

Ziele

- Kräfteparallelogramm in einem Seil bei der Belastung durch eine Seiltänzerin darstellen
- Kurve, welche die Füße der Seiltänzerin durchschreiten, darstellen. Dies kann als Einführung für die Ellipsengleichung verwendet werden.
- Umgang mit geometrischen Konstruktionen üben, insbesondere Ortslinien.

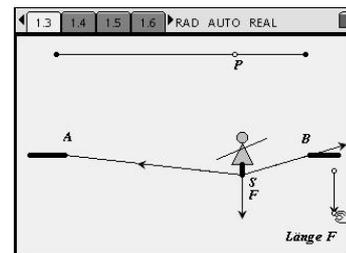
Voraussetzungen

Schülerinnen und Schüler

- haben Grundkenntnisse in der Handhabung der Geometrieumgebung von TI-*n*spire
- kennen die Zerlegung eines Vektors in zwei Richtungen (Vektorparallelogramm)

Aufgabe

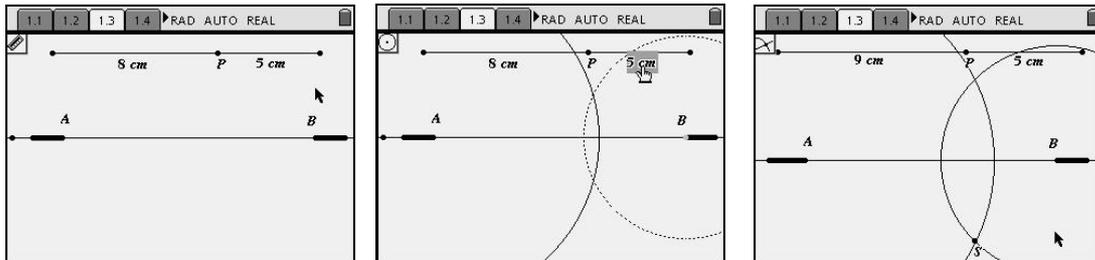
Eine Seiltänzerin bewegt sich auf einem Seil von vorgegebener Länge (als Strecke dargestellt, siehe Bild rechts oben). Der Punkt P unterteilt das Seil in 2 Stücke. P definiert den Standort S der Seiltänzerin. Die Seilenden sind an den Punkten A und B der beiden Plattformen befestigt.



- Konstruiere den Punkt S auf dem Seil, bei dem sich die Seiltänzerin befindet (das Seil muss länger als die Strecke \overline{AB} sein). Messe dazu die Längen der beiden Seilstücke. Zeichne zwei Kreise mit den Mittelpunkten A und B und diesen Längen als Radien (Wahl der Radien durch Anklicken der Masse). Der untere Schnittpunkt ist S. Zeichne die Seilstücke \overline{AS} und \overline{SB} . Stelle die beiden Kreise unsichtbar dar.
- Bewege den Punkt P und beobachte den Weg der Seiltänzerin (Punkt S). Was fällt auf? Beschreibe die Kurve durch eine Ortslinie. Verändere die Seillänge und beschreibe die Veränderung der Kurve. Warum ist Seiltanzen auf einem Seil fester Länge (ohne zusätzliche Spannung) extrem schwierig?
- Zeichne eine Vertikale durch S (senkrecht zur Startrampe). Trage darauf einen Vektor beliebiger Länge ab, Endpunkt F. \overrightarrow{SF} soll den Kraftvektor der Seiltänzerin darstellen. Die Gegenkraft zu dieser Kraft, muss von den Seilen aufgefangen werden. Zerlege diese Kraft in Richtung der Seile SA und SB. Achtung: Verwende die Geraden durch S, A und S, B, denn Strecken würden die Komponentenvektoren in der Länge begrenzen. Verstecke die unnötigen Objekte.
- Betrachte die Ortslinie (bzw. Spur) für verschiedene Objekte. Wähle dazu zuerst den beweglichen Punkt P und betrachte in der Vorschau die Ortskurven von den von P abhängigen Objekten. Beschreibe Deine Beobachtungen. Verändere auch den Kraftvektor
- (freiwillig) Zeichne selber eine Seiltänzerin, deren Grösse sich mit dem Kraftvektor ändert. Eine besondere Herausforderung ist, die Balancierstange beweglich zu machen. Du kannst die ganze Figur auch mit dem Animationstool automatisch bewegen (die Stange kann dabei auch separat animiert werden).

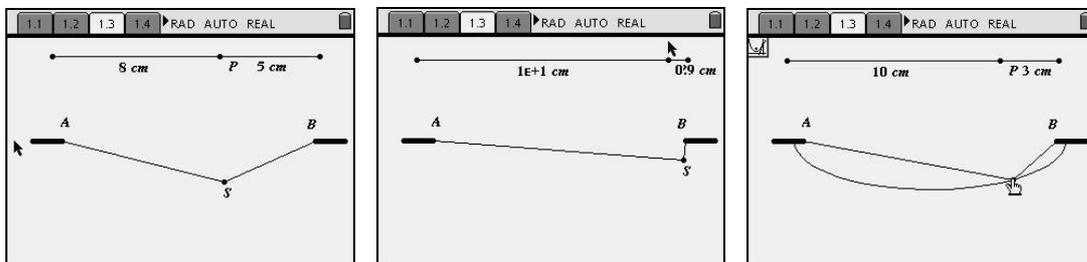
Lösung der Aufgabe

- a) Beginne mit einer horizontalen Geraden. Setze 2 dicke Strecken auf diese Gerade (Starttrampen für die Seiltänzerin, Endpunkte A, B). Zeichne eine Strecke, welche die Länge des Seils darstellt (also länger als die Strecke \overline{AB} ist) und einen Punkt P auf dieser Strecke. Messe die beiden Seilstücke mit "Länge, bzw. Length in der englischen Version". Zeichne 2 Kreise mit Mittelpunkt A und B und mit der Länge der Seilstücke als Radius (zuerst auf den Mittelpunkt, dann auf die Masse klicken, mittleres Bild). Schneide die beiden Kreise und nenne den unteren Schnittpunkt S (Bild rechts, S sofort nach Setzen des Punktes einzeichnen). Zeichne die Seilstücke \overline{AS} und \overline{BS} ein.

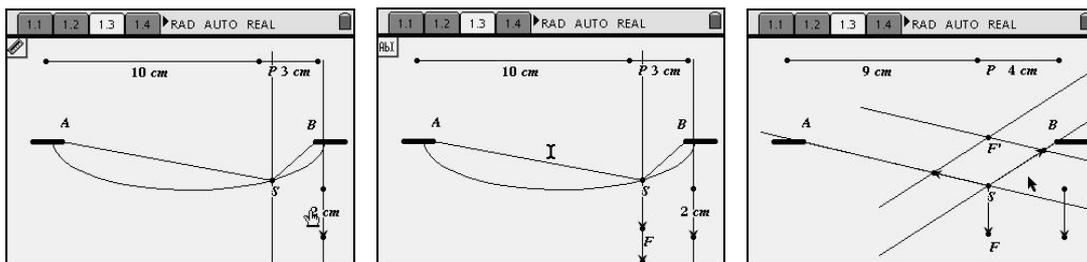


Verstecke die beiden Kreise und die horizontale Gerade mit „Ausblenden/Anzeigen, bzw. Hide/Show“ (Bild unten links).

- b) Bewege den Punkt P. Der Weg der Seiltänzerin geht über die Punkte A und B hinaus (Bild unten, Mitte). Deshalb ist es bei losem Seil unmöglich die Endpunkte A und B zu erreichen (diese Art von Seilakrobatik mit losem Seil sieht man im Zirkus ebenfalls). Üblicherweise, vor allem beim Hochseilakt, wird das Seil dauernd nachgespannt, nur so ist es möglich, die Rampe zu erreichen. Der Punkt S beschreibt eine Ellipse mit den Brennpunkten A und B. Zeichne die Ortslinie von S ein (Zuerst P, dann S anklicken). Spannt man das Seil (d.h. gegebene Strecke verkürzen), so wird die Ellipse flacher, im Extremfall zur Strecke AB.

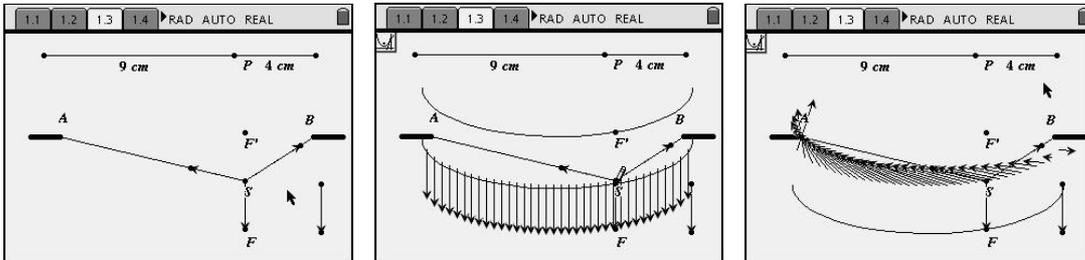


- c) Zeichne eine Gerade durch S senkrecht zu den Rampen (Bild unten links). Zeichne dann einen parallelen Vektor beliebiger Länge und messe seine Länge (im Schülerdokument ist die einfachere Version verlangt, wo der Vektor direkt bei S eingezeichnet wird). Dieser Vektor soll die Größe der Kraft darstellen, mit der die Seiltänzerin auf das Seil wirkt. Wir übertragen die Länge der Kraft auf die senkrechte Gerade mit „Massübertragung, bzw. Measurement transfer“. Da die Massübertragung nur an eine Richtung gebunden werden kann, muss zuerst ein Vektor (oder Strahl) von S aus auf die Gerade gelegt werden.
- d) Das Resultat der Massübertragung ist ein Punkt F und \overline{SF} ist der Kraftvektor mit der gegebenen Länge.



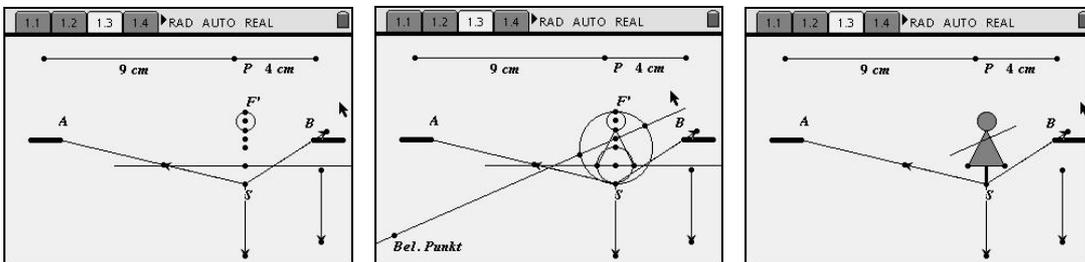
Lösche die nicht mehr gebrauchten Objekte und Masszahlen (Bild oben, Mitte).

- e) Konstruiere den symmetrischen Punkt F' von F bezüglich S mit „Punktsymmetrie, bzw. Symmetry“. Für die Zerlegung des Vektors $\overrightarrow{SF'}$ in die Richtungen SB und SA (Vektorparallelogramm, Bild oben, rechts) zeichne zuerst zwei Geraden SA und SB (die Strecken \overline{SA} und \overline{SB} würden die Länge der zerlegten Vektoren beschränken) und schneide diese mit den Parallelen zu SA und SB durch F' . Definiere nun die Komponenten als Vektoren. Verstecke nicht mehr benötigten Objekte (Bild unten links).



Wählt man die Ortslinienfunktion und dann zuerst den beweglichen Punkt P , so kann die Spur der einzelnen Objekte in der Vorschau betrachtet werden, indem man mit dem Zeiger auf das Objekt fährt ohne zu klicken. Im Bild (oben Mitte) sieht man die Ortslinie von F' und die Spur des Kraftvektors (nicht in der Vorschau). So kann man z.B. die Veränderung der einzelnen Vektoren analysieren: Die senkrechten Vektoren ändern die Richtung nicht, hingegen kann die Veränderung der Seilkräfte in dieser Vorschau sehr gut beobachtet werden (Bild oben rechts). Der Punkt F beschreibt ebenfalls eine Ellipse (parallel verschoben).

- f) Die Schülerinnen und Schüler sind sehr kreativ im Zeichnen einer Seiltänzerin. Unten ist eine Konstruktion mit fortgesetzter Halbierung der Strecke $\overline{SF'}$ angedeutet. Diese Punkte werden verwendet um den Kopf (=Kreis), das Dreieck für das Kleid usw. zu konstruieren. Die Stange legt man durch einen festen (wie in der Figur) oder beweglichen Punkt, wie z.B. den Mittelpunkt von \overline{AF} .



Die Seiltänzerin kann auch durch Wahl von P und $\text{Ctrl}+\text{Menu}$ (entspricht der rechten Maustaste) animiert werden (mit Attribute die Zahl für die Geschwindigkeit eingeben, 0 bedeutet Stopp). Es können auch mehrere Animationen so definiert werden. Während der Animation erscheint ein Kontrollfeld, mit dem die Animationen unterbrochen oder zurückgesetzt werden können.

Mit dem Befehl „capture“ kann der Weg des Punktes F auch in ein Spreadsheet übertragen und mit einem Scatterplot gezeichnet werden.

Bemerkung:

Die Ellipse kann in ein Koordinatensystem eingebettet werden (A und B auf der x -Achse). Dann kann diese Konstruktion auch als (ein möglicher) Einstieg zur Herleitung der Ellipsengleichung verwendet werden. Eine einfache Herleitung findet man in „The Case for CAS“, Seite 53 (kostenloser download auf www.t3ww.org).