ bei konstantem Zähler gegen 1.)*

1b: Mittlere Steigung auf Hundertstel genau <u>berechnen</u>,

Steigung im Wendepunkt <u>grafisch bestimmen</u>:

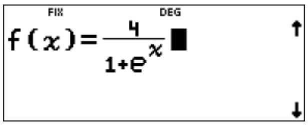
Die mittlere Steigung im Intervall $-1 \le x \le 1$ wird aus dem Quotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}$ bestimmt.

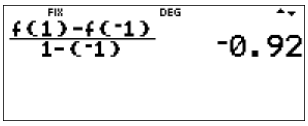
$$\frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)} = \frac{\frac{4}{1+e^1}-\frac{4}{1+e^{-1}}}{2} = 0{,}5 \cdot \left(\frac{4}{1+e^1} - \frac{4}{1+e^{-1}}\right) \approx -0{,}92$$



Alternative:

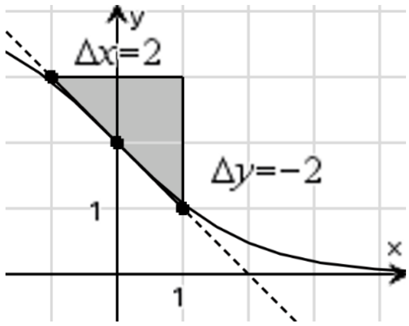
Mit [table] [1] den Funktionsterm eingeben, mit [enter] abschließen. Mit [2nd] [expr-eval] die Auswertung von Ausdrücken initialisieren, den Differenzenquotienten eingeben und mit [enter] auswerten.





Wenn man *auf Hundertstel genau* rechnen soll, muss man mindestens bis zur *Tausendstel*-Stelle rechnen und auf Hundertstel runden.

Auf Hundertstel genau berechnen lässt sich auf dem WTR realisieren durch den Modus FLOAT 2 $\boxed{\text{enter}}$.



Steigung im Wendepunkt = Steigung der Tangente im Wendepunkt

Man kann die Tangente nach Augenmaß mit dem Lineal einzeichnen und ihre Steigung ablesen. Die Tangente geht durch die Punkte (–1|3) und (1|1).

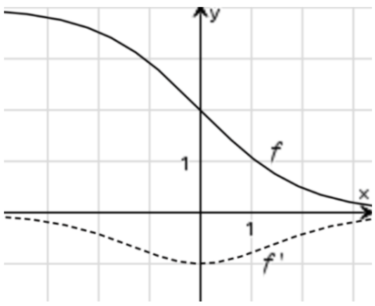
Ihre Steigung ist $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1-3}{1-(-1)} = \frac{-2}{2} = -1$.

c Für die in IR definierte erste Ableitungsfunktion f' von f gilt $f'(-x) = f'(x)$. Geben Sie die Bedeutung dieser Tatsache im Hinblick auf den Verlauf des Graphen von f' an und skizzieren Sie in der Abbildung den Graphen von f'.	3
Betrachtet wird die in IR definierte Funktion $F: x \mapsto 4x - 4 \cdot \ln(e^x + 1)$.	
d Zeigen Sie, dass die Funktion F eine Stammfunktion von f ist.	3

1c: Bedeutung von $f'(-x) = f'(x)$ angeben; Graphen von f' skizzieren:

Die Gleichung $f'(-x) = f'(x)$ bedeutet, dass der Graph von f' symmetrisch zur y-Achse ist.

Für die Skizze des Graphen von f' sind folgende Eigenschaften wichtig. Sie müssen aber nicht schriftlich angegeben werden.



- Die Funktion f ist streng monoton fallend, also hat f' nur negative Funktionswerte.
- Von minus Unendlich kommend, fällt der Graph von f immer stärker bis zum Wendepunkt bei x = 0.
- Im Wendepunkt ist nach Teilaufgabe 1b die Steigung etwa – 1, also $f'(0) \approx -1$.
- Rechts von der Wendestelle kommt die Achsensymmetrie von f' zum Tragen.

1d: Zeigen, dass $F(x) = 4x - 4 \cdot ln(e^x + 1)$ eine Stammfunktion von f ist:

Die Funktion F ist Stammfunktion von f, wenn $F'(x) = f(x)$ gilt.

Ableitung von F bilden und dabei die Kettenregel beachten.

$F(x) = 4x - 4 \cdot ln(e^x + 1)$

$F'(x) = 4 - 4 \cdot \frac{1}{e^x+1} \cdot e^x = \frac{4\cdot(e^x+1)}{e^x+1} - \frac{4\cdot e^x}{e^x+1} = \frac{4\cdot e^x+4-4\cdot e^x}{e^x+1} = \frac{4}{1+e^x} = f(x)$

e Beurteilen Sie die folgende Aussage: *Der Graph von F verläuft vollständig unterhalb der x-Achse.*	3
f Begründen Sie, dass der Wert des Integrals $\int_{-k}^{k} f(x)dx$ für jede positive reelle Zahl k ohne Verwendung einer Stammfunktion von f exakt bestimmt werden kann, und geben Sie den Wert des Integrals an.	4

1e: Aussage <u>beurteilen</u>:

Wenn der Graph von F vollständig unterhalb der x-Achse verläuft, dann hat die Funktion $F(x) = 4x - 4 \cdot ln(e^x + 1)$ nur negative Funktionswerte. Damit das so ist, muss die Differenz $4x - 4 \cdot ln(e^x + 1) < 0$ sein, also für alle reellen Zahlen x gelten $4x < 4 \cdot ln(e^x + 1)$ (*)

Es ist $e^x + 1 > e^x$. Weil die ln-Funktion streng monoton steigt, ist $\ln(e^x + 1) > \ln(e^x)$. Es ist $\ln(e^x) = x \cdot \ln(e) = x$, deshalb gilt $4 \cdot \ln(e^x) = 4x$.

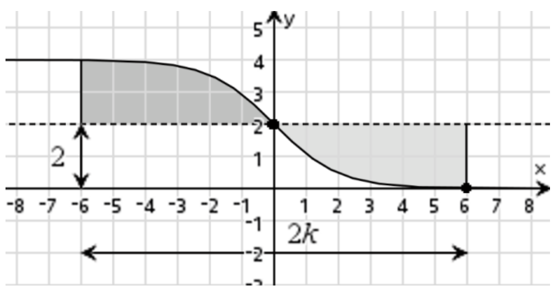
Damit lässt sich F(x) abschätzen: $4x - 4 \cdot ln(e^x + 1) < 4x - 4 \cdot ln(e^x) = 4x - 4x = 0$, d.h. es gilt für alle reellen Zahlen x, dass $F(x) < 0$ ist. Die Aussage ist wahr.

Alternativer Lösungsweg:

Es muss gelten 4x < 4ln(e^x+1)
damit gilt x < ln(e^x+1)
damit gilt e^x < e^(ln(e^x+1)
d.h. e^x < e^x+1
Da die Schritte auch in umgekehrter Richtung erlaubt sind, ist die Aussage bewiesen.

1d: <u>Begründen</u>, dass $\int_{-k}^{k} f(x)dx$ für $k > 0$ ohne Stammfunktion bestimmt werden kann.
Wert des Integrals <u>angeben</u>.

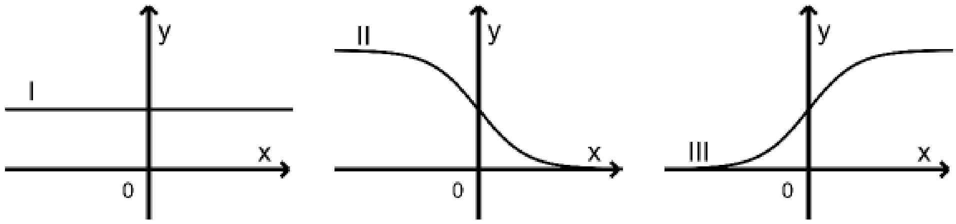
Aufgrund der Symmetrie des Graphen von f haben die beiden Flächenstücke, die der Graph von f und die Gerade mit der Gleichung $y = 2$ für $-k \le x \le 0$ bzw. für $0 \le x \le k$ einschließen, den gleichen Flächeninhalt. Damit stimmt der Wert des Integrals mit dem Flächeninhalt eines Rechtecks mit den Seitenlängen 2k und k überein.



Der Wert des Integrals ist $2 \cdot 2k = 4k$.

Alternativ:

Spiegelung der Teilfläche im Intervall [-k,0] am Wendepunkt W liefert ein Rechteck mit den Seitenlängen k und 4.

2 Betrachtet wird die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $w_{a;b;c}: x \mapsto \frac{a}{b+e^{c\cdot x}}$ mit $a,b \in \mathbb{R}^+$ und $c \in \mathbb{R}$. Die Funktion aus Aufgabe 1 ist eine Funktion dieser Schar. **a** Jeder der abgebildeten Graphen I, II und III der Schar gehört, bei festen Werten von a und b, zu einem der Werte $c=-1$, $c=0$ und $c=1$.  Ordnen Sie den Graphen die genannten Werte von c zu und begründen Sie Ihre Zuordnung.	4

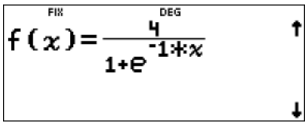
2a: Werte von c den Graphen <u>zuordnen</u> und Zuordnung <u>begründen</u>:

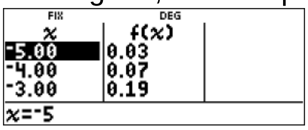
Um mit der bei Teilaufgabe 1 gegebenen Funktion vergleichen zu können, kann man z. B. $a = 4$ und $b = 1$ wählen.

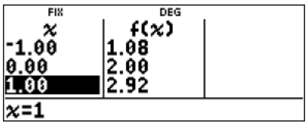
Für c = 1 erhält man dann die Funktion $f(x) = \frac{4}{1+e^x}$. Das ist die in Teilaufgabe 1 gegebene Funktion, deren Graph in der Aufgabenstellung gegeben ist. Zu c = 1 gehört der Graph II.
Für c = 0 ergibt sich die Funktionsgleichung $f(x) = \frac{4}{1+e^0} = \frac{4}{1+1} = 2$. Der Graph dieser Funktion ist eine Parallele zur x-Achse. Mithin gehört zu c = 0 der Graph I.
Da jeder der Werte von c zu genau einem der Graphen gehört, muss der übrig gebliebene Graph zu c = –1 gehören.

Alternative:
Für festgewählte Werte von a und b werden die Funktionswerte für c = - 1, c = 0 und c = 1 tabelliert und interpretiert:

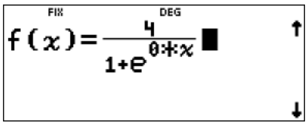
$c = -1$: Funktionswerte monoton steigend, also Graph III.

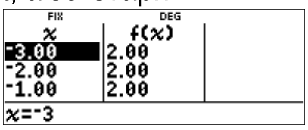


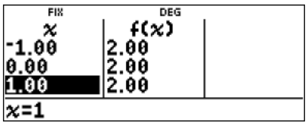




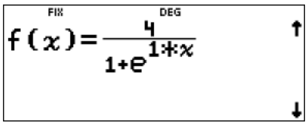
$c = 0$: Funktionswerte konstant, also Graph I

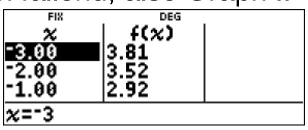


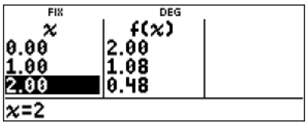




$c = 1$: Funktionswerte monoton fallend, also Graph II





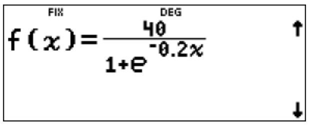


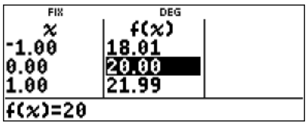
Auf einer Inselgruppe wurden Seeadler neu angesiedelt. Betrachtet wird die anschließende Entwicklung der Anzahl der Seeadler. In einem Modell wird diese Entwicklung mithilfe des Graphen der Funktion $w_{40;1;-0,2}$ beschrieben, die im Folgenden mit w bezeichnet wird. Es gilt also $w(x)=\frac{40}{1+e^{-0,2\cdot x}}$. Dabei ist x die seit der Ansiedlung vergangene Zeit in Jahren und $w(x)$ die Anzahl der Seeadler.	
b Geben Sie auf Grundlage des Modells an, wie viele Seeadler angesiedelt wurden, und berechnen Sie, nach wie vielen Jahren die Anzahl der Seeadler auf 32 angewachsen ist.	4

2b: <u>Angeben</u>, wie viele Seeadler angesiedelt wurden. <u>Berechnen</u>, wann es 32 sind.

$$w(x) = \frac{40}{1+e^{-0,2x}}$$

Der Startwert ergibt sich für x = 0: $w(x) = \frac{40}{1+e^{-0,2\cdot 0}} = \frac{40}{2} = 20.$





Zum Start wurden 20 Seeadler angesiedelt.

Wann gab es 32 Seeadler?

$$32 = \frac{40}{1+e^{-0,2x}}$$

$$1 + e^{-0,2x} = \frac{40}{32}$$

$$e^{-0,2x} = \frac{5}{4} - 1$$

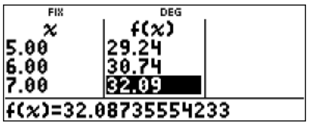
$$e^{-0,2x} = \frac{1}{4}$$

$$-0,2x = \ln(0,25)$$

$$x = -5 \cdot \ln(0,25) \approx 6,9$$

Nach ca. sieben Jahren gibt es 32 Seeadler.

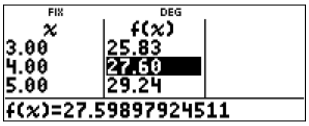
Zur Selbstkontrolle kann man auch in der Wertetabelle weiterblättern, aber Achtung: Es wird ausdrücklich eine Berechnung verlangt!



c Die Tangente an den Graphen von w im Punkt $(0 \mid w(0))$ hat die Steigung 2. Würde die Entwicklung der Anzahl der Seeadler im Modell mithilfe dieser Tangente beschrieben werden, so ergäbe sich für den Zeitpunkt vier Jahre nach der Ansiedlung eine bestimmte Anzahl von Seeadlern. Untersuchen Sie, ob diese Anzahl mit derjenigen übereinstimmt, die sich bei einer Beschreibung mithilfe des Graphen von w ergeben würde.	3

2c: <u>Untersuchen</u>, ob die Beschreibung mit der Tangente annähernd den gleichen Wert ergibt wie mit dem Funktionsterm:

Mit dem Funktionsterm erhält man $w(4) \approx 27{,}60 \approx 28$:



FIX DEG

x	f(x)
3.00	25.83
4.00	27.60
5.00	29.24

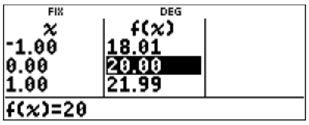
f(x)=27.59897924511

Tangente im Punkt (0|w(0)):

Es ist $w(0) = 20$ (siehe Teilaufgabe 2b).

Die Tangente hat die Gleichung $t(x) = 2 \cdot x + 20$ (Steigung m = 2 ist gegeben.)

Für x = 4 ergibt sich ebenfalls der Wert 28: $t(4) = 2 \cdot 4 + 20 = 28$



FIX DEG

x	f(x)
-1.00	18.01
0.00	20.00
1.00	21.99

f(x)=20

Die Anzahlen der nach vier Jahren vorhandenen Seeadler sind nach beiden Beschreibungen annähernd gleich.

Unter bestimmten anderen Gegebenheiten auf der Inselgruppe kann die Entwicklung der Anzahl der Seeadler im Modell mithilfe des Graphen einer anderen Funktion aus der Schar der Funktionen $w_{a;b;c}$ beschrieben werden. Das folgende Gleichungssystem ermöglicht die Bestimmung der zugehörigen Werte von a, b und c.

(1) $\frac{a}{b+1}=20$ (2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{a}{b+e^{c\cdot x}}=45$ (3) $\frac{a}{b+e^{15\cdot c}}=35$

d Interpretieren Sie jede der drei Gleichungen im Sachzusammenhang. 3

e Ermitteln Sie die Werte von a und b. 5

40

2d: Im Sachzusammenhang interpretieren:

Für den Sachzusammenhang ist die Funktion $w(x)=\frac{a}{b+e^{c\cdot x}}$ wesentlich.

In der Gleichung (1) $\frac{a}{b+1}=20$ ist der Summand 1 im Nenner erklärbar durch $e^{c\cdot 0}=1$. Zum Beobachtungsbeginn (x = 0) werden 20 Seeadler angesiedelt.

Die Gleichung (2) $\lim_{x\to\infty}\frac{a}{b+e^{c\cdot x}}=45$ bringt zum Ausdruck, dass langfristig 45 Seeadler auf der Insel leben werden.

Die Gleichung (3) $\frac{a}{b+e^{15\cdot c}}=35$ bedeutet in diesem Modell, dass nach 15 Jahren 35 Seeadler auf der Insel leben werden.

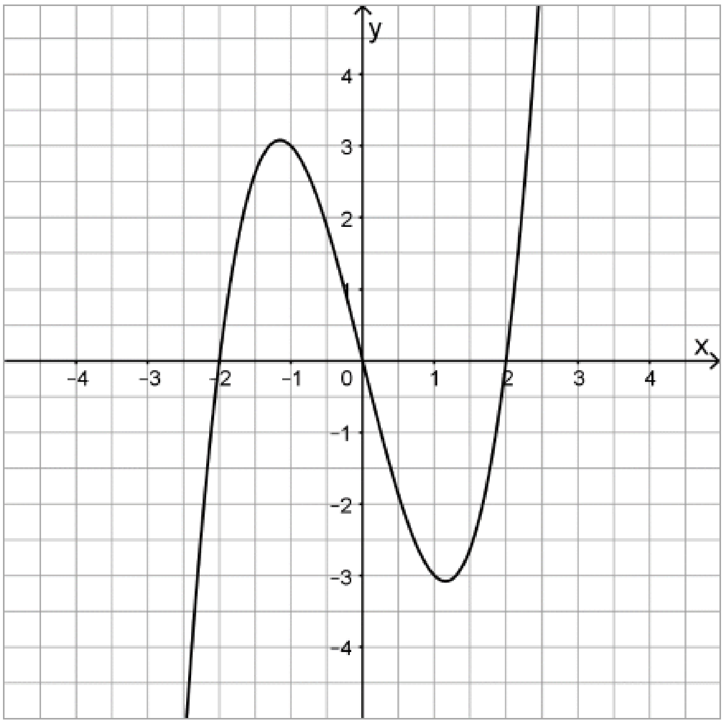
2e: Werte von a und b ermitteln:

Aus (2) und (1) folgt, dass der Bestand an Seeadlern zunimmt. Deshalb muss c < 0 sein. Wegen c < 0 gilt $\lim_{x\to\infty}e^{c\cdot x}=0$. Langfristig folgt deshalb aus (2), dass $\frac{a}{b}=45$, also $a=45b$ gilt. Setzt man $a=45b$ in (1) ein, so ergibt sich $\frac{45b}{b+1}=20$. Daraus folgt $45b=20b+20$, also $25b=20$ und damit ist $b=\frac{4}{5}$.

Dies wiederum eingesetzt in $a=45b$ führt auf $a=45\cdot\frac{4}{5}=9\cdot 4=36$.

Die Werte von a und b sind in diesem Modell $a=36$ und $b=0{,}8$.

	BE
1 Gegeben ist die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $f_{a;b}: x \mapsto ax^3 - bx$ mit $a,b \in \mathbb{R}^+$. Die Abbildung zeigt den Graphen einer der Funktionen der Schar.	



	BE
a Begründen Sie, dass jeder Graph der Schar symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs ist.	2
b Weisen Sie in Abhängigkeit von a und b nach, dass der Graph von $f_{a;b}$ einen Tiefpunkt mit der x-Koordinate $\sqrt{\frac{b}{3a}}$ hat. Begründen Sie, dass er zudem einen Hochpunkt besitzt und dass dieser eine kleinere x-Koordinate hat als der Tiefpunkt.	6
c Es gibt eine Funktion der Schar, die bei $x = 3$ eine Nullstelle hat und deren Graph im vierten Quadranten mit der x-Achse ein Flächenstück mit dem Inhalt 40,5 einschließt. Bestimmen Sie die zugehörigen Werte von a und b.	7

1a: Symmetrie <u>begründen</u>:

Der Funktionsterm $f_{a;b}(x) = a \cdot x^3 - b \cdot x$ mit ausschließlich positiven Werten für die Parameter a und b enthält nur ungerade Exponenten von x.
Oder Nachweis durch Rechnung:
$f_{a;b}(-x) = a \cdot (-x)^3 - b \cdot (-x) = -a \cdot x^3 + b \cdot x = -(a \cdot x^3 - b \cdot x) = -f_{a;b}(x)$
Es gilt also $f_{a;b}(-x) = -f_{a;b}(x)$, d. h. jeder Graph von $f_{a;b}$ ist punktsymmetrisch zum Ursprung.

1b: Lokale Extrempunkte <u>nachweisen</u>:

$f_{a;b}(x) = a \cdot x^3 - b \cdot x$ $\qquad f_{a;b}{}'(x) = 3a \cdot x^2 - b$ $\qquad f_{a;b}{}''(x) = 6a \cdot x$

Notwendige Bedingung für lokale Extrema $\left(f_{a;b}{}'(x) = 0\right)$:

$3a \cdot x^2 - b = 0 \Longrightarrow x^2 = \frac{b}{2a} \Longrightarrow x_{e1} = \sqrt{\frac{b}{2a}}$ oder $x_{e2} = -\sqrt{\frac{b}{2a}}$ als mögliche Extremstellen.

Hinreichende Bedingung für lokale Extrema $\left(f_{a;b}{}''(x_e) \neq 0\right)$:

$f_{a;b}{}''(x_{e1}) = 6a \cdot x_{e1} = 6a \cdot \sqrt{\frac{b}{2a}} > 0$, weil a und b positive reelle Zahlen sind.

An der Stelle $x_{e1} = \sqrt{\frac{b}{2a}}$ liegt ein lokales Minimum vor.

$f_{a;b}{}''(x_{e2}) = 6a \cdot x_{e2} = 6a \cdot \left(-\sqrt{\frac{b}{2a}}\right) = -6a \cdot \sqrt{\frac{b}{2a}} < 0$, weil a und b positive reelle Zahlen sind.

An der Stelle $x_{e2} = -\sqrt{\frac{b}{2a}}$ liegt ein lokales Maximum vor. Dies folgt im Übrigen auch aus der Punktsymmetrie des Graphen zum Ursprung.

Wegen der Punktsymmetrie der Graphen zum Ursprung ist die x-Koordinate des lokalen Hochpunkts, weil sie negativ ist, auch kleiner als die positive x-Koordinate des Tiefpunktes.

1c: Werte von a und b <u>bestimmen</u>:

Wenn $f_{a;b}(x)$ bei x = 3 eine Nullstelle hat, dann gilt $f_{a;b}(3) = 0$, also $a \cdot 3^3 - b \cdot 3 = 0$. Dies führt nach Division durch 3 auf die erste Bedingung zur Bestimmung von a und b: $9a - b = 0 \;\; (1)$

Die Aussage über den Flächeninhalt führt auf die Gleichung $\int_0^3 f_{a;b}(x)\,dx = -40{,}5$. Das Minuszeichen auf der rechten Seite ist durch die Lage des Flächenstücks unterhalb der x-Achse bedingt. Diese Gleichung ergibt:

$$\int_0^3 (a \cdot x^3 - b \cdot x)\,dx = -40{,}5$$

$$\left[\frac{a}{4} \cdot x^4 - \frac{b}{2} \cdot x^2\right]_0^3 = -40{,}5$$

$$\left(\frac{a}{4} \cdot 3^4 - \frac{b}{2} \cdot 3^2\right) - \left(\frac{a}{4} \cdot 0^4 - \frac{b}{2} \cdot 0^2\right) = -40{,}5$$

$$\frac{81 \cdot a}{4} - \frac{9 \cdot b}{2} = -40{,}5 \quad (2)$$

Aus den Gleichungen (1) und (2) lassen sich nun a und b bestimmen:

Aus (1) folgt $b = 9a$. Dies wird in (2) eingesetzt und ergibt

$$\frac{81 \cdot a}{4} - \frac{9 \cdot 9a}{2} = -40{,}5 \;\Longrightarrow\; \frac{81 \cdot a}{4} - \frac{81 \cdot a}{2} = -\frac{81}{2} \Longrightarrow \frac{81 \cdot a}{4} - \frac{2 \cdot 81 \cdot a}{4} = -\frac{81}{2} \Longrightarrow -\frac{81 \cdot a}{4} = -\frac{81}{2} \Longrightarrow a = 2.$$

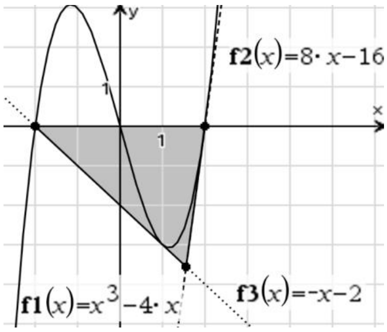
Mit $a = 2$ folgt aus (1): $b = 18$.

Die gesuchten Werte sind $a = 2$ und $b = 18$.

Die Funktion der Schar, deren Graph in der Abbildung dargestellt ist, wird mit f bezeichnet; ihr Funktionsterm ist $f(x) = x^3 - 4x$.	
d Die Tangente an den Graphen von f im Punkt $A(2\|0)$, die x-Achse und die Gerade g mit der Gleichung $y = -x - 2$ schließen ein Dreieck ein. Berechnen Sie seinen Flächeninhalt.	7
e Begründen Sie, dass die folgende Aussage richtig ist: *Ist P ein beliebiger Punkt auf dem Graphen von f, so liegt der Mittelpunkt der Verbindungsstrecke von P und dem Koordinatenursprung auf dem Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $h: x \mapsto 4x^3 - 4x$.*	4

1d: Flächeninhalt berechnen:

Die gegebene Grafik lässt sich für eine Skizze nutzen.



Es wird die Gleichung der Tangente benötigt. Für ihren Anstieg wird die 1. Ableitung von $f(x) = x^3 - 4x$ berechnet: $f'(x) = 3 \cdot x^2 - 4$.

Der Anstieg m der Tangente an der Stelle x = 2 ist damit $m = f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 4 = 3 \cdot 4 - 4 = 8$.

Die Tangente hat eine Gleichung der Form $y = 8 \cdot x + n$. Um n zu berechnen werden die Koordinaten des Berührpunktes A(2|0) eingesetzt:

$0 = 8 \cdot 2 + n \Longrightarrow n = -16$

Die Tangente hat die Gleichung $y = 8 \cdot x - 16$.

Die Höhe des Dreiecks entspricht der y-Koordinate des Schnittpunktes der Tangente mit der Geraden $y = -x - 2$.

Gleichsetzen der beiden Geradengleichungen ergibt

$8 \cdot x - 16 = -x - 2 \Longrightarrow 9 \cdot x = 14 \Longrightarrow x = \frac{14}{9}$ und damit $y = -\frac{14}{9} - 2 = -\frac{14}{9} - \frac{18}{9} = -\frac{32}{9}$

Die Höhe des zu berechnenden Dreiecks ist $h = \frac{32}{9}$.

Die Länge der Grundseite des Dreiecks entspricht dem Abstand der Nullstellen der beiden Geraden. Die Tangente hat die Nullstelle $x_{01} = 2$.

Die Gerade $y = -x - 2$ hat die Nullstelle $x_{02} = -2$, denn $y = -(-2) - 2 = 0$.

Die Grundseite g des Dreiecks hat die Länge $g = x_{01} + |x_{02}| = 4$.

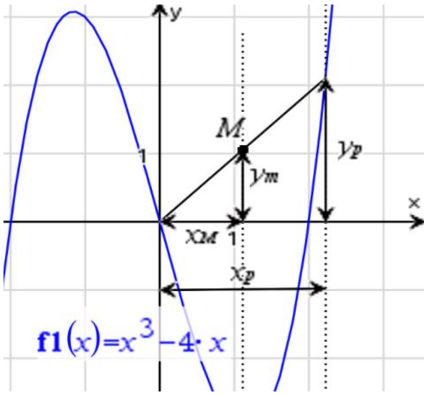
Der Flächeninhalt A des Dreiecks ist $A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{32}{9} = \frac{64}{9}\ FE$.

e Begründen Sie, dass die folgende Aussage richtig ist:

Ist P ein beliebiger Punkt auf dem Graphen von f, so liegt der Mittelpunkt der Verbindungsstrecke von P und dem Koordinatenursprung auf dem Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $h: x \mapsto 4x^3 - 4x$.

1e: Aussage begründen:

Mit dem in der Aufgabenstellung gegebenen Graphen lässt sich die Situation veranschaulichen. Da $M(x_M;\ y_M)$ der Mittelpunkt der Strecke $\overline{OP}$ ist, gilt nach dem Strahlensatz $x_M = \frac{1}{2} \cdot x_P$ und $y_M = \frac{1}{2} \cdot y_P = \frac{1}{2} \cdot \left(x_P{}^3 - 4 \cdot x_p\right)$. Mit dem Einsetzen von $x_P = 2 \cdot x_M$ folgt



$$y_M = \frac{1}{2} \cdot \left((2 \cdot x_M)^3 - 4 \cdot (2 \cdot x_M)\right)$$

$$y_M = \frac{1}{2} \cdot (8 \cdot x_M{}^3 - 8 \cdot x_M)$$

$$y_M = 4 \cdot x_M{}^3 - 4 \cdot x_M$$

Dies ist gerade die in der Aufgabenstellung zu begründende Funktionsgleichung.

2 Die Leitung eines großen Unternehmens versendet jeden Arbeitstag um 7:00 Uhr eine E-Mail mit tagesaktuellen Informationen an alle Mitarbeiterinnen und Mitarbeiter. Diese wurden gebeten, nach dem Lesen der E-Mail eine Lesebestätigung zu versenden.

Die folgende Tabelle zeigt für einen bestimmten Tag, wie viele Lesebestätigungen bei der Leitung des Unternehmens bis zum jeweiligen Zeitpunkt bereits eingegangen sind.

Zeitpunkt	7:30 Uhr	8:00 Uhr	8:30 Uhr	9:00 Uhr	9:30 Uhr	10:00 Uhr	......	14:30 Uhr	15:00 Uhr	......
Anzahl der bis dahin eingegangenen Lesebestätigungen	252	899	1701	2627	3503	4364		7552	7572	

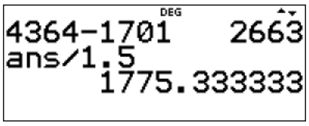
Beispielsweise sind von 7:00 Uhr bis 10:00 Uhr 4364 Lesebestätigungen eingegangen.

a Ermitteln Sie mithilfe der Tabelle für den betrachteten Tag, wie viele Lesebestätigungen im Zeitraum von 8:30 Uhr bis 10:00 Uhr im Mittel pro Stunde eingegangen sind. 3

2a: Mittelwert ermitteln:

Die Summe der E-Mails im Zeitraum von 08:30 Uhr bis 10:00 Uhr ergibt sich aus der Differenz der bis 10:00 Uhr eingegangenen E-Mails und der bis 08:30 Uhr eingegangenen E-Mails: $4364 - 1701 = 2663$.
Der Zeitraum von 08:30 Uhr bis 10:00 Uhr umfasst 1,5 Stunden.

Der gesuchte Mittelwert ist der Quotient $\frac{2663}{1{,}5} \approx 1775$.



Auf der Grundlage der über viele Tage erfassten Lesebestätigungen wurde mithilfe der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $u: x \mapsto 100x^3 - 900x^2 + 2300x$ und $v: x \mapsto 20x^2 - 520x + 2880$ die Funktion k entwickelt:

$$k: x \mapsto \begin{cases} u(x) & \text{für } 0 \le x < 3 \\ v(x) & \text{für } 3 \le x \le 8 \end{cases}$$

Die Funktion k beschreibt modellhaft für einen Zeitraum von acht Stunden eines Arbeitstages die zeitliche Entwicklung der momentanen Änderungsrate der Anzahl der eingegangenen Lesebestätigungen. Dabei ist x die seit 7:00 Uhr vergangene Zeit in Stunden und $k(x)$ die momentane Änderungsrate der Anzahl der seit 7:00 Uhr eingegangenen Lesebestätigungen in der Einheit $\frac{1}{h}$.

b Berechnen Sie $k(2)$ und interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang. 3

c Es gilt $v(x) = 20 \cdot (x-18) \cdot (x-8)$. Begründen Sie, dass die Funktion v nicht geeignet ist, die momentane Änderungsrate auch für den Zeitraum nach 15:00 Uhr zu beschreiben. 3

d Berechnen Sie mithilfe der Funktion k die Anzahl der im Zeitraum von 10:00 Uhr bis 15:00 Uhr eines Arbeitstages eingegangenen Lesebestätigungen. Ermitteln Sie, um wie viel Prozent diese auf der Grundlage des Modells berechnete Anzahl von der entsprechenden Anzahl des eingangs betrachteten Tages (vgl. Tabelle) abweicht. 5

40

2b: k(2) <u>berechnen</u> und <u>interpretieren</u>:

Der Wert k(2) kann mit der Funktion u(x) berechnet werden, weil 2 im zugehörigen Definitionsbereich liegt.

$k(x) = u(x) = 100 \cdot x^3 - 900 \cdot x^2 + 2300 \cdot x$, falls $0 \le x < 3$

$k(2) = u(2) = 100 \cdot 2^3 - 900 \cdot 2^2 + 2300 \cdot 2 = 800 - 3600 + 4600 = 1800$

Interpretation: Um 09:00 Uhr beträgt die momentane Änderungsrate der Anzahl der seit 07:00 Uhr eingegangenen Lesebestätigungen laut Modell 1800 pro Stunde.

2c: <u>Begründen</u>, dass v(x) für die Zeit nach 15:00 Uhr ungeeignet ist:

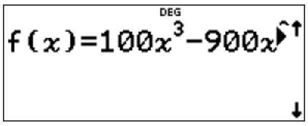
Von 07:00 Uhr bis 15:00 Uhr sind es gerade acht Stunden, dies ist die rechte Grenze des Definitionsbereichs der Funktion v(x).

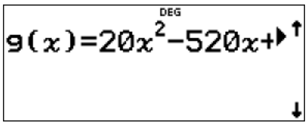
Der Form $v(x) = 20 \cdot (x - 18) \cdot (x - 8)$ ist zu entnehmen, dass für Werte $8 < x < 18$ die Funktion v(x) negative Funktionswerte hätte, weil dann $x - 8 > 0$, aber $x - 18 < 0$ ist.

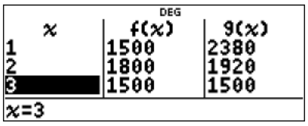
Das ist aber im gegebenen Sachverhalt nicht sinnvoll, weil die momentane Änderungsrate der Anzahl der seit Beginn um 07:00 Uhr eingehenden Lesebestätigungen nicht negativ sein kann. Wäre die Änderungsrate negativ, dann müssten bereits eingegangene Lesebestätigungen wieder aufgehoben werden. Dies entspricht aber nicht dem beschriebenen Sachverhalt.

Alternative Lösung:

Die Werte der Funktionen u(x) und v(x) werden auf dem TI-30X Prio MathPrint tabelliert als f(x) bzw. g(x).







Für x < 3 werden die Funktionswerte von f(x), ab x = 3 die von g(x) verwendet, um der Definition der Funktion k(x) zu entsprechen.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
k(x)	0	1500	1800	1500	1120	780	480	220	0	-180	-320

Auch hier ist zu erkennen, dass die Änderungsrate für Werte größer als x = 8 negativ wird. Dies ist aus dem oben genannten Grund in diesem Sachzusammenhang nicht sinnvoll.

2d: Mit k die Anzahl der eingehenden Lesebestätigungen berechnen und prozentualen Unterschied ermitteln:

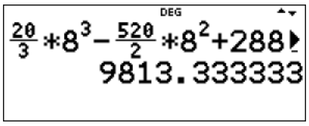
Für den Zeitraum von 10:00 Uhr bis 15:00 Uhr wird die Funktion k von v(x) repräsentiert, weil hier das Intervall $3 \leq x \leq 8$ zum Tragen kommt.

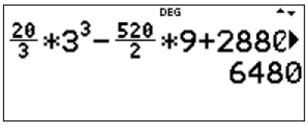
Von der momentanem Änderungsrate auf den Bestand (Anzahl A der Lesebestätigungen) kann mithilfe des bestimmten Integrals geschlossen werden:

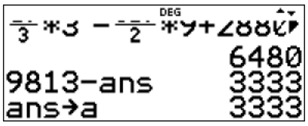
$$A = \int_3^8 v(x)dx = \int_3^8 (20 \cdot x^2 - 520 \cdot x + 2880)\, dx$$

$$A = \left[\frac{20}{3} \cdot x^3 - \frac{520}{2} \cdot x^2 + 2880 \cdot x\right]_3^8$$

$$A = \left(\frac{20}{3} \cdot 8^3 - \frac{520}{2} \cdot 8^2 + 2880 \cdot 8\right) - \left(\frac{20}{3} \cdot 3^3 - \frac{520}{2} \cdot 3^2 + 2880 \cdot 3\right)$$



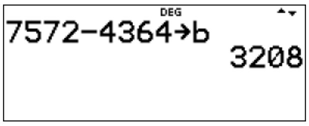


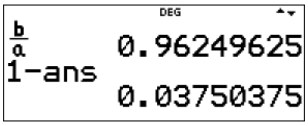


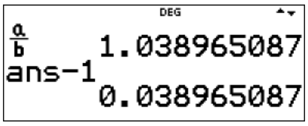
$A \approx 9813 - 6480 = 3333$ (auf dem WTR unter der Variablen a speichern)

Die mit der Funktion k berechnete Anzahl eingegangenen Lesebestätigungen von 10:00 Uhr bis 15:00 Uhr beträgt rund 3333.

Berechnet man diese Anzahl mit den Werten aus der Tabelle, so ergibt sich
7572 – 4364 = 3208 (auf dem WTR unter der Variablen b speichern).

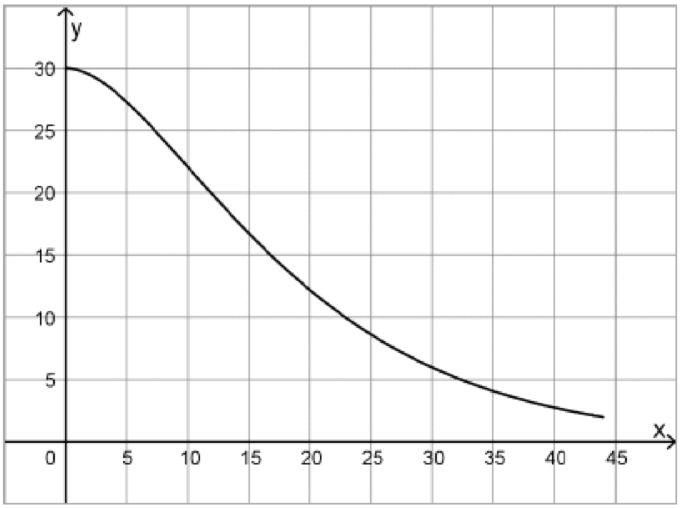






Die auf der Grundlage des Modells berechnete Anzahl ist um ca. 3,9 % größer als die anhand der Tabellenwerte ermittelte Anzahl.
oder:
Die auf der Grundlage der Tabellenwerte berechnete Anzahl ist um ca. 3,8 % kleiner als die anhand des Modells ermittelte Anzahl.

1 Der abgebildete Graph der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f mit $f(x) = 3 \cdot (x+10) \cdot e^{-0,1x}$ stellt für $0 \le x \le 44$ den Längsschnitt einer Rutschbahn dar. Der Anfang der Rutschbahn wird im Modell durch den Punkt $(0\,|\,f(0))$ beschrieben, ihr Ende durch den Punkt $(44\,|\,f(44))$. Im verwendeten Koordinatensystem beschreibt die x-Achse den horizontalen Erdboden. Eine Längeneinheit entspricht 10 cm in der Wirklichkeit.



Für die erste und die zweite Ableitungsfunktion von f gilt: $f'(x) = -0,3x \cdot e^{-0,1x}$ bzw. $f''(x) = 0,03 \cdot (x-10) \cdot e^{-0,1x}$

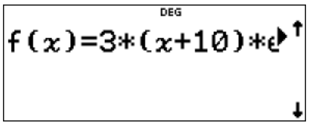
a Berechnen Sie den Höhenunterschied zwischen dem Anfang und dem Ende der Rutschbahn. 3

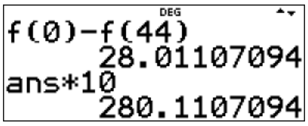
1a: Höhenunterschied berechnen:

Größte Höhe bei x = 0, kleinste Höhe bei x = 44.

Bei Beachtung des Längenmaßstabes ist der Höhenunterschied

$\Delta h = 10 \cdot [f(0) - f(44)]\ cm \approx 280\ cm.$





Der Höhenunterschied beträgt rund 2,80 m.

In einer Zusammenstellung der Sicherheitskriterien für Rutschbahnen auf öffentlichen Spielplätzen einer Gemeinde heißt es:

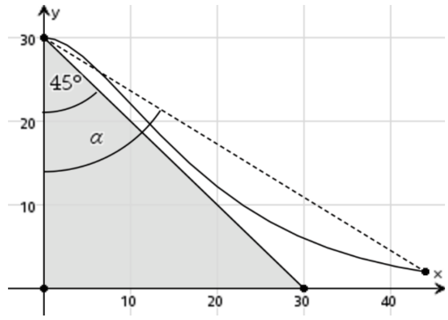
I *Der durch den Anfangspunkt und den Endpunkt der Rutschbahn festgelegte Winkel gegenüber der Horizontalen darf eine Größe von 45° nicht überschreiten.*

II *Neigungswinkel gegenüber der Horizontalen mit einer Größe über 60° sind an keinem Punkt der gesamten Rutschbahn zulässig.*

b Beurteilen Sie ohne weitere Rechnung, ob die betrachtete Rutschbahn das Sicherheitskriterium I erfüllt. Veranschaulichen Sie Ihre Überlegungen hierzu in der Abbildung. 3

c Untersuchen Sie rechnerisch, ob die Rutschbahn das Sicherheitskriterium II erfüllt. 4

1b: Beurteilen von Kriterium I und grafisch veranschaulichen:



In der Abbildung 1 wird eingetragen:

1. Strecke durch Anfangs- und Endpunkt der Rutschbahn zeichnen, die mit der y-Achse einen Winkel α bildet.
2. Strecke durch die Punkte (0; 30) und (30; 0) zeichnen. Sie bildet mit den Achsen ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck mit den Basiswinkeln der Größe 45°.

Der Winkel α ist größer als 45°, aber der Winkel, den die Strecke 1 mit der Horizontalen (der x-Achse) bildet, ist kleiner als 45°. Die Gerade durch Anfangs- und Endpunkt der Rutschbahn bildet mit den Achsen ebenfalls ein rechtwinkliges, aber nicht gleichschenkliges Dreieck, so dass der zweite Basiswinkel, also der Winkel gegenüber der Horizontalen kleiner als 45° sein muss.

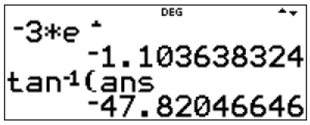
1c: Kriterium II rechnerisch untersuchen:

Die Größen der Neigungswinkel der Tangenten an den Graphen von f lassen sich über deren 1. Ableitung bestimmen. Das Maximum dieser Winkelgrößen kann über die 1. Ableitung der 1. Ableitung von f, also die Nullstelle der zweiten Ableitung von f bestimmt werden.
$f''(x) = 0{,}03 \cdot (x - 10) \cdot e^{-0{,}1 \cdot x}$ ist gegeben. Dieser Term kann nach dem Satz vom Nullprodukt nur für x = 10 den Wert null annehmen. In Verbindung mit der Abbildung lässt sich erkennen, dass bei x = 10 eine Wendestelle vorliegen muss.

Die Größe des Steigungswinkels an der Stelle x = 10 kann mit dem Wert der 1. Ableitung von f an dieser Stelle ermittelt werden:

$f'(x) = -0{,}3 \cdot x \cdot e^{-0{,}1 \cdot x}$

$f'(10) = -0{,}3 \cdot 10 \cdot e^{-0{,}1 \cdot 10} = -3 \cdot e^{-1} \approx -1{,}10$

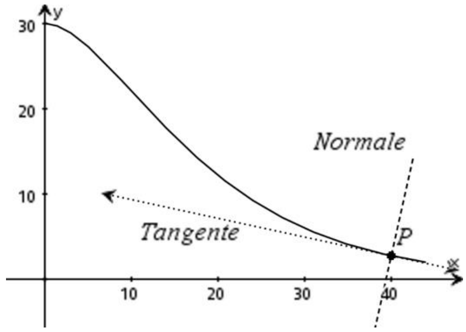


Für den Steigungswinkel an dieser Stelle gilt $\alpha \approx \arctan(-1{,}10) \approx -47{,}8°$. Das entspricht einem Neigungswinkel von ca. 47,8° gegenüber der Horizontalen. Da bei x = 10 das Gefälle am größten ist (Wendepunkt!), ist das Sicherheitskriterium II erfüllt.

d Die Rutschbahn wird durch eine Strebe gestützt. Die Strebe kann im Modell durch eine Strecke beschrieben werden, die vom Punkt $P(40 \mid f(40))$ senkrecht zur Tangente an den Graphen von f im Punkt P verläuft. Berechnen Sie die Länge der Strebe zwischen der Rutschbahn und dem Erdboden.	6

1d: Länge der Strebe berechnen:

Die Strebe ist ein Teil der Geraden, die in der Abbildung als „Normale“ bezeichnet ist. Die Normale steht senkrecht zur Tangenten an den Graph von f im Punkt P.
Der Anstieg m_T der Tangente ist der Wert der 1. Ableitung von f an der Stelle x = 40:



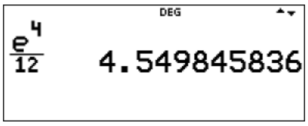
$m_T = f'(40) = -0{,}3 \cdot 40 \cdot e^{-0{,}1 \cdot 40} = \frac{-12}{e^4}$
(Der Funktionsterm von f' ist gegeben.)

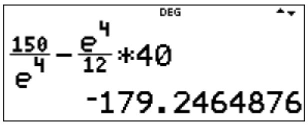
Der Anstieg m_n der Normalen ist das negative Reziproke von m_T: $m_n = -\frac{1}{m_T} = \frac{e^4}{12}$.

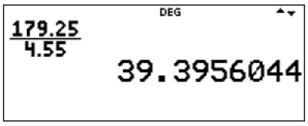
Die Normalengleichung hat die Form $y = m_n \cdot x + b$. Da der Punkt P(40|f(40)) diese Gleichung erfüllt und m_n bekannt ist, kann b bestimmt werden:

$f(40) = m_n \cdot 40 + b$ mit $f(40) = 3 \cdot (40 + 10) \cdot e^{-0{,}1 \cdot 40} = \frac{150}{e^4}$ und $m_n = \frac{e^4}{12}$ folgt durch Einsetzen in die Gleichung $y = m_n \cdot x + b$:

$\frac{150}{e^4} = \frac{e^4}{12} \cdot 40 + b$, also $\frac{150}{e^4} - \frac{e^4}{12} \cdot 40 = b$



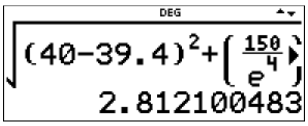




Die Gleichung der Normalen ist näherungsweise $y = 4{,}55 \cdot x - 179{,}25$.

Der Punkt E ist der Schnittpunkt der Normalen mit der x-Achse. Seine x-Koordinate ergibt sich aus der Gleichung $0 = 4{,}55 \cdot x - 179{,}25$ zu $x \approx \frac{179{,}25}{4{,}55} \approx 39{,}40$.

Die Länge der Strebe ist gegeben durch $|\overline{PE}| = \sqrt{(40 - 39{,}40)^2 + \left(\frac{150}{e^4} - 0\right)^2} \approx 2{,}8$



Unter Beachtung des Längenmaßstabes ergibt sich für die Strebe eine Länge von ca. 28 cm.

2 Die Funktion f aus Aufgabe 1 gehört zur Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f_k mit $f_k(x) = k \cdot (x+10) \cdot e^{-0,1x}$ und $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$. Der Graph von f_k wird mit G_k bezeichnet.	
a Begründen Sie, dass -10 die einzige Nullstelle von f_k ist, und geben Sie das Verhalten von f_k für $x \to -\infty$ in Abhängigkeit von k an.	3
b Für jeden Wert von k besitzt G_k genau einen Extrempunkt. Bestimmen Sie die Koordinaten und die Art des Extrempunkts von G_k in Abhängigkeit von k.	5
c Für $k \neq -1$ werden G_k und G_{k+1} betrachtet. Berechnen Sie den Abstand der Schnittpunkte von G_k und G_{k+1} mit der y-Achse.	2
d Beurteilen Sie die folgende Aussage: *Spiegelt man einen beliebigen Graphen der Schar an der x-Achse, so entsteht ein anderer Graph der Schar.*	3

2a: <u>Begründen</u>, dass x = –10 die einzige Nullstelle ist; Verhalten für $x \to -\infty$ <u>angeben</u>:

Der Funktionsterm von f_k ist ein Produkt aus drei Faktoren. Die Faktoren k sowie $e^{-0,1\cdot x}$ sind immer ungleich null, also ist das Produkt nur dann null, wenn der dritte Faktor null ist: $x + 10 = 0 \Leftrightarrow x = -10$. Dies ist deshalb die einzige Nullstelle von f_k.

$\lim_{x\to-\infty} f_k(x) = +\infty$ für k < 0 und $\lim_{x\to-\infty} f_k(x) = -\infty$ für k > 0

2b: Koordinaten und Art des Extrempunktes <u>bestimmen</u>:

$f_k(x) = k \cdot (x+10) \cdot e^{-0,1\cdot x}$ ableiten unter Beachtung von Produkt- und Kettenregel

$f_k{}'(x) = k \cdot (1) \cdot e^{-0,1\cdot x} + k \cdot (x+10) \cdot (-0,1) \cdot e^{-0,1\cdot x} = k \cdot e^{-0,1\cdot x} \cdot (1 - 0,1x - 1)$

$f_k{}'(x) = -0,1 \cdot k \cdot x \cdot e^{-0,1\cdot x}$

$f_k{}''(x) = -0,1 \cdot k \cdot (e^{-0,1\cdot x} - 0,1 \cdot e^{-0,1\cdot x}) = -0,1 \cdot k \cdot e^{-0,1\cdot x} \cdot (1 - 0,1 \cdot x)$

Notwendige Bedingung für lokale Extrema:

$f_k{}'(x) = 0$ ist nur für x = 0 erfüllt, weil $k \neq 0$ und $e^{-0,1\cdot x} \neq 0$

$x_e = 0$ ist die einzige mögliche lokale Extremstelle

Hinreichende Bedingung für lokale Extrema:

$f_k{}''(x_e) \neq 0$

$f_k{}''(0) = -0,1 \cdot k \cdot e^{-0,1\cdot 0} \cdot (1 - 0,1 \cdot 0) = -0,1 \cdot k$

Für k > 0 ist $f_k{}''(0) < 0$, dann liegt ein lokales Maximum vor.

Für k < 0 ist $f_k{}''(0) > 0$, dann liegt ein lokales Minimum vor.

Funktionswert an der Extremstelle: $f_k(0) = k \cdot (0+10) \cdot e^{-0,1\cdot 0} = 10k$

Hochpunkt H(0|10k) für k > 0; Tiefpunkt T(0|10k) für k < 0.

2c: Abstand der Schnittpunkte von G_k und G_{k+1} mit der y-Achse berechnen ($k \neq -1$):

Der Schnittpunkt der Funktionsgraphen mit der y-Achse ergibt sich jeweils für x = 0.

G_k: $f_k(0) = k \cdot (0 + 10) \cdot e^{-0,1 \cdot 0} = 10 \cdot k$

G_{k+1}: $f_{k+1}(0) = (k + 1) \cdot (0 + 10) \cdot e^{-0,1 \cdot 0} = 10 \cdot (k + 1)$

Der Abstand d ist die Differenz dieser Funktionswerte: $d = 10 \cdot (k + 1) - 10 \cdot k = 10$.
Unabhängig von k beträgt der Abstand immer 10 LE.

2d: Aussage beurteilen:

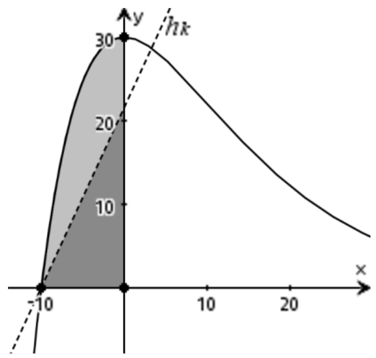
Bei Spiegelung des Graphen von f_k an der x-Achse hat der gespiegelte Graph den Funktionsterm $-f_k$.

Es gilt $-f_k(x) = -[k \cdot (x + 10) \cdot e^{-0,1 \cdot x}] = -k \cdot (x + 10) \cdot e^{-0,1 \cdot x} = f_{-k}(x)$

Die Aussage ist wahr.

Im Folgenden sei $k > 0$.	
e Die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion F_k mit $F_k(x) = -10k \cdot (x + 20) \cdot e^{-0,1x}$ ist eine Stammfunktion von f_k. G_k schließt im zweiten Quadranten mit den beiden Koordinatenachsen eine Fläche ein. Diese Fläche wird durch eine Gerade h_k in zwei Flächenstücke gleichen Inhalts geteilt, wobei die Gerade h_k für $x < 0$ den Graphen G_k nur auf der x-Achse schneidet. Ermitteln Sie eine Gleichung von h_k.	5
f Betrachtet werden reelle Werte von u, die größer als -10 sind. Ausgehend von den Punkten $(-10 \mid 0)$ und $(u \mid 0)$ stellen die folgenden vier Schritte die Lösung einer Aufgabenstellung in einem geometrischen Zusammenhang dar: (1) $p_k(u) = \frac{1}{2} \cdot (u + 10) \cdot f_k(u)$ (2) $p_k'(u) = 0 \Leftrightarrow u = 10$ (3) Es gilt: $p_k''(10) < 0$ (4) Ergebnis: $p_k(10) \approx 73,6 \cdot k$ Geben Sie eine passende Aufgabenstellung an und erläutern Sie die Schritte.	6
	40

2e: Geradengleichung ermitteln:



Um sich eine Vorstellung vom beschriebenen Sachverhalt zu verschaffen, lässt sich mit der Funktion aus Teilaufgabe 1 (identisch mit $f_3(x)$) eine Skizze erstellen. Dabei lässt sich noch verwenden, dass x = –10 die einzige Nullstelle der Funktionen $f_k(x)$ ist (Teilaufgabe 2a).

Die beiden schraffierten Flächenstücke sollen gleichen Flächeninhalt haben.
Die gesamte vom Graphen und den Achsen eingeschlossene Fläche hat den Flächeninhalt $\int_{-10}^{0} f_k(x)dx$.

Der Flächeninhalt eines der beiden nur halb so großen Flächenstücke, z. B. des unteren Flächenstücks, lässt sich dann unter Verwendung der angegebenen Stammfunktion beschreiben durch

$\frac{1}{2} \cdot \int_{-10}^{0} f_k(x)dx = \frac{1}{2} \cdot [-10k \cdot (x+20) \cdot e^{-0,1 \cdot x}]_{-10}^{0}$

$\frac{1}{2} \cdot \int_{-10}^{0} f_k(x)dx = \frac{1}{2} \cdot \left[(-10k \cdot (0+20) \cdot e^{-0,1 \cdot 0}) - \left(-10k \cdot (-10+20) \cdot e^{-0,1 \cdot (-10)}\right)\right]$

$\frac{1}{2} \cdot \int_{-10}^{0} f_k(x)dx = \frac{1}{2} \cdot [(-200k) - (-100k \cdot e^1)] = 50k \cdot e - 100k = 50k \cdot (e-2)$

Das untere Flächenstück hat die Form eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Kathetenlängen 10 LE für die Kathete auf der x-Achse und b_k auf der y-Achse.

Der Flächeninhalt dieses rechtwinkligen Dreiecks lässt sich durch $A_\Delta = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot b_k$ berechnen. Außerdem gilt für diesen Flächeninhalt, wie oben gezeigt wurde,

$A_\Delta = 50k \cdot (e-2)$.

Durch Gleichsetzen ergibt sich

$50k \cdot (e-2) = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot b_k \Longrightarrow b_k = 10k \cdot (e-2)$

Die Zahl b_k ist gleichzeitig das Absolutglied in der Gleichung der Geraden

$h_k: y = m_k \cdot x + b_k$.

Der Anstieg m_k der Geraden h_k lässt sich angeben durch den Differenzenquotienten

$m_k = \frac{b_k}{10} = \frac{10k \cdot (e-2)}{10} = k \cdot (e-2)$.

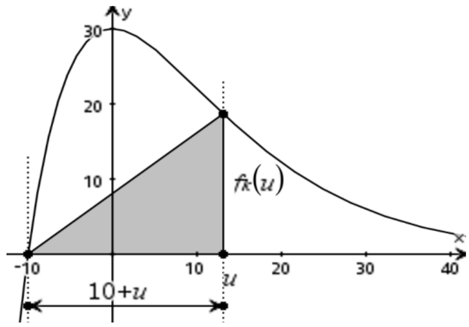
Damit kann nun die Gleichung der Geraden h_k angegeben werden:

$h_k: y = k \cdot (e-2) \cdot x + 10k \cdot (e-2)$.

2f: Passende Aufgabenstellung <u>angeben</u> und die Schritte <u>erläutern</u>:

Aufgabenstellung: Bestimmen Sie in Abhängigkeit von k den größten Flächeninhalt eines Dreiecks, das die Eckpunkte (-10|0), (u|0) und $(u|f_k(u))$ besitzt.

Erläuterung der Schritte:
Eine Skizze kann dabei hilfreich sein.



Schritt (1) beschreibt die Berechnung des Flächeninhaltes eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Kathetenlängen $(10+u)$ und $f_k(u)$.

Schritt (2) gibt an, wie die notwendigen Schritte zur Berechnung einer möglichen lokalen Extremstelle für die in (1) erstellte Gleichung aussehen.

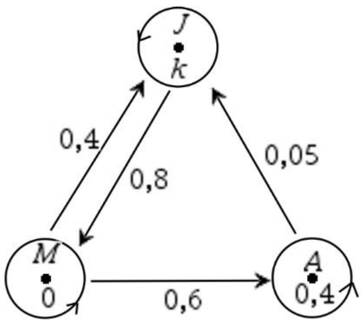
Schritt (3) zeigt, dass die in (2) gefundene möglich Extremstelle zu einem lokalen Maximum führt.

Schritt (4) gibt den maximalen Flächeninhalt des Dreiecks in Abhängigkeit von k an.

	BE
1 Betrachtet wird die Entwicklung einer Population von Tieren. Die Zusammensetzung der Population kann durch Vektoren $\overrightarrow{v_n}$ der Form $\begin{pmatrix} J \\ M \\ A \end{pmatrix}$ dargestellt werden, dabei ist J die Anzahl der jungen Tiere (bis ein Jahr alt), M die Anzahl der mittelalten Tiere (mehr als ein Jahr bis zwei Jahre alt) und A die Anzahl der alten Tiere (mehr als zwei Jahre alt).	
Die Entwicklung der Population von einem Jahr n zum nächsten lässt sich für $k \geq 0$ modellhaft durch die Matrix $P = \begin{pmatrix} k & 0,4 & 0,05 \\ 0,8 & 0 & 0 \\ 0 & 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}$ und die Gleichung $\overrightarrow{v_{n+1}} = P \cdot \overrightarrow{v_n}$ beschreiben.	
a Stellen Sie die Entwicklung der Population in einem Übergangsdiagramm dar.	3
b Die Population besteht zu Beginn der Beobachtung ausschließlich aus 200 jungen Tieren. Zwei Jahre nach Beobachtungsbeginn beträgt die Anzahl der jungen Tiere 66. Ermitteln Sie den Wert von k.	4

1a: Entwicklung im Übergangsdiagramm darstellen:

nach↓ von→	J	M	A
J	k	0,4	0,05
M	0,8	0	0
A	0	0,6	0,4



1b: Wert von k ermitteln:

Mit dem Schema von Falk erhält man für den Übergang nach dem ersten Jahr:

			200
			0
			0
k	0,4	0,05	$200 \cdot k + 0 + 0 = 200k$
0,8	0	0	$200 \cdot 0,8 + 0 + 0 = 160$
0	0,6	0,4	0

Deutung: Am Ende des nächsten Jahres gibt es 200k Jungtiere und 160 mittelalte Tiere.

Mit dem Schema von Falk erhält man für den Übergang nach dem zweiten Jahr:

			200k
			160
			0
k	0,4	0,05	$200 \cdot k^2 + 64 + 0 = 200k^2 + 64$
0,8	0	0	$200k \cdot 0{,}8 + 0 + 0 = 160k$
0	0,6	0,4	96

Deutung: Am Ende des nächsten Jahres gibt es $200k^2+64$ Jungtiere, 160k mittelalte Tiere sowie 96 alte Tiere.

Laut Aufgabenstellung gibt es zwei Jahre nach Beobachtungsbeginn 66 junge Tiere.

Aus der Gleichung $200k^2 + 64 = 66$ kann k (k > 0) berechnet werden:

$k^2 = \frac{2}{200} = \frac{1}{100} \Longrightarrow k = \frac{1}{10} = 0{,}1$

c Zeigen Sie, dass für die Matrix $Q = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}7 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}6 & 0{,}7 \end{pmatrix}$ die folgende Aussage wahr ist: *Für jeden Vektor $\vec{u}$ ist die Summe der Komponenten des Vektors $Q \cdot \vec{u}$ das 0,9-Fache der Summe der Komponenten des Vektors $\vec{u}$.*	3
d Die Entwicklung einer anderen Population der oben beschriebenen Tierart kann von einem Jahr n zum nächsten mithilfe der Matrix Q aus Aufgabe 1c modellhaft beschrieben werden. Bestimmen Sie, wie viele Jahre nach Beobachtungsbeginn die Größe der Population, d. h. die Summe der Anzahlen der Tiere jeden Alters, erstmals auf unter 20 % ihres Werts zu Beobachtungsbeginn gesunken ist.	5

1c: Aussage <u>nachweisen</u>:

Es sei $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, dann kann $Q \cdot \vec{u}$ mit dem Schema von Falk berechnet werden:

			x
			y
			z
0,2	0,3	0,2	0,2x+0,3y+0,2z
0,7	0	0	0,7x+0+0 = 0,7x
0	0,6	0,7	0+0,6y+0,7z = 0,6y+0,7z

$$Q \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} 0{,}2x + 0{,}3y + 0{,}2z \\ 0{,}7x \\ 0{,}6y + 0{,}7z \end{pmatrix}$$

Die Summe der Koordinaten von $Q \cdot \vec{u}$ ist $(0{,}2x + 0{,}3y + 0{,}2z) + (0{,}7x) + (0{,}6y + 0{,}7z)$

Ordnen und Zusammenfassen ergibt $Q \cdot \vec{u} = 0{,}9x + 0{,}9y + 0{,}9z = 0{,}9 \cdot (x + y + z)$.

Damit ist die Aussage nachgewiesen.

1d: <u>Bestimmen</u>, nach wie vielen Jahren erstmals die Anzahl der Tiere jedes Alters jeweils unter 20% des Anfangswertes gesunken ist:

Es sei G_n die Größe der Population nach n Jahren. In Teilaufgabe 1c wurde nachgewiesen, das $G_{n+1} = 0{,}9 \cdot G_n$ gilt. Daraus ergibt sich die explizite Vorschrift $G_n = 0{,}9^n \cdot G_0$.

Mit diesem Modell kann die Fragestellung mathematisch so formuliert werden:

$0{,}9^n \cdot G_0 < 0{,}2 \cdot G_0$ | G_0 kürzen

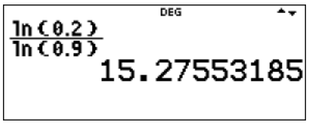
$0{,}9^n < 0{,}2$| Logarithmieren

$ln(0{,}9^n) < ln(0{,}2)$ | Logarithmengesetz anwenden $ln(x^r) = r \cdot \ln(x)$

$n \cdot ln(0{,}9) < ln(0{,}2)$ | : ln(0,9)

$n > \frac{\ln(0{,}2)}{\ln(0{,}9)}$ | Das Relationszeichen kehrt sich um, weil ln(0,9) < 0 ist.

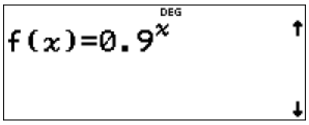
$n > 15{,}28 \geq 16$ | Weil n eine natürliche Zahl sein muss.

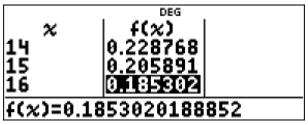


Nach 16 Jahren sinkt der Bestand auf unter 20 % des Ausgangsbestandes in jeder Altersgruppe.

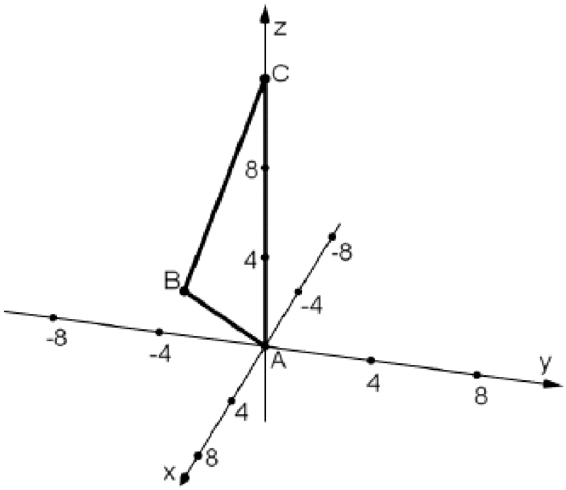
Alternativer Lösungsweg:

Die Exponentialfunktion $y = 0{,}9^x$ wird als Funktion f(x) auf dem WTR gespeichert und mit der Schrittweite 1 tabelliert. Die Funktionswerte werden durchgemustert, bis erstmal ein Wert unter 0,2 erscheint.





2 Die Abbildung zeigt das Dreieck ABC mit $A(0|0|0)$, $B(-3|-4|0)$ und $C(0|0|12)$. Der Umfang des Dreiecks beträgt 30.



a Begründen Sie, dass das Dreieck ABC rechtwinklig ist. 2

b Der Umfang des Dreiecks ABC^* mit $C^*(0|0|z)$ und $z > 0$ ist halb so groß wie der Umfang des Dreiecks ABC. Bestimmen Sie die z-Koordinate von C^*. 5

c Das Dreieck ABC wird um die Seite $\overline{AC}$ gedreht. Dabei entstehen Dreiecke AB^*C. Geben Sie drei Punkte B^* an, bei denen jeweils eine der Koordinaten den Wert 3 hat. 3

25

2a: Rechtwinkligkeit <u>begründen</u>:

Der Punkt A(0|0|0) liegt im Ursprung, der Punkt C(0|0|12) liegt auf der z-Achse, d.h. die Strecke $\overline{AC}$ liegt ebenfalls auf der z-Achse. Der Punkt B(-3|-4|0) liegt in der xy-Ebene, d. h. die Strecke $\overline{AB}$ liegt ebenfalls in der xy-Ebene. Deshalb hat das Dreieck ABC bei A einen rechten Winkel.

Alternativer Lösungsweg 1:

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}; \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \overrightarrow{AC} \circ \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{AB}$$

Da das Skalarprodukt den Wert null hat, ist das Dreieck rechtwinklig bei A.

Alternativer Lösungsweg 2:

$$\left(\left|\overrightarrow{AC}\right|\right)^2 + \left(\left|\overrightarrow{AB}\right|\right)^2 = 12^2 + \left(\sqrt{(-3)^2 + (-4)^2 + 0^2}\right)^2 = 144 + 25 = 169$$

$$\left(\left|\overrightarrow{BC}\right|\right)^2 = \left(\sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2}\right)^2 = 169$$

Da für das Dreieck ABC der Satz des Pythagoras gilt, ist das Dreieck rechtwinklig bei A.

2b: Bestimmen der -z-Koordinate:

Mit C*(0|0|z) gilt für den Umfang des Dreiecks ABC*:

$\left|\overrightarrow{AB}\right| + \left|\overrightarrow{AC^*}\right| + \left|\overrightarrow{BC^*}\right| = 15$

$5 + \sqrt{z^2} + \sqrt{3^2 + 4^2 + z^2} = 15$

$\sqrt{25 + z^2} = 10 - z$ | quadrieren

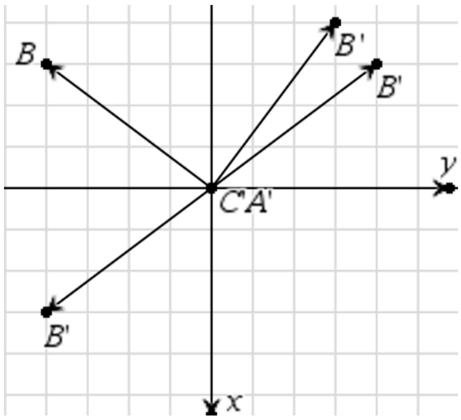
$25 + z^2 = 100 - 20z + z^2$ | $-z^2$; ordnen; zusammenfassen

$20z = 75$ | : 20

$z = \frac{15}{4} = 3{,}75$

2c: Drei Punkte B* angeben:

Ein Grundriss kann behilflich sein beim Finden geeigneter Punkte. Sie können ohne weitere Begründung angegeben werden.



B*(3|4|0)

B*(-4|3|0)

B*(3|4|0)

BE

Abbildung 1 zeigt die Pyramide ABCDS mit den Eckpunkten $A(-3|-3|0)$, $B(3|-3|0)$, $C(3|3|0)$, $D(-3|3|0)$ und $S(0|0|4)$ sowie den Punkt $O(0|0|0)$, der in der quadratischen Grundfläche der Pyramide liegt. Die Seitenfläche CDS der Pyramide liegt in der Ebene E.

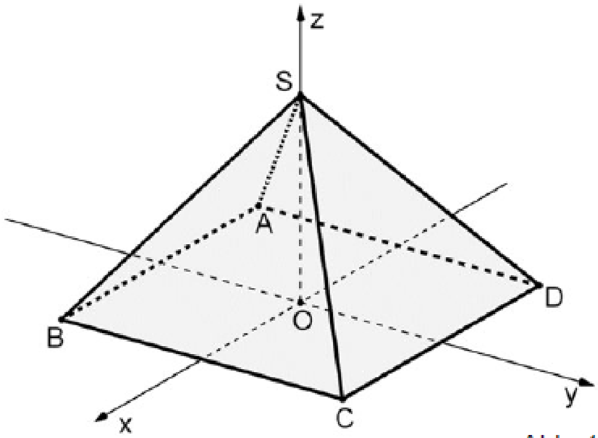


Abb. 1

a Berechnen Sie den Inhalt der Oberfläche der Pyramide. 4

b Genau eine der folgenden Gleichungen (1) bis (3) beschreibt eine Symmetrieebene der Pyramide. Geben Sie diese Gleichung an und begründen Sie für eine der anderen Gleichungen, dass die durch sie beschriebene Ebene keine Symmetrieebene der Pyramide ist. 3

(1) $x - z = 0$ (2) $x + y + z = 4$ (3) $x + y = 0$

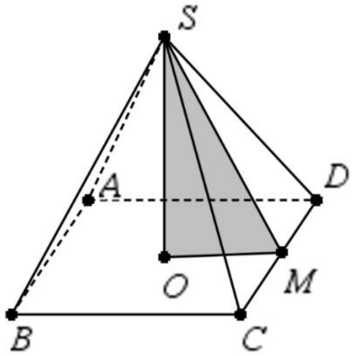
c Bestimmen Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform. 3

(zur Kontrolle: $4y + 3z = 12$)

1a: Oberflächeninhalt berechnen:

Anhand der Koordinaten der Eckpunkte ist zu erkennen, dass die Pyramide ABCDS eine gerade Pyramide mit der Körperhöhe h = 4 LE und der Seitenlänge a = 6 LE der quadratischen Grundfläche ist. Die Seitenflächen sind vier gleichschenklige Dreiecke, die zueinander kongruent sind.

Um den Flächeninhalt einer der Seitenflächen zu ermitteln, ist es zweckmäßig, die Länge einer Seitenhöhe zu bestimmen. Dazu kann ein rechtwinkliges Stützdreieck eingezeichnet werden.



Beispiel: Es sei M der Mittelpunkt der Strecke $\overline{CD}$. Dann ist das Dreieck OMS rechtwinklig bei O mit den Kathetenlängen
$|\overline{OM}| = 3\,LE$ und $|\overline{OS}| = 4\,LE$.

Die Seitenhöhe des Dreiecks CDS ist dann $|\overline{SM}| = \sqrt{3^2 + 4^2}\,LE = 5\,LE$.

Der Flächeninhalt der Seitenfläche CDS ist
$A_1 = \frac{1}{2} \cdot |\overline{CD}| \cdot |\overline{MS}| = \frac{1}{2} \cdot 6\,LE \cdot 5\,LE = 15\,FE$.

Der Flächeninhalt der quadratischen Grundfläche ABCD ist
$A_2 = |\overline{CD}|^2 = (6\,LE)^2 = 36\,FE$.

Die Gesamtoberfläche ergibt sich zu $A_o = 4 \cdot A_1 + A_2 = 4 \cdot 15\,FE + 36\,FE = 96\,FE$.

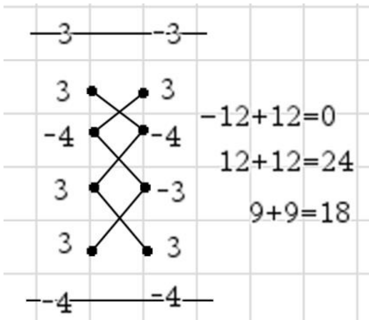
Alternativ kann der Flächeninhalt der Seitenfläche CDS auch mit dem Vektorprodukt bestimmt werden:

$\overrightarrow{SC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}; \overrightarrow{SD} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{SC} \times \overrightarrow{SD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 24 \\ 18 \end{pmatrix} = 6 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

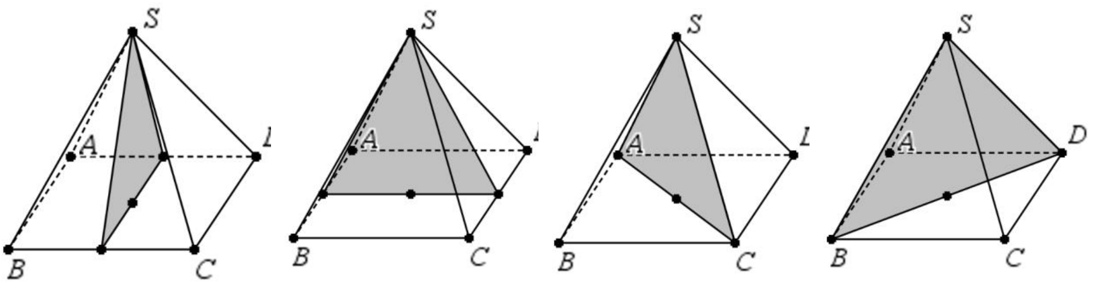
$\left|\overrightarrow{SC} \times \overrightarrow{SD}\right| = 6 \cdot \sqrt{16+9} = 30$

$A_1 = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{SC} \times \overrightarrow{SD}\right| = 15$



1b: Symmetrieebene <u>angeben</u> und <u>begründen</u>:

Eine Symmetrieebene F der Pyramide muss deren Spitze S enthalten und die Pyramide in zwei zueinander kongruente Teilkörper zerlegen.
Neben dem Punkt S muss auch der Koordinatenursprung in der Symmetrieebene F liegen, d. h., F muss senkrecht zur xy-Ebene sein.
Für die Ebene F, die die Pyramide in zwei kongruente Teilkörper zerlegt, kommen dann nur noch folgende Fälle in Betracht:
(a) Die x-Achse liegt vollständig in F.
(b) Die y-Achse liegt vollständig in F.
(c) Sowohl der Punkt A als auch der Punkt C liegt neben S und O in F.
(d) Sowohl der Punkt B als auch der Punkt D liegt neben S und O in F.
Durch Skizzen lassen sich diese Möglichkeiten veranschaulichen.



$(1)\ x - z = 0$

Der Punkt S(0|0|4) liegt nicht in der Symmetrieebene, denn $0 - 4 = 0$ ist eine falsche Aussage. Also kommt (1) nicht als Symmetrieebene in Frage.

$(2)\ x + y + z = 4$

Der Punkt S(0|0|4) liegt in dieser Ebene, denn $0 + 0 + 4 = 4$ ist eine wahre Aussage.

Der Punkt O(0|0|0) liegt aber nicht in dieser Ebene, denn $0+0+0=4$ ist eine falsche Aussage. Also kommt (2) nicht als Symmetrieebene in Frage.

Da die Aufgabenstellung vorgibt, dass genau eine der drei Gleichungen eine Symmetrieebene beschreibt, kann man nun nach dem Ausschluss von (1) und (2) bereits die Gleichung (3) als die gesuchte Ebenengleichung angeben (mehr ist nicht verlangt).

Alternativer Lösungsweg:

$(3)\ x + y = 0 \ \Rightarrow x + y + 0 \cdot z = 0$

Der Punkt S(0|0|4) liegt in der Symmetrieebene, denn $0 + 0 + 0 \cdot 4 = 0$ ist eine wahre Aussage.

Der Punkt O(0|0|0) liegt in der Symmetrieebene, denn 0+$0 + 0 \cdot 0 = 0$ ist eine wahre Aussage.

Der Punkt B(3|-3|0) liegt in der Symmetrieebene, denn $3 - 3 + 0 \cdot 0 = 0$ ist eine wahre Aussage.

Der Punkt D(-3|3|0) liegt in der Symmetrieebene, denn $-3 + 3 + 0 \cdot 0 = 0$ ist eine wahre Aussage.

Also ist (3) $x + y = 0$ die gesuchte Symmetrieebene.

1c: Ebenengleichung <u>bestimmen</u>:

Der Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ kann mithilfe zweier Richtungsvektoren von E bestimmt werden, z. B. durch die Bedingungen $\vec{n} \circ \overrightarrow{SC} = 0$ und $\vec{n} \circ \overrightarrow{SD} = 0$.

$$\vec{n} \circ \overrightarrow{SC} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = 3a + 3b - 4c = 0 \quad (1)$$

$$\vec{n} \circ \overrightarrow{SD} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = -3a + 3b - 4c = 0 \quad (2)$$

$(1) - (2)$: $6a = 0 \Rightarrow a = 0$

Das zugehörige Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen. Mit der Wahl von c = 3 ergibt sich b = 4.

Damit kann der Normalenvektor von E angegeben werden durch $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Normalenform von E:

$\vec{n} \circ \left[\vec{x} - \overrightarrow{OS}\right] = 0$, also $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}\right] = 0 \Rightarrow 4y + 3z - 12 = 0$.

Diese Gleichung stimmt mit dem Kontrollergebnis überein.

Alternative 1:
Normalenvektor mit Vektorprodukt (siehe Teilaufgabe 1a):

$$\vec{n} = \overrightarrow{SC} \times \overrightarrow{SD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 24 \\ 18 \end{pmatrix} = 6 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Alternative 2:
Koordinatengleichung $a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z = d$ über ein lineares Gleichungssystem. Für x, y und z werden die Koordinaten von C, D und S eingesetzt.

$$\begin{array}{rcl} 3a + 3b & = & d \\ -3a + 3b & = & d \\ 4c & = & d \end{array}$$

Mit $d = 12$ ist $c = 3$. Aus den beiden ersten Gleichungen folgt damit $a = 0$ und $b = 4$.

d Es gibt einen Punkt $P(0 \mid 0 \mid p)$, der im Innern der Pyramide liegt und von allen vier Seitenflächen sowie der Grundfläche der Pyramide den gleichen Abstand hat. Mithilfe des folgenden Gleichungssystems lässt sich der Wert von p bestimmen: I $\overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ II $4 \cdot 4t + 3 \cdot (p + 3t) = 12$ III $\lvert \overrightarrow{PQ} \rvert = p$ Erläutern Sie die Überlegungen im geometrischen Zusammenhang, die diesem Vorgehen zur Bestimmung des Werts von p zugrunde liegen.	5

1d: Lösungsansatz <u>erläutern</u>:

Alle Strecken, die vom Punkt P zu den Seitenflächen und zur Grundfläche verlaufen, müssen senkrecht zu diesen Begrenzungsflächen verlaufen, weil ihre Länge den Abstand von P zu den Begrenzungsflächen angibt.

Gleichung (I) ist eine Geradengleichung. Ihr Stützvektor ist der Ortsvektor von P und ihr Richtungsvektor stimmt mit dem Normalenvektor der Ebene E überein. Der Punkt Q ist also ein Punkt der Lotgeraden zu E durch P.

Die Koordinaten der Lotgeraden werden in die Gleichung der Ebene E eingesetzt (Gleichung II). Somit wird Q als Schnittpunkt der Lotgeraden (I) mit der Ebene E charakterisiert.

Gleichung (III) verwendet den Abstand des auf der z-Achse liegenden Punktes P(0|0|p) zur Grundfläche ABCD. Dieser Abstand muss den Wert p haben und mit dem Abstand vom Punkt P zum Punkt Q übereinstimmen.

Beachten Sie, dass Sie die Überlegungen zur Bestimmung des Wertes von p lediglich erläutern sollen. Die Größe dieses Wertes müssen Sie nicht berechnen.

Die Ebene E gehört zur Schar der Ebenen $E_k: 4k \cdot x + 4\sqrt{1-k^2} \cdot y + 3 \cdot z = 12$ mit $k \in [-1;1]$. Die Seitenfläche ADS der Pyramide liegt in der Ebene E_{-1} der Schar, die Seitenfläche BCS in der Ebene E_1.	
e Zeigen Sie, dass der Punkt S in allen Ebenen der Schar enthalten ist.	1
f Weisen Sie nach, dass die Größe des Winkels, unter dem die Gerade OS die Ebene E_k schneidet, unabhängig von k ist.	4

1e: Zeigen, dass Punkt S in allen Ebenen der Schar liegt:

Einsetzen der Koordinaten von S(0|0|4) in die Gleichung von
$E_k: 4k \cdot x + 4 \cdot \sqrt{1-k^2} \cdot y + 3 \cdot z = 12$

$4k \cdot 0 + 4 \cdot \sqrt{1-k^2} \cdot 0 + 3 \cdot 4 = 12$ | vereinfachen und zusammenfassen

$3 \cdot 4 = 12$ ist eine wahre Aussage, also ist der Punkt S in allen Ebenen der Schar enthalten.

1f: Nachweisen, dass die Winkelgröße unabhängig von k ist:

Die Größe des Winkels, den die Gerade OS mit den Ebenen E_k bildet, entspricht der Größe des Winkels zwischen dem Vektor $\overrightarrow{OS}$ und dem Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebenen E_k.

Es ist $\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ der Richtungsvektor der Geraden OS, denn diese Gerade verläuft orthogonal zu xy-Ebene. Der Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebenen E_k lässt sich ablesen aus der Ebenengleichung (Koeffizienten von x, y und z): $\vec{n} = \begin{pmatrix} 4k \\ 4 \cdot \sqrt{1-k^2} \\ 3 \end{pmatrix}$.

Für den Schnittwinkel gilt

$$\sin(\varphi) = \left| \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 4k \\ 4 \cdot \sqrt{1-k^2} \\ 3 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 4k \\ 4 \cdot \sqrt{1-k^2} \\ 3 \end{pmatrix} \right|} \right| = \left| \frac{3}{1 \cdot \sqrt{(4k)^2 + (4 \cdot \sqrt{1-k^2})^2 + 3^2}} \right| = \frac{3}{\sqrt{16k^2 + 16 - 16k^2 + 9 \cdot}} = \frac{3}{\sqrt{25}} = \frac{3}{5}$$

Damit ist der Schnittwinkel unabhängig von k.

(Seine Größe ist ca. 36,87°. Diese Größe muss nicht angegeben werden.)

Jede Ebene E_k der Schar schneidet die xy-Ebene in einer Gerade g_k. Mit R_k wird jeweils derjenige Punkt auf g_k bezeichnet, der von O den kleinsten Abstand hat. In Abbildung 2 sind g_k und R_k beispielhaft für eine Ebene E_k der Schar dargestellt.

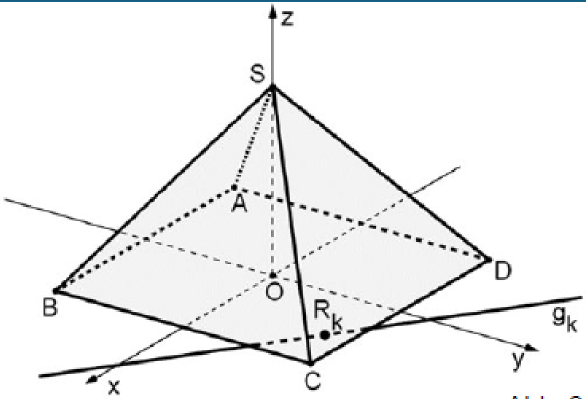


Abb. 2

g Zeichnen Sie die Punkte R_{-1} und R_1 in Abbildung 2 ein. 2

h Durchläuft k alle Werte von –1 bis 1, dann dreht sich die Fläche OR_kS um die Strecke $\overline{OS}$. Dabei entsteht ein Körper. Beschreiben Sie die Form des entstehenden Körpers und bestimmen Sie das Volumen dieses Körpers. 3

25

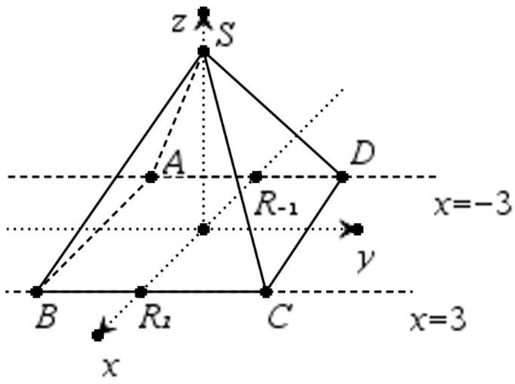
1g: Punkte <u>einzeichnen</u>:

Die Ebenen $E_k: 4k \cdot x + 4 \cdot \sqrt{1-k^2} \cdot y + 3 \cdot z = 12$ schneiden die xy-Ebene in den Geraden g_k für z = 0.
Für die Lage der Punkte R_{-1} und R_1 sind zwei Bedingungen gegeben:

- Sie liegen auf den Geraden g_{-1} bzw. g_1.
- Sie sollen auf diesen Geraden diejenigen Punkte sein, die minimalen Abstand zum Ursprung haben.

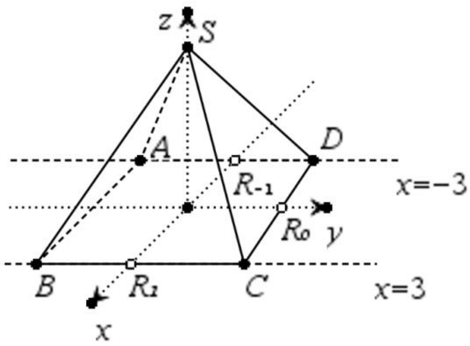
Die Schnittgeraden haben deshalb die Gleichungen $g_k: 4k \cdot x + 4 \cdot \sqrt{1-k^2} \cdot y = 12$.
Nach Division durch 4 gilt $g_k: k \cdot x + \sqrt{1-k^2} \cdot y = 3$.
Für k = –1 erhält man daraus $g_{-1}: x = -3$. Diese Gerade verläuft im Abstand 3 parallel zur y-Achse in der xy-Ebene u. a. durch den Punkt$R_{-1}(-3|0|0)$. Dort wird der kleinste Abstand der Geraden g_{-1} zum Ursprung angenommen.

Für k = 1 erhält man daraus $g_1: x = 3$. Diese Gerade verläuft im Abstand 3 parallel zur y-Achse in der xy-Ebene durch den Punkt $R_1(3|0|0)$. Dort wird der kleinste Abstand der Geraden g_1 zum Ursprung angenommen.



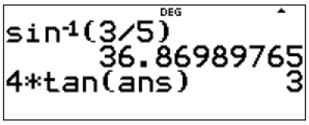
1h: Form des Körpers <u>beschreiben</u> und sein Volumen <u>bestimmen</u>:

Die Schnittgeraden haben die Gleichungen $g_k\colon k \cdot x + \sqrt{1-k^2} \cdot y = 3$
(siehe Teilaufgabe g).
Für k = 0 lautet die Gleichung der Schnittgeraden y = 3. Der Punkt $R_0(0|3|0)$ ist dann der Punkt auf g_0 mit dem kleinsten Abstand zum Ursprung.



Durchläuft k alle Werte von k = –1 bis k = 1, dann liegen die Punkte R_k unter der Annahme, dass der kleinste Abstand der Punkte R_k vom Ursprung immer 3 LE beträgt, auf einem Halbkreis mit dem Mittelpunkt O und dem Radius r = 3 in der xy-Ebene.

Diese Annahme ist gerechtfertigt, weil der Winkel, den eine Ebene E_k mit der Geraden OS bildet, nach Teilaufgabe 1f unabhängig von k ist (rund 36,87°). Da die Strecke $\overline{OS}$ eine Länge von 4 LE hat, besitzt das Dreieck OR_kS eine Kathete $\overline{OR_k}$ mit der Länge 3 LE: $\tan(36{,}87°) = \frac{|\overline{OR_k}|}{4} \Longrightarrow |\overline{OR_k}| = 3$.



Die Fläche OR_kS ist ein rechtwinkliges Dreieck, dass bei Drehung um die Strecke $\overline{OS}$ einen „halben" Drehkegel beschreibt, wenn k alle reellen Werte von –1 bis 1 durchläuft.

Der Operator „Beschreiben" verlangt keine Begründung, deshalb ist als Lösung z. B. der folgende Satz ausreichend:

„Der Körper hat die Form eines senkrecht zur Grundfläche halbierten Kegels."

Die Bestimmung seines Volumens kann mit der Größe r = 3 LE vom Radius r und der Höhe h = 4 LE erfolgen:

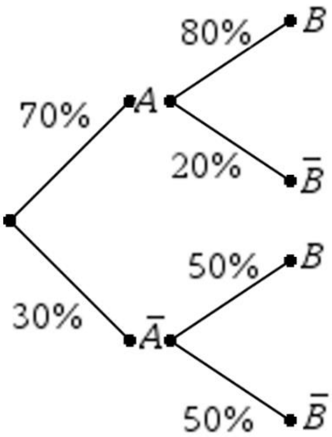
$V = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (3\,LE)^2 \cdot (4\,LE) = 6\pi\,VE.$

	BE
Ein bekannter Video-Streamingdienst bietet einen kostenpflichtigen Zugang zu Spielfilmen und Serien an. Personen, die davon gegen Zahlung einer monatlichen Gebühr Gebrauch machen, werden im Folgenden als Abonnenten bezeichnet. Sie haben sich entweder für das Spielfilmpaket oder für das Komplettpaket entschieden, das neben den Spielfilmen auch noch Serien enthält.	
1 Unter den Abonnenten sind 70 % höchstens 40 Jahre alt. Von diesen haben 80 % das Komplettpaket gewählt. Unter denjenigen Abonnenten, die älter als 40 Jahre sind, haben sich 50 % für das Komplettpaket entschieden.	
a Stellen Sie den Sachverhalt in einem beschrifteten Baumdiagramm dar.	3
b Eine unter allen Abonnenten zufällig ausgewählte Person hat sich für das Komplettpaket entschieden. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie höchstens 40 Jahre alt ist.	3
c Bestimmen Sie die Anzahl der Abonnenten, die man mindestens zufällig auswählen müsste, damit unter ihnen mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99 % mehr als fünf Personen älter als 40 Jahre sind.	4

1a: Sachverhalt im beschrifteten Baumdiagramm <u>darstellen</u>:

A: „Ein Abonnent ist höchstens 40 Jahre alt."

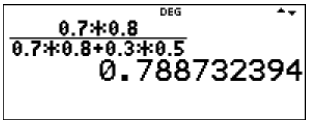
B: „Ein Abonnent hat das Komplettpaket."



1b: Wahrscheinlichkeit <u>bestimmen</u>:

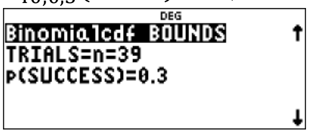
Es handelt sich um eine bedingte Wahrscheinlichkeit.

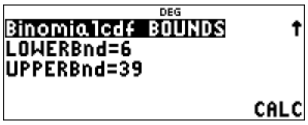
$P_B(A) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}7\cdot 0{,}8}{0{,}7\cdot 0{,}8+0{,}3\cdot 0{,}5} \approx 0{,}79$

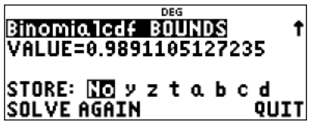


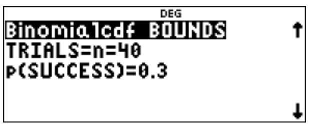
1c: Anzahl von Abonnenten <u>bestimmen</u>:

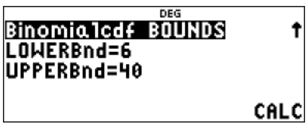
Es sei die Zufallsgröße X: „Anzahl der Abonnenten, die älter als 40 Jahre sind."
X ist binomialverteilt mit p = 0,3. Es ist die Zahl n zu bestimmen, so dass
$P(X > 5) \geq 0{,}99$ gilt.
Man kann systematisch Probieren und erhält als Ergebnis, dass mindestens
40 Personen zufällig ausgewählt werden müssen, denn $P_{39;0,3}(X > 5) < 0{,}99$ und
$P_{40;0,3}(X > 5) > 0{,}99$:

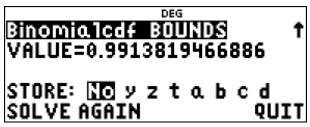






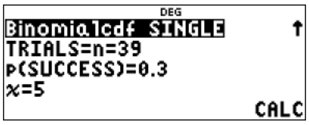


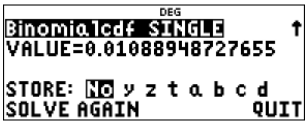


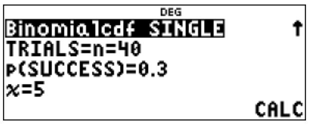


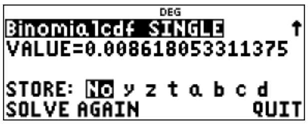
Alternative Nutzung des TI-30X Prio MathPrint:

Statt $P(X > 5) \geq 0{,}99$ wird $P(X \leq 5) \geq 0{,}01$ betrachtet. Durch systematisches Probieren wird für p = 0,3 eine möglichst kleine natürliche Zahl n für den Stichprobenumfang gesucht, so dass $P(X \leq 5) \geq 0{,}01$ gilt. In dieser Form kann der WTR mit Binomialcdf SINGLE verwendet werden. Das ist etwas weniger aufwendig als die Nutzung von Binomialcdf BOUNDS:









Man muss mindestens 40 Personen zufällig auswählen.

2 Der Anteil der zufriedenen Abonnenten von derzeit 60 % soll gesteigert werden. Dazu wird ein Algorithmus entwickelt, der jedem Abonnenten täglich individuell einen Spielfilm vorschlägt. Als Basis für die Entscheidung über den dauerhaften Einsatz des Algorithmus plant das Management einen Probebetrieb. Im Anschluss soll die	
Nullhypothese „Der Anteil der zufriedenen Abonnenten beträgt höchstens 60 %.“ mithilfe einer Stichprobe von 200 zufällig ausgewählten Abonnenten auf einem Signifikanzniveau von 5 % getestet werden.	
a Geben Sie an, welche Überlegung des Managements zur Wahl dieser Nullhypothese geführt haben könnte.	2
Für den beschriebenen Test ergibt sich $\{132;133;\ldots;200\}$ als der Ablehnungsbereich der Nullhypothese.	
b Zur Bestimmung der unteren Grenze dieses Ablehnungsbereichs wurden zunächst folgende Lösungsschritte ausgeführt: ♦ Y: Anzahl der zufriedenen Abonnenten in der Stichprobe ♦ $P_{0,6}^{200}(Y \geq 132) \approx 0{,}047$ Begründen Sie, dass die beiden Lösungsschritte zur Bestimmung der unteren Grenze nicht ausreichend sind, und ergänzen Sie diese geeignet.	4
c Weisen Sie nach, dass die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler zweiter Art bei diesem Ablehnungsbereich der Nullhypothese mehr als 90 % betragen könnte.	4

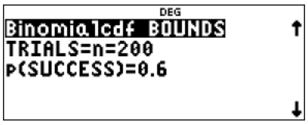
2a: <u>Angeben</u>, welche Überlegung zur Wahl der Nullhypothese geführt hat:

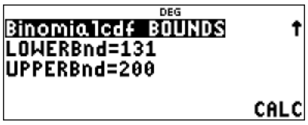
Es soll möglichst vermieden werden, den Algorithmus dauerhaft einzusetzen, obwohl der Einsatz des Algorithmus die Zufriedenheit unter den Abonnenten nicht erhöht.

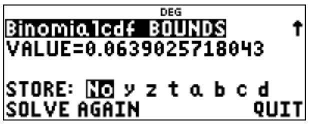
2b: <u>Begründen</u>, warum die Lösungsschritte nicht ausreichend sind und <u>ergänzen</u>:

Es könnte eine natürliche Zahl k existieren, die kleiner als 132 ist, für die die Wahrscheinlichkeit $P(X_{200;0,6} \geq k)$ für den Fehler 1. Art auch kleiner als 5 % ist.

Man prüft dies nach mit der nächstkleineren Zahl k = 131:



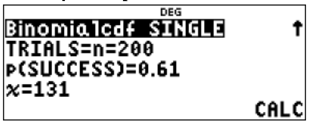


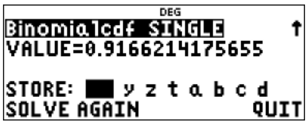


Da die Wahrscheinlichkeit $P_{200;0,6}(X \geq 131) \approx 0{,}064$ größer als 5 % ist, bleibt es bei dem Ablehnungsbereich $\{132, 133, \ldots, 200\}$.

2c: <u>Nachweisen</u>, dass die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art größer als 90 % sein kann:

Man muss eine Wahrscheinlichkeit $p > 0{,}60$ finden, für die $P_{200;p}(X \leq 131) > 0{,}90$ gilt.
Beispiel: $p = 0{,}61$





Beträgt der Anteil zufriedener Abonnenten z. B. 61 %, dann trifft die Nullhypothese nicht zu und die Wahrscheinlichkeit für den zugehörigen Fehler 2. Art beträgt rund 91,7 %.

3 Zur Anmeldung auf der Webseite des Streamingdiensts ist ein persönliches Kennwort erforderlich. Für das Kennwort können 80 verschiedene Zeichen verwendet werden: je 26 Groß- und Kleinbuchstaben, 10 Ziffern sowie 18 Sonderzeichen.

a Einige Abonnenten verwenden ein Kennwort, das genau acht Zeichen lang ist und nur aus Kleinbuchstaben besteht. Dabei können Zeichen mehrfach vorkommen. Zeigen Sie, dass für diese Abonnenten weniger als ein Tausendstel aller möglichen Kennwörter infrage kommen, die aus genau acht Zeichen bestehen. — 2

b Niclas beschließt ein Kennwort zu wählen, das die beiden folgenden Bedingungen erfüllt: — 3

- Es besteht aus genau acht Zeichen, die untereinander verschieden sind.
- Die Buchstaben seines Namens sind in der korrekten Reihenfolge und unter Berücksichtigung der Groß- und Kleinschreibung enthalten.

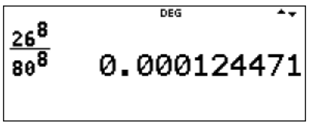
Damit sind beispielsweise *Nic4+las* oder *nNicl*as* mögliche Kennwörter. Bestimmen Sie die Anzahl aller derartigen Kennwörter.

25

3a: <u>Zeigen</u>, dass weniger als ein Tausendstel in Frage kommen:

Anzahl aller Auswahlmöglichkeiten: Für jede der acht Stellen kann eines aus 80 Zeichen ausgewählt werden: $\underbrace{80 \cdot 80 \cdot \ldots \cdot 80}_{acht\ Faktoren} = 80^8$

Anzahl aller günstigen Auswahlmöglichkeiten: Für jede der acht Stellen kann aus 26 Kleinbuchstaben einer gewählt werden: $\underbrace{26 \cdot 26 \cdot \ldots \cdot 26}_{acht\ Faktoren} = 26^8$

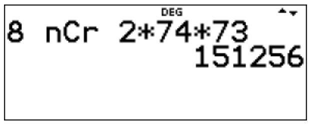


Wahrscheinlichkeit: $\frac{26^8}{80^8} \approx 0{,}00012 < \frac{1}{1\,000}$

3b: Anzahl möglicher Kennwörter <u>bestimmen</u>:

Das Wort „Niclas“ hat sechs verschiedene Buchstaben. Da sich diese nicht noch einmal unter den benutzten Zeichen befinden dürfen, bleiben für die restlichen zwei der insgesamt acht Stellen noch $74 \cdot 73$ Auswahlmöglichkeiten.

Die Buchstaben des Namens von Niclas sollen in der korrekten Reihenfolge, aber - wie sich den Beispielen entnehmen lässt - nicht unbedingt unmittelbar aufeinander folgend, und unter Beachtung der Groß- und Kleinschreibung enthalten sein. Dann gibt es für die verbleibenden zwei Zeichen noch
$\binom{8}{2}$ Möglichkeiten der Verteilung auf die acht Stellen.



Das sind insgesamt $\binom{8}{2} \cdot 74 \cdot 73$ =151256 Möglichkeiten.

	BE
1 Bei einer statistischen Erhebung werden in einer deutschen Großstadt die privaten Haushalte mit mindestens einem Kind im Vorschulalter betrachtet. Diese werden im Folgenden als „junge Haushalte“ bezeichnet. Es wird festgestellt, dass 60 % der jungen Haushalte mit mindestens einem Pkw ausgestattet sind und 8 % der jungen Haushalte mit mindestens einem Lastenrad. In 14 % der jungen Haushalte ohne Pkw ist mindestens ein Lastenrad vorhanden.	
a Stellen Sie den beschriebenen Sachverhalt in einer vollständig ausgefüllten Vierfeldertafel dar.	4
b Beurteilen Sie für diese Großstadt die folgende Aussage: *Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter junger Haushalt mit mindestens einem Lastenrad ausgestattet ist, ist bei einem jungen Haushalt ohne Pkw mehr als dreimal so groß wie bei einem jungen Haushalt mit mindestens einem Pkw.*	3

1a: <u>Darstellen</u> des Sachverhaltes in einer Vierfeldertafel:

A: „Ein junger Haushalt ist mit mindestens einem PKW ausgestattet.“

B: „Ein junger Haushalt ist mit mindestens einem Lastenrad ausgestattet.“

Die in den kleineren Rechtecken gegebenen Wahrscheinlichkeiten (relative Häufigkeiten) lassen sich direkt dem Text entnehmen: $P(A) = 0{,}6$ und $P(B) = 0{,}08$

	B	$\bar{B}$	
A	0,024	0,576	$\boxed{0{,}6}$
$\bar{A}$	$\boxed{0{,}056}$	0,344	0,4
	$\boxed{0{,}08}$	0,92	1

Die Wahrscheinlichkeit in dem größeren Rechteck $\left(P(\bar{A} \cap B)\right)$ folgt aus der Aussage „In 14% der jungen Haushalte ohne PKW ist mindestens ein Lastenrad enthalten.“

Es ist $P(\bar{A} \cap B) = P_{\bar{A}}(B) \cdot P(\bar{A}) = 0{,}14 \cdot 0{,}4 = 0{,}056$.

```
0.14*0.4        0.056
```

1b: Aussage <u>beurteilen</u>:

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter junger Haushalt mit mindestens einem Lastenrad ausgestattet ist, wird einmal bezogen auf die jungen Haushalte ohne PKW und zum anderen auf die jungen Haushalte mit mindestens einem PKW:

$P_{\bar{A}}(B) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(\bar{A})} = \frac{0{,}056}{0{,}4} = 0{,}14$ (Das war auch eine gegebene Größe.)

$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0{,}024}{0{,}6} = 0{,}04$

Außerdem ist $0{,}14 > 3 \cdot 0{,}04 = 0{,}12$

```
0.056/0.4     0.14
0.024/0.6     0.04
3*0.04        0.12
```

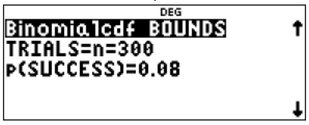
Die Aussage ist wahr.

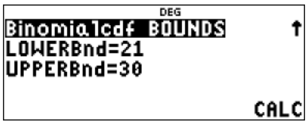
300 junge Haushalte dieser Großstadt werden zufällig ausgewählt.	
c Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mehr als 20 und höchstens 30 dieser Haushalte mit mindestens einem Lastenrad ausgestattet sind.	3
d Geben Sie im Sachzusammenhang ein Ereignis an, dessen Wahrscheinlichkeit mit dem Term $1-\sum_{k=201}^{300}\binom{300}{k}\cdot 0{,}6^{k}\cdot 0{,}4^{300-k}$ berechnet werden kann.	2
e Eine Kita betreut 80 Kinder, von denen zwölf mit dem Lastenrad dorthin gebracht werden. Weisen Sie nach, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich unter zehn zufällig ausgewählten Kindern dieser Kita genau zwei befinden, die mit einem Lastenrad gebracht werden, etwa 29,6 % beträgt.	3

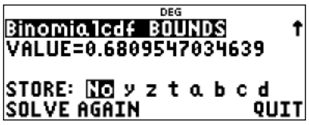
1c: Wahrscheinlichkeit <u>bestimmen</u>:

Die Zufallsgröße X beschreibe die Anzahl der jungen Haushalte, die mit mindestens einem Lastenrad ausgestattet sind. X ist binomialverteilt mit n = 300 und p = 0,08.

Damit ist $P(21 \leq X \leq 30) \approx 0{,}68$.







Die Wahrscheinlichkeit beträgt etwa 68 %.

1d: Ereignis <u>angeben</u>:

Antwort: „Höchstens 200 dieser 300 Haushalte sind mit mindestens einem PKW ausgestattet.“

Begründung (muss nicht aufgeführt werden):
Die Summe $S = \sum_{k=201}^{300}\binom{300}{k}\cdot 0{,}6^{k}\cdot 0{,}4^{300-k}$ gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass mindestens 201 von 300 jungen Haushalten mit mindestens einem PKW ausgestattet sind (Bernoulli-Formel).

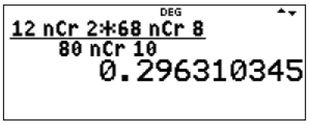
Die Differenz $1 - S$ ist dann die Wahrscheinlichkeit für das Gegenereignis:
„Höchstens 200 dieser 300 Haushalte sind mit mindestens einem PKW ausgestattet.“

1e: <u>Nachweisen</u>, dass die Wahrscheinlichkeit etwa 29,6 % beträgt:

Es liegt eine hypergeometrische Verteilung vor. Man kann die „Lotto-Formel“ verwenden:

In der Sprache des Urnenmodells hat man eine Urne mit 80 Kugeln, von denen 12 schwarz und die anderen weiß sind. Es werden mit einem Griff zehn Kugeln zufällig entnommen und man fragt nach der Wahrscheinlichkeit, dass darunter zwei schwarze Kugeln sind.

$$P(X=2) = \frac{\binom{12}{2}\cdot\binom{68}{8}}{\binom{80}{10}} \approx 0{,}296$$



Damit ist der Nachweis erbracht, denn 0,296 = 29,6 %.

2 Betrachtet werden Vorderrad- und Hinterradreifen für Lastenräder. Auf einem Prüfstand kann die Laufleistung von solchen Reifen gemessen werden. Die Laufleistung gibt die auf dem Prüfstand ermittelte Gesamtstrecke an, bis der Reifen unbrauchbar wird. Die Zufallsgröße V beschreibt die Laufleistung in Kilometern (km) der Vorderradreifen eines bestimmten Herstellers, die Zufallsgröße H der Hinterradreifen desselben Herstellers. V wird als normalverteilt mit dem Erwartungswert 6800 km und der Standardabweichung 530 km angenommen. H wird als normalverteilt mit dem Erwartungswert 4600 km und der Standardabweichung 480 km angenommen.

a Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter Vorderradreifen dieses Herstellers eine Laufleistung hat, die um höchstens 600 km vom Erwartungswert für diese Laufleistung abweicht. 2

b Begründen Sie, dass die folgende Aussage für die Vorderrad- und Hinterradreifen dieses Herstellers wahr ist: 4

Die Laufleistung, die ein zufällig ausgewählter Vorderradreifen gemäß dem Modell mit der Wahrscheinlichkeit von 90 % übertreffen wird, wird ein zufällig ausgewählter Hinterradreifen nahezu mit Sicherheit unterschreiten.

2a: Wahrscheinlichkeit bestimmen, dass die Laufleistung um höchstens 600 km von μ abweicht:

V ist die Zufallsgröße, die die Laufleistung eines Vorderreifens beschreibt.

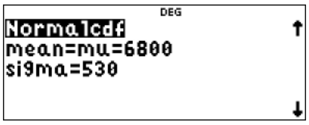
V ist normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 6800\ km$ und der Standardabweichung $\sigma = 530\ km$.

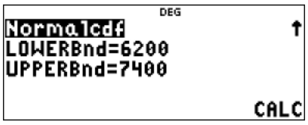
Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit $P(\mu - 600\ km \le V \le \mu + 600\ km)$:

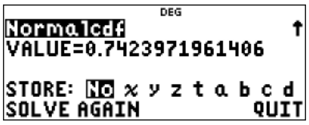
Es ist $\mu - 600\ km = 6800\ km - 600\ km = 6200\ km$ und

$\mu + 600\ km = 6800\ km + 600\ km = 7400\ km$.

Damit gilt $P(6200\ km \le V \le 7400\ km) \approx 0{,}74$





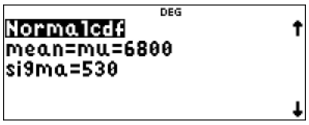


Die Wahrscheinlichkeit beträgt etwa 74 %.

2b: Aussage begründen:

Zunächst muss die Laufleistung ermittelt werden, die die Vorderradreifen mit der Wahrscheinlichkeit von 90 % übertreffen würden.

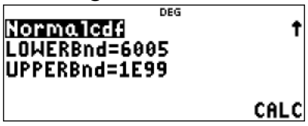
Wir erinnern uns: V ist normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 6800\ km$ und der Standardabweichung $\sigma = 530\ km$.

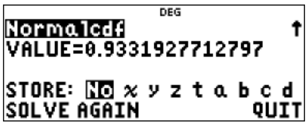


Aus den Sigmaregeln folgt, dass $P(\mu - 1{,}64 \cdot \sigma \le X \le \mu + 1{,}64 \cdot \sigma) \approx 0{,}90$ gilt. In der Nähe von $\mu - 1{,}64 \cdot \sigma \approx 5931$ könnte die gesuchte untere Intervallgrenze g_u liegen, so dass $P(g_u \le X \le \infty) \approx 0{,}9$ ist.

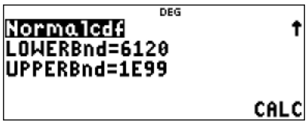
Durch systematisches Probieren wird die untere Grenze so lange verändert, bis ein passender Wert gefunden wird. Die obere Grenze kann bei $+\infty$ liegen.

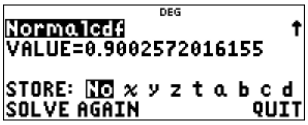
Wir beginnen mit der unteren Grenze in der Nähe von $(6800 - 1{,}5 \cdot 530) = 6005$



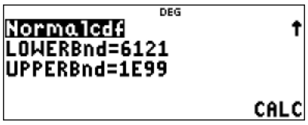


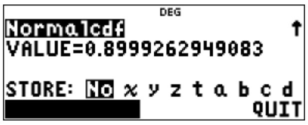
Die Wahrscheinlichkeit, also auch das Berechnungsintervall, ist etwas zu groß. Die untere Grenze wird vergrößert, um das Intervall zu verkleinern.





Immer noch etwas zu groß …





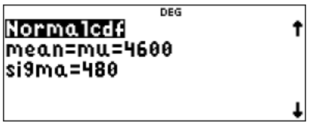
Nun ergibt sich ein etwas zu kleiner Wert.

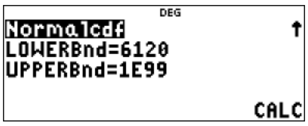
Zwischen 6120 und 6121 muss der passende Wert liegen. Wir verwenden den Näherungswert 6120 für die untere Grenze, es gilt also ungefähr $P(V > 6120) = 0{,}9$.

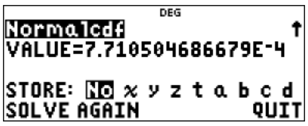
Wir berechnen nun die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Hinterradreifen eine Laufleistung von mindestens 6120 km hat.

Wir erinnern uns: H ist normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 4600\ km$ und der Standardabweichung $\sigma = 480\ km$.

Da die mittlere Laufleistung eines Hinterradreifens sehr viel kleiner ist als die eines Vorderradreifens, lässt sich schon vermuten, dass die gesuchte Wahrscheinlichkeit sehr klein ist. Wir berechnen $P(H > 6120)$:



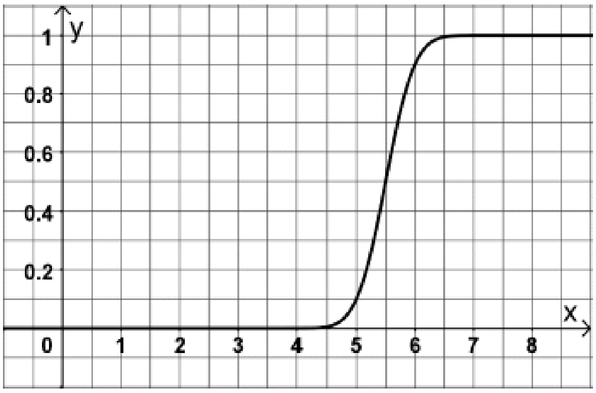




$P(H > 6120) \approx 7{,}7 \cdot 10^{-4} = 0{,}00077$ Ein zufällig ausgewählter Hinterradreifen hat nur mit sehr geringer Wahrscheinlichkeit eine Laufleistung von mindestens 6120 km.

c Die Zufallsgröße Z beschreibt die Laufleistung in km der Hinterradreifen eines anderen Herstellers. Z wird als normalverteilt mit dem Erwartungswert μ_Z und der Standardabweichung σ_Z angenommen. Die Abbildung stellt den Graphen der Funktion f mit $f(x) = P(Z \le 1000 \cdot x)$ dar.

Ermitteln Sie die Werte von μ_Z und σ_Z jeweils in km. 4

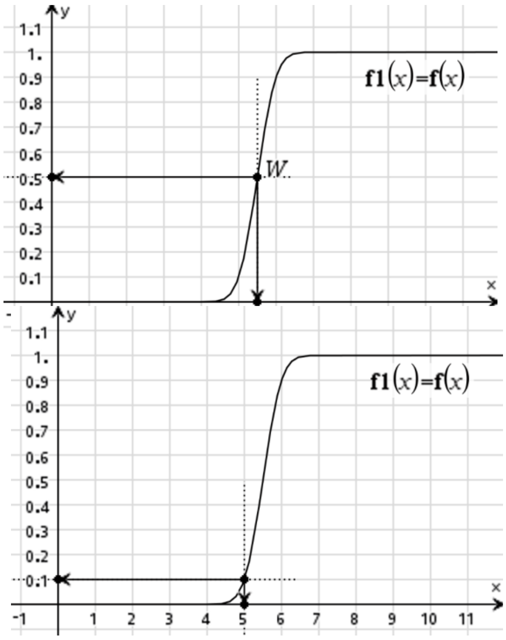


25

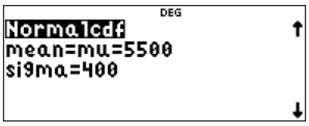
2c:Werte von μ_Z und σ_Z in km <u>ermitteln</u>:

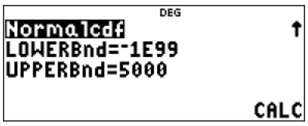
Der Wert von μ_Z kann am Wendepunkt der Summenfunktion abgelesen werden.

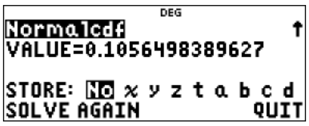
Unter Beachtung des Faktors 1000 ist zu erkennen: $P(Z \le 5500) \approx 0{,}5$, also ist $\mu_Z \approx 5500$ km.



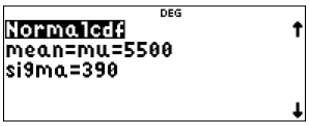
Des Weiteren kann man der Abbildung entnehmen: $P(Z \le 5000) \approx 0{,}1$
Das muss nun auch für die vorliegende Normalverteilung mit der unteren Grenze $-\infty$, der oberen Grenze 5000 und dem Erwartungswert 5500 gelten. Durch systematisches Probieren für die Werte der Standardabweichung erhält man z. B. Folgendes:

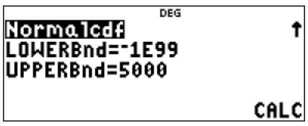


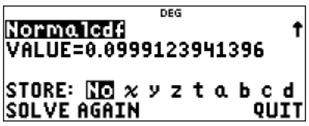




Die Wahrscheinlichkeit ist etwas zu groß. Die Standardabweichung wird verkleinert.







Der Wert 0,0999… liegt nahe genug bei 0,1. Ein Näherungswert für die Standardabweichung liegt nach diesem Verfahren bei etwa 390 km.

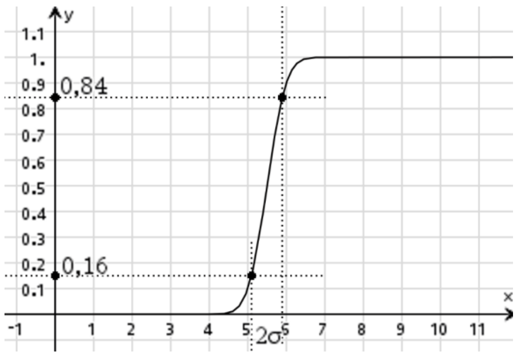
Alternative Lösung:

Durch Nutzung der Ein-Sigma-Regel lässt sich ebenfalls eine Näherungslösung gewinnen.

Für die Ein-Sigma-Regel gilt, dass die Grenzen des Ein-Sigma-Intervalls bei $\mu - \sigma$ bzw. $\mu + \sigma$ liegen. Dabei gilt

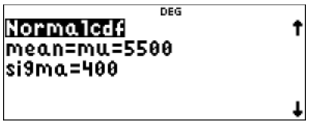
$P(x < \mu - \sigma) \approx 0{,}5 - \frac{0{,}68}{2} = 0{,}5 - 0{,}34 = 0{,}16$ und

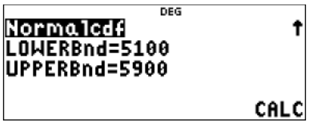
$P(x < \mu + \sigma) \approx 0{,}5 + \frac{0{,}68}{2} = 0{,}5 + 0{,}34 = 0{,}84.$

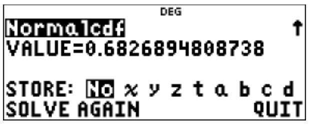


Wir suchen diese beiden Werte auf der y-Achse und zeichnen zwei Parallelen zur x-Achse bis zum Schnitt mit dem Funktionsgraphen. Von den beiden Schnittpunkten werden je eine Senkrechte zur x-Achse gezeichnet. Der Abstand der beiden Schnittpunkte auf der x-Achse ist dann ein Näherungswert für 2σ.

Hier gilt $2\sigma \approx 0{,}8$. Bei Berücksichtigung des Faktors 1000 wäre auf diesem Wege 400 km ein Näherungswert für σ. Bei Kontrolle mit dem Taschenrechner erhält man:







Bekanntlich liegt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine normalverteilte Zufallsgröße Werte aus dem Ein-Sigma-Bereich annimmt, bei rund 68,3%. Dieser Wert wird hier näherungsweise erreicht.

Die beiden hier ermittelten Näherungswerte weichen etwas voneinander ab. Das liegt vor allem daran, dass gerade bei der alternativen Lösung die Koordinaten der verwendeten Punkte nur durch relativ grobe Näherung bestimmt werden können. Dennoch sollte hier nach Meinung des Verfassers auf die Anwendung des Verfahrens nicht verzichtet werden, weil es wesentlich Eigenschaften der Verteilungsfunktion der Normalverteilung deutlich macht.