

Anschauliche Zugänge zur Integralrechnung mit dem Integrator und der TI-Nspire™ CX Technologie

Hans-Jürgen Elschenbroich, Hubert Langlotz, Gertrud Aumayr



VERBAND ZUR FÖRDERUNG
DES MINT-UNTERRICHTS
BUNDESVERBAND



Autoren:
Hans-Jürgen Elschenbroich, Hubert Langlotz, Gertrud Aumayr

Dieses und weiteres Material steht Ihnen zum pdf-Download bereit: www.t3europe.eu sowie unter www.ti-unterrichtsmaterialien.net

Dieses Werk wurde in der Absicht erarbeitet, Lehrerinnen und Lehrern geeignete Materialien für den Unterricht in die Hand zu geben. Die Anfertigung einer notwendigen Anzahl von Fotokopien für den Einsatz in der Klasse, einer Lehrerfortbildung oder einem Seminar ist daher gestattet. Hierbei ist auf das Copyright von T³-Deutschland hinzuweisen. Jede Verwertung in anderen als den genannten oder den gesetzlich zugelassenen Fällen ist ohne schriftliche Genehmigung von T³ nicht zulässig.

Inhaltsverzeichnis

1. Füllvorgänge	4
2. Untersummen, Obersummen, Integral	6
3. Summenfunktionen, Integralfunktion	7
4. Hauptsatz	8
5. Von der Änderung zum Bestand	9
6. Ein Blick zurück und nach vorn	11
Download/Literatur	12

Die digitale Lernumgebung Integrator bietet einen anschaulichen und weitgehend kalkül-freien Zugang zu Grundvorstellungen der Integralrechnung, der Schüleraktivitäten und Verständnisgewinnung in den Vordergrund stellt¹⁾. Es gibt einen direkten Zugang zur Integralfunktion bzw. Integralkurve, indem die rechte Integrationsgrenze dynamisch variiert wird und eine Ortslinie erzeugt wird. Das führt genetisch zur Entdeckung des Hauptsatzes, zur Einsicht in den Zusammenhang zwischen Differenzieren und Integrieren. Die Rechenarbeit für Untersummen, Obersummen, Ortslinien etc. wird dabei von TI-Nspire™ im Hintergrund erledigt. Damit werden Ansätze der Funktionenlupe (Elschenbroich, 2015) auf die Integralrechnung übertragen und erweitert.

Bei der Integralrechnung gibt es zwei typische Ansätze: Entweder klassisch geometrisch als Berechnung von Flächeninhalten zwischen einem Funktionsgraphen und der x-Achse oder anwendungsorientiert als (Re-)Konstruktion, d. h. als Berechnung eines Bestandes bei bekannter Änderungsrate.

1. Füllvorgänge

In beiden Ansätzen ist diese Aufgabe bei konstanten Funktionen $f(t) = c$ einfach zu lösen: Beim geometrischen Ansatz bekommen wir mit der Flächenformel für Rechtecke der Breite b den Term $b \cdot c$.

Untersucht man anwendungsorientiert, wieviel Liter vom Zeitpunkt 0 bis zum Zeitpunkt b in einen Behälter geflossen sind, wenn pro Sekunde c Liter fließen, kommen wir ebenfalls auf $b \cdot c$. Der Vorteil hier ist aber, dass wir in natürlicher Weise auch sofort negative Änderungen thematisieren können.

Als nächstes untersuchen wir, wie sich der Inhalt dynamisch entwickelt, wenn x als rechte Grenze im Intervall $[a; b]$ variabel ist. Damit kommen wir von der Berechnung eines konkreten Wertes zu einer *funktionalen* Sichtweise. Zu x gehört das dunkelblaue Rechteck mit $Inhalt = c \cdot x$ und der Punkt $I = (x, Inhalt)$. Wenn wir den Punkt I eine Geometriespur zeichnen lassen (Abb. 1), erhalten wir eine Serie von Punkten, die offensichtlich auf dem Graphen einer linearen Funktion liegen (Langlotz 2011).

Im Sachzusammenhang kann man hier anschaulich von einer Inhaltsfunktion sprechen und es ist einsichtig, dass die Inhaltsfunktion in diesem Fall eine lineare Funktion mit der Steigung c ist $I(x) = c \cdot x$.

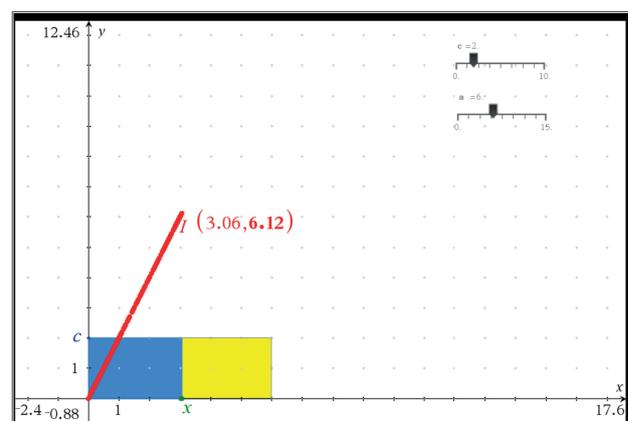


Abb. 1: Rechteck füllen; blau: gefüllte Fläche

1) Dieser Beitrag ist eine Adaption von Elschenbroich (2017) für den TI-Nspire™. Die Lernumgebung Integrator für den TI-Nspire™ wurde von G. Aumayr, H.-J. Elschenbroich und H. Langlotz erstellt

Bei einer stückweise konstanten Funktion erhalten wir dann eine stückweise lineare Inhaltsfunktion, die in natürlicher Weise stetig ist. Als Beispiel nehmen wir eine zunächst leere Wanne, in die 10 min lang 20 Liter/min Wasser hinein läuft, dann passiert für die Dauer von 15 min nichts und schließlich laufen 10 Liter/min ab (Elschenbroich & Seebach, 2018). Den Weg des Punktes $I = (x, \text{Inhalt})$ kann man wieder mit der Geometriesspur sichtbar machen (Abb. 2).

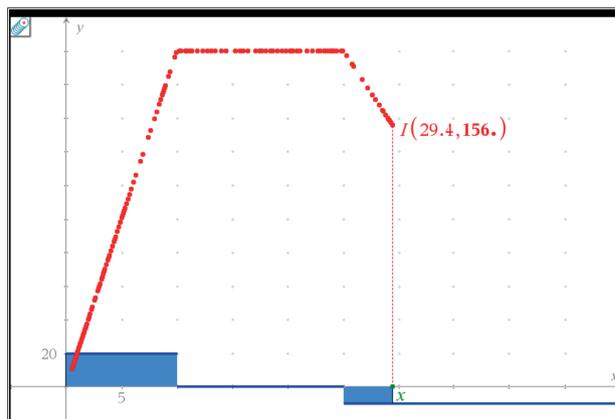


Abb. 2: Zulauf/Ablauf Badewanne

Als nächstes werden wir nun Funktionen untersuchen die nicht mehr (stückweise) konstant sind. Die nächst einfachen Funktionen sind lineare Funktionen; geometrisch geht es dann um das dynamische Füllen von Dreiecken.

Den Flächeninhalt des blau gefärbten Dreiecks können wir mit dem TI-Nspire messen und in die y -Koordinate eines Punktes $I = (x, \text{Inhalt})$ übertragen (Abb. 3). Ziehen wir an x , ändert sich das blaue Dreieck und in der Folge der Punkt I . Wir können wieder I eine Geometriesspur zeichnen lassen oder (wie Abb. 3) eine Ortslinie (Geometrischer Ort). I erzeugt wieder den Graphen einer Inhaltsfunktion, die offensichtlich nicht mehr linear ist, sondern quadratisch zu sein scheint. Elementargeometrisch sieht man, dass $I(x) = \frac{1}{2}x^2$ ist.

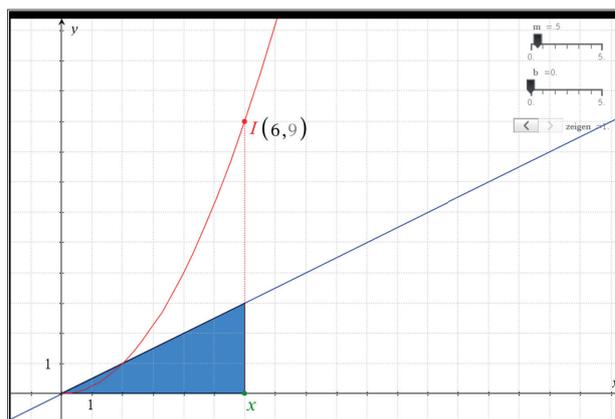


Abb. 3: Dreieck füllen

2. Untersummen, Obersummen, Integral

Der elementargeometrische Ansatz trägt aber nicht mehr für kompliziertere Randfunktionen, weil wir dafür auf Schulniveau keine Flächenformeln haben. Beliebige (hier ausschließlich stetige) Funktionen, z. B. $f(t) = 0.5 t^2 + 1$, kann man aber in üblicher Weise durch stückweise konstante Funktionen ersetzen und diesen Ersetzungsprozess weiter verfeinern. Wir beschränken uns hier für den Zugang im schulischen Rahmen auf stetige Funktionen f und äquidistante Unterteilungen des Intervalls $[a; b]$. Damit betrachten wir mathematisch Unter- und Obersummen, in der unterrichtlichen Praxis meist Links- und Rechtssummen²⁾ auf monotonen Teilbereichen.

Die Lernumgebung **Integrator** (Elschenbroich, 2016, www.integrator-online.de) ermöglicht es, zu einer beliebigen Funktion f mit einem Schieberegler für die Variable n zunächst über einem Intervall $[a; b]$ die Linkssumme L_n und die Rechtssumme R_n für n äquidistante Unterteilungen zu berechnen (n kann dabei groß werden, bleibt aber endlich). Ohne weiteren Rechenaufwand auf Benutzerebene kann man n am Schieberegler variieren und die Auswirkungen auf L_n und R_n beobachten und natürlich auch a , b , und f ändern (Abb. 4).

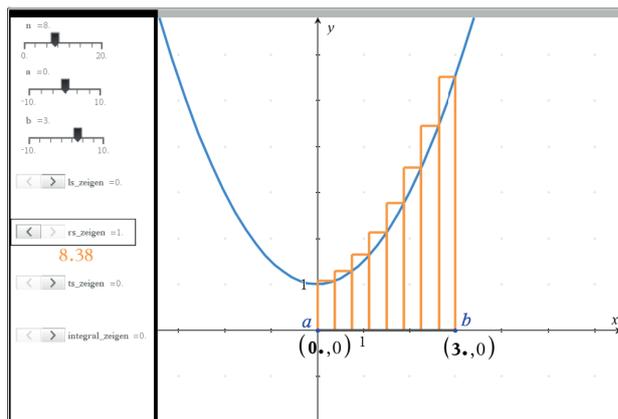


Abb. 4: Linkssumme und Rechtssumme; hier Rechtssumme R_6 sichtbar

Dies entspricht dem standardmäßigen schulischen Ansatz und bietet in der digitalen Lernumgebung den Vorteil, für größere n oder für andere a und b nicht jedesmal alles neu berechnen zu müssen, sondern einfach den TI-Nspire™ als ‚Rechenknecht‘ nutzen zu können³⁾. Für sehr große n erlebt man anschaulich, wie sich die Werte von U_n und O_n immer mehr annähern.

- 2) Zur Entwicklung des Integralbegriffs ist es mathematisch üblich, nach Darboux die n -ten *Untersummen* und *Obersummen* zu betrachten, um eine Einschachtelung zu erreichen. Der TI-Nspire™ stellt uns Linkssummen und Rechtssummen als Tool zur Verfügung, was bei stetigen Funktionen zum selben Ergebnis führt und auch dem entspricht, was man in der Schule meist ‚per Hand‘ rechnet.
- 3) Dabei ist aber bei aller Beschleunigung durch mächtige Tools zwischendurch auch auf eine Entschleunigung, auf ein Innehalten und Vertiefen zu achten, indem bei geeigneten Funktionen f und kleinen n die entsprechenden Berechnungen für L_n und R_n von den Schülern mit dem Taschenrechner selber durchgeführt werden.

3. Summenfunktionen, Integralfunktion

Der entscheidende Schritt kommt nun, indem wir die rechte Grenze x wieder im Intervall $[a; b]$ variabel ansetzen. So ist es möglich, über $[a; x]$ mit $x \in [a; b]$ die Werte von U_n und O_n zu berechnen und als y -Koordinate in passende Punkte $U_n = (x; _)$ und $O_n = (x; _)$ zu exportieren. Wir erhalten aus diesen Punkten dann als Ortslinien die Graphen der Linkssummenfunktion und Rechtssummenfunktion und erleben, wie diese für immer größere n schließlich auf Bildschirmenebene anschaulich zusammenfallen (Abb. 5a, b). Dies führt uns dann genetisch und graphisch zur Integralfunktion, die für jedes n von der entsprechenden Linkssummenfunktion und Rechtssummenfunktion eingeschachtelt wird.

Es soll nicht verschwiegen werden: Linkssummenfunktion und Rechtssummenfunktion sind begrifflich nicht ganz trivial! Sie hängen neben $f(t)$ offensichtlich vom Parameter a ab. Darüber hinaus spielt auch der Wert von n eine wichtige Rolle bei der sukzessiven Annäherung an die Integralfunktion. Wenn man aus Zeitgründen oder Komplexitätsgründen nur einen direkten Zugang zur Integralfunktion haben möchte, kann man auch sofort den Wert des Integrals von f auf $[a; x]$ in die y -Koordinate eines Punktes $I = (x; _)$ exportieren und das Verhalten dieses Punktes untersuchen. Insbesondere kann man dessen Ortslinie noch so konstruieren, dass sie nicht global, sondern nur dynamisch bis zur jeweiligen Stelle x gezeichnet wird (Abb. 6). Damit erhalten wir einen digitalen Integraphen, der graphisch die Integralfunktion zu einem gegebenen Funktionsgraphen zeichnet (Elschenbroich, 2016).

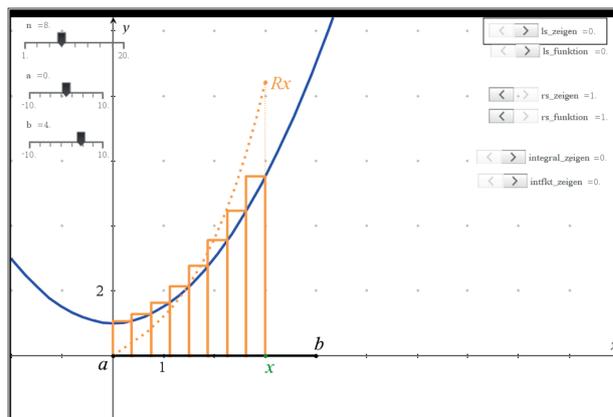


Abb. 5a: Rechtssummenfunktion

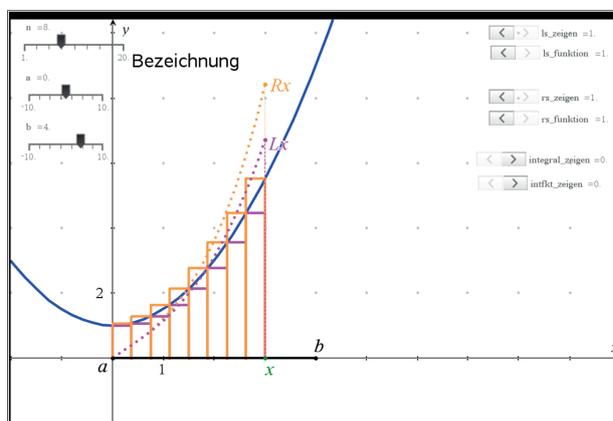


Abb. 5b: Linkssummenfunktion und Rechtssummenfunktion als Ortslinie von L_x bzw. R_x

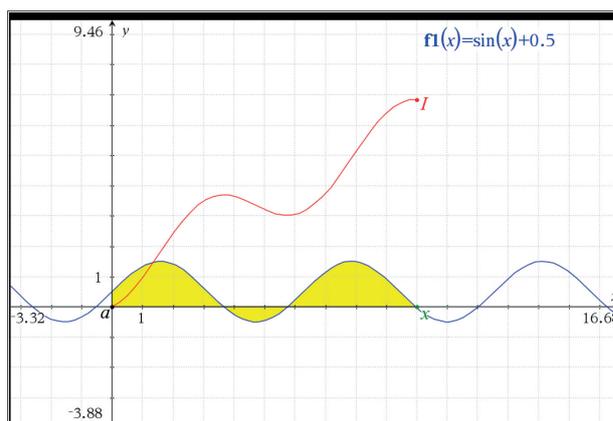


Abb. 6: Integralfunktion, Integraph

4. Hauptsatz

Die Integralfunktion bietet in der dynamischen Integrator-Umgebung die Möglichkeit, die Steigung der Integralfunktion im Punkt I, d. h. an der Stelle x , und den Zusammenhang mit der Ausgangsfunktion f zu untersuchen (Abb. 7). Dabei kann man entdecken, dass die Steigung der Integralfunktion stets genauso groß ist wie der Wert von $f(x)$ (Blum, Elschenbroich & Krimmel, 2016). Natürlich ist das kein formaler Beweis, hier steht das Erleben, das Entdecken dieses Sachverhalts im Vordergrund. Dies bereitet aber den klassischen Beweis vor.

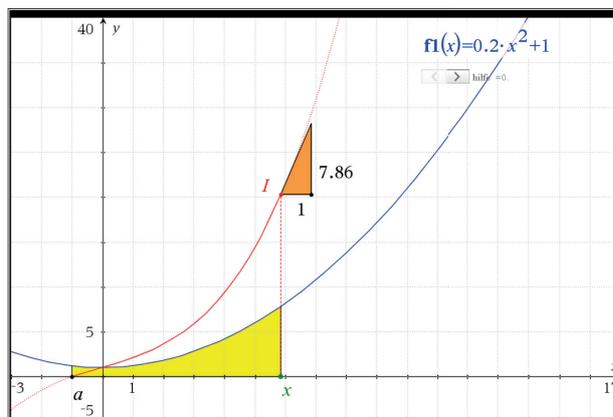


Abb. 7: Den Hauptsatz entdecken

Wir kommen hiermit zur (unserer Ansicht nach klassischen) Formulierung des Hauptsatzes, dass bei einer stetigen Funktion f die Integralfunktion differenzierbar ist und ihre Ableitung gleich f ist. Anders gesagt, die Integralfunktion ist auch eine Stammfunktion von f , die Integration ist die Umkehrung der Differentiation. Bis dahin war von einer Stammfunktion F noch keine Rede, die kommt erst jetzt ins Spiel (!) und ermöglicht, mittels der Integralformel $F(b) - F(a)$ eine einfachere Berechnung von Integralen, da man damit die Kenntnisse aus der Differentialrechnung ausnutzen kann.

Dass nicht für jede integrierbare Funktion f die Integralfunktion ableitbar ist, sieht man mit dem Integrator unmittelbar, wenn man die Integralfunktion von f an Stellen betrachtet, wo f unstetig ist (Abb. 8): Hier hat die Integralfunktion einen ‚Knick‘ im Graphen. Zieht man dann den Punkt P so, dass die Sprungstelle von f nicht mehr existiert, so sieht man anschaulich, wie sich der Graph der Integralfunktion ‚glättet‘ und schließlich (auf Bildschirmgenauigkeit) ohne ‚Knick‘ verläuft. Auch unstetige Funktionen mit Sprungstellen haben eine Integralfunktion, aber diese ist an den Sprungstellen von f nicht differenzierbar! So wird anschaulich klar, dass f auf dem Intervall $[a, b]$ stetig sein muss, damit man die Integralfunktion differenzierbar ist.

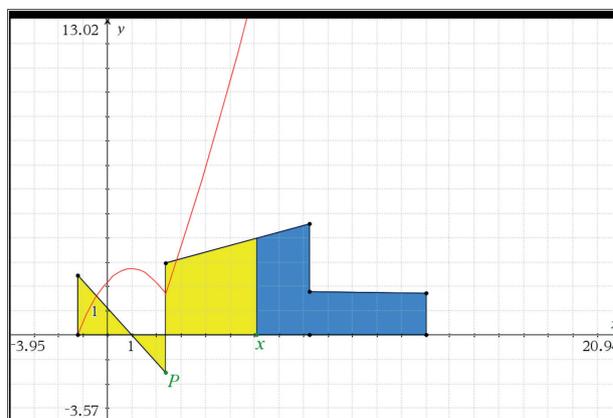


Abb. 8: (Un-)Stetigkeit von f und (Nicht-)Differenzierbarkeit der Integralfunktion (rot)

5. Von der Änderung zum Bestand

Die Integralfunktion – und insbesondere der kalkülfreie graphische Zugang – ermöglicht es uns, typische Anwendungen der Integralrechnung zu verstehen und zu visualisieren, wo aus bekannten Änderungen und einem Startwert der Bestand dynamisch aufgebaut werden kann.

Ein in letzter Zeit bekannt gewordenes Beispiel ist der **Freifallturm** (Schmidt 2015, Blum, Elschenbroich & Krimmel 2016). In Bottrop steht der Freifallturm „The High Fall“ im Movie Park Germany. Zunächst geht es da mit einer Geschwindigkeit von 1,3 m/s in die Höhe. Das dauert 45 Sekunden. Dann bleibt die Gondel für 10 Sekunden oben stehen und wird anschließend ausgeklinkt. Sie fällt (auf Schienen geführt) 2,5 s lang in freiem Fall nach unten. Danach wird sie durch ein magnetisches Bremssystem abgebremst, das eine konstant ansteigende Bremskraft hat. Nach 59,2 s ist die Fahrt zu Ende. Die Gondel ist dann wenige Zentimeter über dem Boden und wird schließlich sanft abgesenkt. Aus diesen Informationen kann man die zusammengesetzte Geschwindigkeitsfunktion g aufstellen. Die Integralfunktion beschreibt dann, wie sich die Gondel aufwärts und abwärts bewegt (Abb. 9).

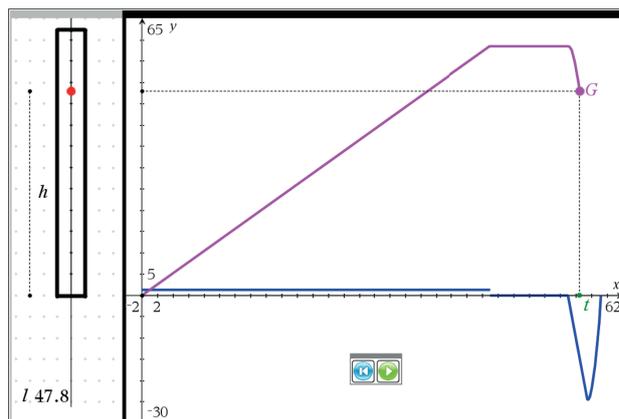


Abb. 9: Freifallturm; blau: Zeit-Geschwindigkeitsgraph, Magenta: Zeit-Weg-Graph der Gondel als Ortslinie, grün: Zeit t

In einer weiteren Anwendung kann man z. B. den Prozess der alkoholischen **Gärung** untersuchen. Aus Traubenmost entsteht bekanntlich durch Gärung Wein. Nach 10 Tagen wird hier die Gärung beendet, um noch eine Restsüße zu behalten. Während der Gärung wird ständig CO_2 erzeugt. Diesen CO_2 Ausstoß kann man messen. Er wird modellhaft in Liter pro Liter Most durch den blauen Graphen der Funktion f dargestellt (hier ein Polynom dritten Grades). Damit können wir im Modell berechnen, wieviel CO_2 denn insgesamt in x Tagen an die Umwelt abgegeben worden ist (Abb. 10).

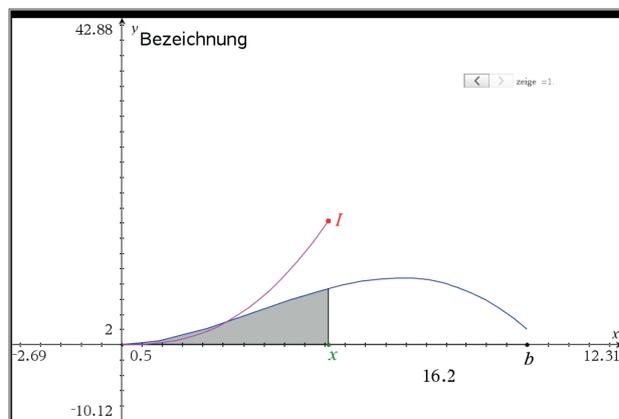


Abb. 10: Alkoholische Gärung; blau: momentaner CO_2 Ausstoß, magenta: erzeugtes CO_2 Volumen

Bei einer Solaranlage wird in einem Diagramm protokolliert, welche Leistung (in Kilowatt kW) die Anlage im Laufe eines Tages zu welchem Zeitpunkt geliefert hat (die Randkurve der hellgrünen Fläche). Um diese Kurve, für die kein Funktionsterm bekannt ist, einer mathematischen Untersuchung zugänglich zu machen, wurde zu sieben ausgewählten Punkten auf der Kurve mittels einer Regression 4. Grades eine Funktion f konstruiert, deren Graph die gegebene Kurve näherungsweise ‚nachzeichnet‘, also die Stromproduktion modelliert. Für $a = x(P_1)$ liefert $i = \int_a^x f(t) dt$ die bis zum Zeitpunkt x an dem Tag erzeugte ‚Strommenge‘ (umgangssprachlich, physikalisch korrekter: elektrische Energie in kWh). Mit dem Punkt $I = (x, i)$ kann dann die Integralkurve als Ortslinie erzeugt werden.

Zunächst sind die Punkte P_1 bis P_7 äquidistant. Die Modellierung ist damit offensichtlich noch nicht gut angepasst. Durch geschicktes Ziehen an den Punkten kann man die graphische Anpassung an den Verlauf der blauen Randkurve noch verbessern (die Regressionskurve wird durch die Punkte beeinflusst, verläuft aber meist nicht genau durch diese Punkte). Die Auswirkung auf die in der Modellierung berechnete Strommenge ist auch nicht gravierend, weil sich Abweichungen nach oben und unten gegenseitig neutralisiert hatten.

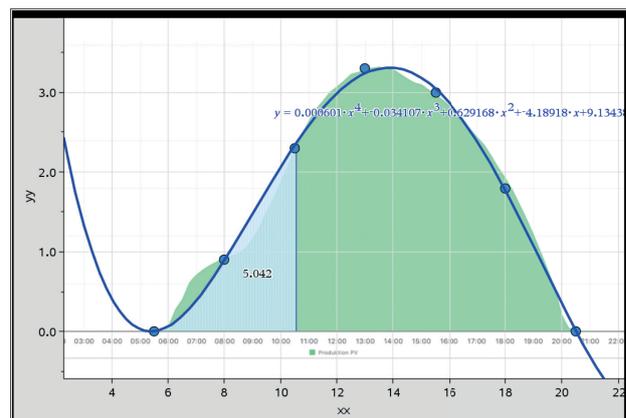


Abb. 11: Solarstrom

6. Ein Blick zurück und nach vorn

Als schulisches Thema hat die Differenzial- und Integralrechnung und die Behandlung von Funktionen überhaupt eine sehr kurze Historie. Erst Anfang des 20. Jahrhunderts wurde in der Meraner Reform überhaupt in Erwägung gezogen, das heute Analysis genannte Themengebiet in die Schule zu bringen (was damals eine umwälzende Neuerung war). Selbst nach dem 2. Weltkrieg hieß es noch: »Es besteht ja kein Zweifel darüber, dass die Technik des Integrierens nicht zu den Lehraufgaben der höheren Schule gehört, dagegen darf man wohl von einem zur Hochschule gehenden jungen Menschen erwarten, dass er den Sinn des Integralzeichens wirklich begriffen hat.« (Kraft, 1948, S. 13)

Bei der Funktionenlupe und dem Integrator liegt der Fokus heute deutlich auf der Entwicklung von Verständnis, dem Aufbau von Grundvorstellungen. Die Anschaulichkeit und Kalkülfreiheit dieses Ansatzes soll nicht als Feldzug gegen den gängigen Analysis-Kalkül missverstanden werden, es soll vielmehr dem Kalkül eine anschauliche Basis gegeben werden. Es ist auch nicht intendiert, dass die Schüler keinerlei eigene Berechnungen mehr machen sollen (im Gegenteil, das gehört in Maßen zur nötigen Entschleunigung). Ein Rückgang des Kalkülanteils und eine Beschränkung auf Exemplarisches ist aber schon seit Jahrzehnten kontinuierlich zu beobachten und wird sich vermutlich auch fortsetzen. Immer wieder wird, auch durch die Verfügbarkeit von CAS, die Frage neu zu beantworten sein: Wieviel und welche Ableitungs- und Integrationsregeln sollen neben dem Grundverständnis von Ableitung und Integral und dem Hauptsatz gelehrt, gelernt und geübt werden? Wann und in welchen Fällen wollen wir ein CAS zulassen, das uns zu einer gegebenen Funktion f einfach die Ableitung oder die Integralfunktion ausgibt? Auf diese Fragen wird es keine Antwort von Ewigkeitwert geben, sie müssen immer wieder aktuell neu beantwortet werden.

Download

Auf der TI Materialdatenbank finden Sie das Heft, plus tns-Dateien, sowie zahlreiche weitere Unterrichtsmaterialien zum Herunterladen: www.ti-unterrichtsmaterialien.net.

Oder gehen Sie auf www.t3europe.eu. Unter der Rubrik „Resources“ gibt es auch unzählige fremdsprachige Materialien.

Literatur

Blum, W., Elschenbroich, H.-J. & Krimmel, K. (2016):

Das Integral wirklich verstehen.

In: mathematik lehren, 199, S. 37–42.

Elschenbroich, H.-J. (2017):

Anschauliche Zugänge zur Integralrechnung mit dem Integrator.

In MNU 5/2017, S. 312 – 317

Elschenbroich, H.-J. (2016).

Anschauliche Zugänge zur Analysis mit alten und neuen Werkzeugen.

In: Der Mathematikunterricht, 1/2016, S. 26–34.

Elschenbroich, H.-J. (2015):

Die Funktionenlupe mit TI-Nspire™.

In: TI-Nachrichten 2/15. S. 5 - 7

Elschenbroich, H.-J. & Seebach, G. (2018):

Funktionen erkunden.

In: mathematik lehren, Friedrich Verlag

Langlotz, H. (2011):

Von Flächen und Füllhöhen

In: Schmidt, U. & Pallack, A. (Hrsg.) Integralrechnung mit neuen Medien verstehensorientiert unterrichten. T3-Akzente. S. 33 – 37

Schmidt, U. (2015):

Von der Änderungsrate zum Bestand.

In W. Blum, S. Vogel, C. Drüke-Noe, A. Roppelt (Hrsg.), Bildungsstandards aktuell: Mathematik in der Sekundarstufe II (S. 239-240). Braunschweig: Bildungshaus Schulbuchverlage.



www.t3europe.eu

education.ti.com



Teachers Teaching with Technology™

