Eine Reihe von Impulsen und was daraus werden kann
Das MMS der TI-Nspire CX Technologie zum selbständigen Forschen und Lernen nutzen
Beispiel: Taylorreihen

Wolfgang Häfner

TI-Nspire will und soll Impulse zum forschen und selbständigen Lernen geben.
Und weil man als Lehrender Probleme am besten aus Sicht der Lernenden betrachtet, wird in diesem Beitrag folgender **Versuch** unternommen:
Es werden Denkanstöße (Impulse) gegeben und („aus der Perspektive der Lernenden“) beschrieben, welche mathematischen Kenntnisse sich unter anderen daraus ergeben könnten.

Impuls 1:
Finden Sie mit Hilfe des MMS von TI-Nspire und durch weitere Recherchen heraus, wie das Folgende zu interpretieren ist.

$$\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{i+1}}\right) \blacktriangleright 1$$

Das ist eine Summe mit unendlich vielen Summanden. Wie soll das gehen?
Vielleicht sollte man sich einmal ansehen, was sich ergibt, wenn man die Summe Schritt für Schritt entwickelt?

$$\sum_{i=0}^{0}\frac{1}{2^{i+1}}=\frac{1}{2};\quad \sum_{i=0}^{1}\frac{1}{2^{i+1}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}=\frac{3}{4};\quad \sum_{i=0}^{2}\frac{1}{2^{i+1}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}=\frac{3}{4}+\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$$

$$\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{1}{2^{i+1}}\right) \blacktriangleright 1-\frac{2^{-n}}{2}$$

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{2^{i+1}}=1-\frac{2^{-n}}{2}=1-\frac{1}{2^{n+1}}\qquad \left(1-\frac{1}{2^1}=\frac{1}{2};\quad 1-\frac{1}{2^2}=\frac{3}{4};\quad 1-\frac{1}{2^3}=\frac{7}{8}\right)$$

Der Beweis kann durch vollständige Induktion erfolgen.
Nun müsste man eigentlich durch eine Grenzwertbetrachtung zum Ziel gelangen.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{2^{i+1}}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)=1$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{1}{2^{i+1}}\right)\right) \blacktriangleright 1$$

Impuls 2:
Suchen Sie in verschiedenen Medien das zu Ihren bisherigen Erkenntnissen gehörende Fachwissen.

Diesem Impuls folgend, sollten die Begriffe Partialsumme, Reihe, Konvergenz und Divergenz von Reihen und Summe einer Reihe (vielleicht auch mehr) erarbeitet werden.

Impuls 3:
Reihen der Form

$$P(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot (x - x_0)^i$$

nennt man Potenzreihen mit der Entwicklungsstelle (auch dem Entwicklungspunkt) x_0.
Die Zahlen a_i sind die Koeffizienten der Potenzreihe, x_0 ist eine fest gewählte reelle Zahl.

Untersuchen Sie die Reihe

$$P(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}.$$

Diese Reihe ist offensichtlich eine Potenzreihe mit der Entwicklungsstelle $x_0 = 0$ und den Koeffizienten $a_i = \frac{1}{i!}$.
Die Glieder der Folge aus denen diese Reihe gebildet wird sind die Potenzfunktionen

$$f_0(x) = 1, \quad f_1(x) = x, \quad f_2(x) = \frac{1}{2}x^2, \quad f_3(x) = \frac{1}{6}x^3, \quad f_4(x) = \frac{1}{24}x^4, \quad usw.$$

$$\sum_{i=0}^{0} \left(\frac{x^i}{i!}\right) \rightarrow 1$$

$$\sum_{i=0}^{2} \left(\frac{x^i}{i!}\right) \rightarrow \frac{x^2}{2} + x + 1$$

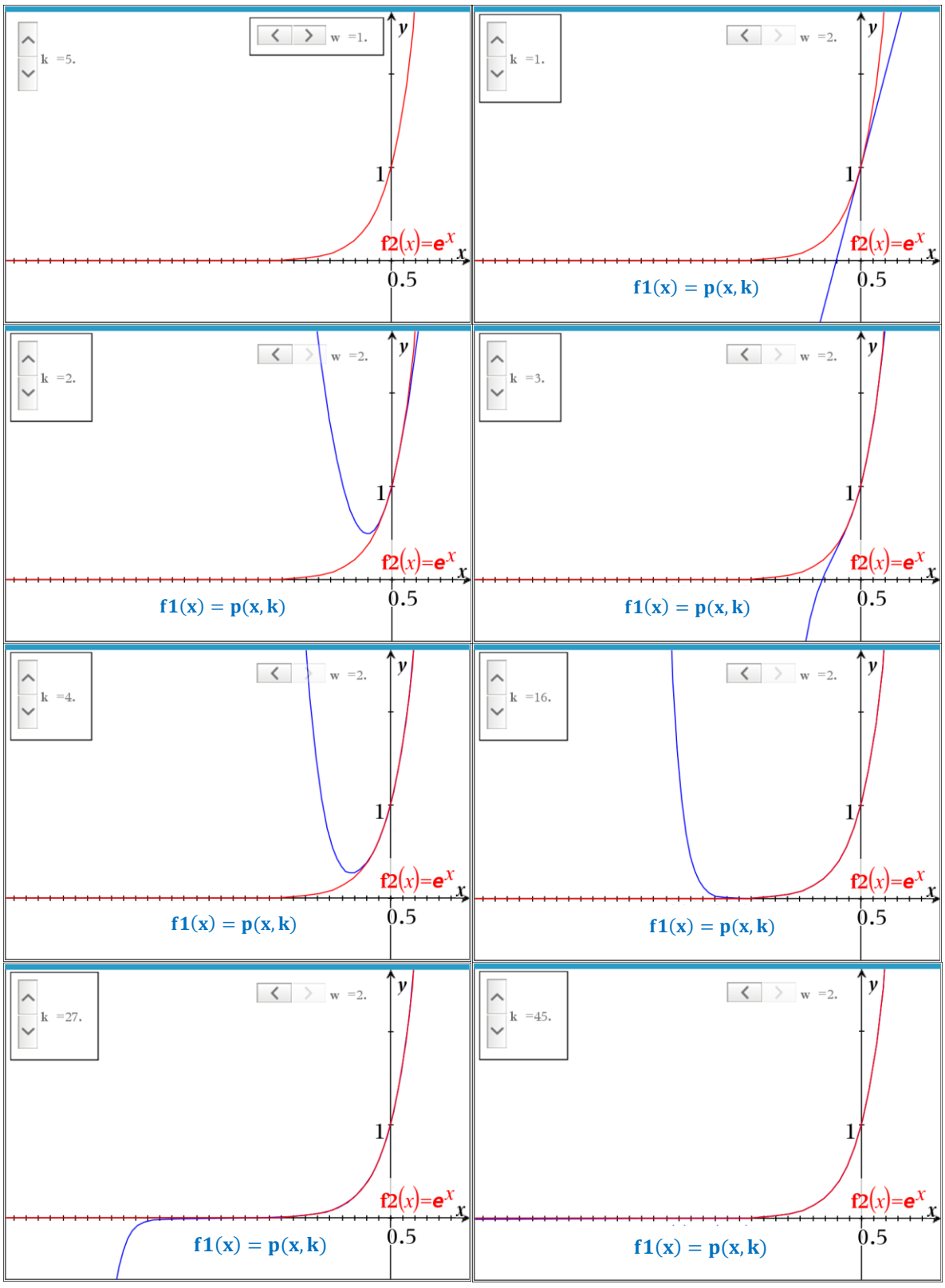
$$\sum_{i=0}^{6} \left(\frac{x^i}{i!}\right) \rightarrow \frac{x^6}{720} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + x + 1$$

$$p(x,n) := \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{x^i}{i!}\right) \rightarrow Fertig$$

Die Partialsummen sind hier also Polynome n-ten Grades (n=0,1,2,….).

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{x^i}{i!}\right) \rightarrow e^x$$

Zur Veranschaulichung sollte man die Funktion $f(x) = e^x$ und verschiedene Partialsummen darstellen.



Man kann vermuten, dass diese Reihe für alle x konvergiert, und zwar gegen $f(x) = e^x$, d.h. es gilt für alle x.

$$f(x) = e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}.$$

Nachtrag:
Es gibt Potenzreihen, die nur in einem bestimmten Intervall (Konvergenzbereich) oder nur an ihrer Entwicklungsstelle konvergieren.

Impuls 4:
Versuchen Sie intuitiv eine Ableitung der Reihe

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$$

zu ermitteln. Können Sie das Ergebnis vorhersagen?

Vorhersage:
Die Ableitung dieser Reihe müsste wieder dieselbe Reihe ergeben,
da $f(x) = e^x$ die Ableitung $f'(x) = e^x$ hat.

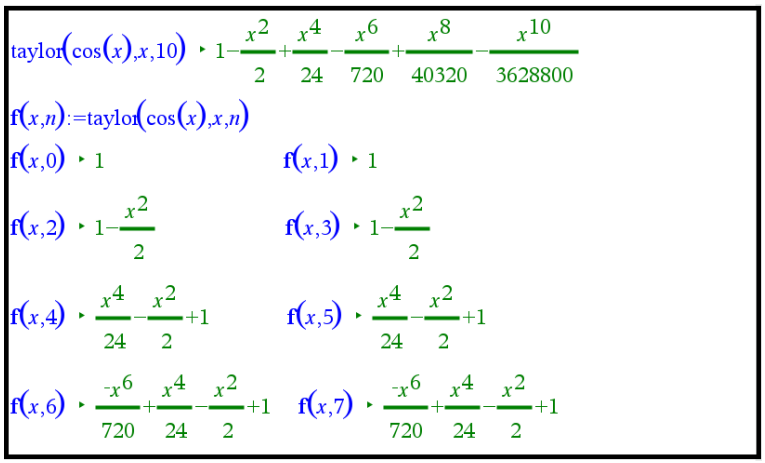
Vielleicht muss man in Anlehnung an die Summenregel einfach jeden Summanden einzeln ableiten.

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i\,!} = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^i}{i\,!} = 1 + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(i+1)!} x^{i+1}$$

$$f'(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (i+1) \cdot \frac{1}{i\,! \cdot (i+1)} \cdot x^i = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i\,!} = f(x)$$

Nachtrag:
Man sollte darauf hinweisen, dass dieses Vorgehen nur richtig ist, wenn die Reihe in einem Intervall konvergiert, in dem $f'(x)$ existiert.

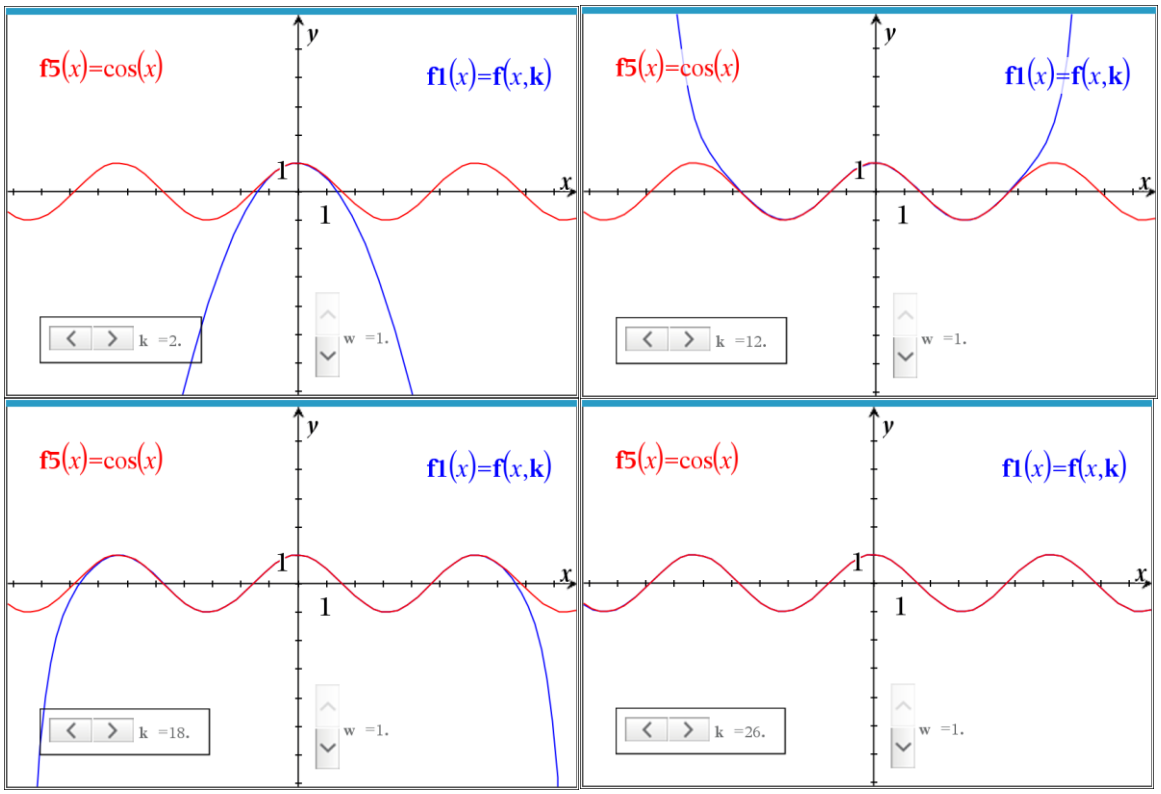
Impuls 5:
Sie finden im Katalog die Funktion **taylor(Ausdr,Var,Order[,Wert])**.
Erkunden Sie, was diese Funktion leistet.
Tipp: Ausdruck könnte z.B. cos(x) sein. (Achtung: x im Bogenmaß)



Offensichtlich erhält man mit **taylor(Ausdr,Var,Order[,Wert])** Polynome der Ordnung ‚Order'. Etwas verwirrend ist in diesem Beispiel, dass z.B. $f(x,7) = f(x,6)$ ist. Es fehlen aber bei allen Polynomen die Potenzen von x mit ungeradem Exponenten. Man kann diese Potenzen aber leicht einfügen, wenn die entsprechenden Koeffizienten jeweils den Wert Null haben.

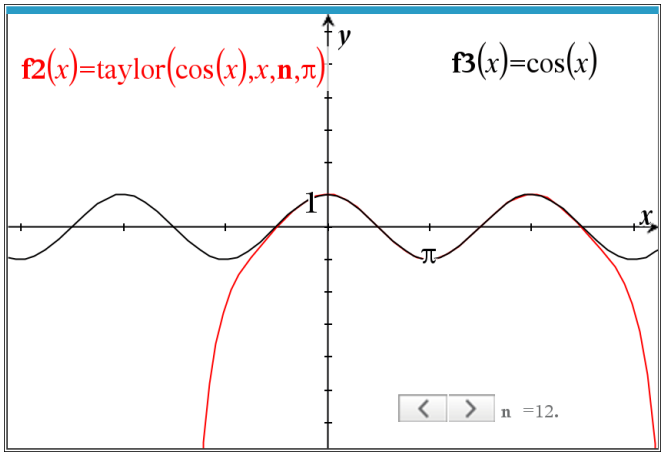
$$f_7(x) = 0 \cdot x^7 - \frac{1}{720} x^6 + 0 \cdot x^5 + \frac{1}{24} x^4 + 0 \cdot x^3 - \frac{1}{2} \cdot x^2 + 0 \cdot x + 1$$

Sinn macht das Ganze aber nur, wenn ‘Ausdr‘ und die Polynome irgendwie zusammenhängen. Deshalb sollte man sie in ‚Graphs‘ darstellen.



Die Taylorpolynome konvergieren in unserem Beispiel mit wachsendem n gegen die Funktion f(x)=cos(x). Betrachtet man die Taylorpolynome als Partialsummen einer Potenzreihe (Taylorreihe), so ist hier der Wert der Reihe f(x)=cos(x) für jedes x.

Da der Parameter ‘Wert‘ in der Funktion ‘taylor‘ optional ist, sollten wir doch noch seine Wirkung erkunden, z.B. mit ‚Wert‘=π.



Die Graphen der Polynome sind um π Koordinateneinheiten in x-Richtung verschoben.
Schaut man sich die Definition einer Potenzreihe an, so ist zu vermuten, dass ‘Wert‘ der Entwicklungsstelle x_0 der Potenzreihe entspricht, was durch folgende Aussage im Referenzhandbuch bestätigt wird.
(„Das Polynom enthält alle ganzzahligen Potenzen von (Var minus Punkt) mit nicht verschwindenden Koeffizienten von Null bis Ordnung.“)
Bemerkungen: (Var minus Punkt): $(x - x_0)$

Impuls 6:
Annahme: Eine Funktion f(x) lässt sich durch eine Potenzreihe angeben und f(x) ist beliebig oft differenzierbar.
Zeigen Sie, dass sich die Koeffizienten mit Hilfe der Ableitungen berechnen lassen.
Man erhält dadurch die Taylorreihe.

(Man kann wohl davon ausgehen, dass dann auch eine Recherche zum Namensgeber Taylor erfolgt.)

(Hier muss man vielleicht den SuS etwas mehr helfen.)

$$\boldsymbol{f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot (x - x_0)^i = a_0 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cdot (x - x_0)^i \quad \Rightarrow \quad f(x_0) = a_0}$$

Man kann herleiten, dass für alle n≥ 1

$$f^{(n)}(x) = \sum_{i=n}^{\infty} i! \cdot a_i \, (x - x_0)^{i-n} = n! \cdot a_n + \sum_{i=n+1}^{\infty} i! \cdot a_i \, (x - x_0)^{i-n}$$

gilt.

$$\Rightarrow \quad f^{(n)}(x_0) = n! \cdot a_n \qquad \Rightarrow \quad a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \qquad \Rightarrow \quad \boldsymbol{f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i\,!} \cdot (x - x_0)^i}$$

Taylorreihe $T(x)$ und Taylorpolynom $t_n(x)$:

$$\boldsymbol{T(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i\,!} \cdot (x - x_0)^i; \qquad t_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i\,!} \cdot (x - x_0)^i}$$

Nachtrag:
Die Gleichung $T(x) = f(x)$ gilt nur für x-Werte des Konvergenzbereichs von T(x), wenn außerdem folgende Gleichung gilt:
$\lim_{n \to \infty} (f(x) - t_n(x)) = 0$
Darauf soll in diesem Beitrag nicht weiter eingegangen werden. Für Hausarbeiten, Projekte und in Arbeitsgemeinschaften ist die Bearbeitung diesbezüglicher Fragestellungen aber möglich.

Impuls 7:
Man sollte die neue Formel testen:
Beispiele:
$f(x) = e^x; \qquad x_0 = 0$
$f(x) = \sin x; \qquad x_0 = \pi$

Beispiel1:

$f(x) = e^x; \qquad x_0 = 0$

$f(0) = 1$

$f^{(i)}(x) = e^x; \quad f^{(i)}(0) = e^0 = 1; \qquad i = 0,1,2,3, \ldots$

Taylorreihe:

$$T(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i\,!} \cdot (x - x_0)^i = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i\,!} \cdot x^i = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i\,!}$$

Taylorpolynom:

$$t_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i\,!}$$

(siehe auch Impuls 3)

$$t(x,n) := \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{\frac{d^i}{dx^i}(f(x))|x=x0}{i!} \cdot (x-x0)^i \right) \qquad \textit{Fertig}$$

$f(x) := e^x$ ▸ *Fertig* $\quad x0 := 0$ ▸ 0 $\quad k := 6$ ▸ 6

$$t(x,k) \text{ ▸ } \frac{x^6}{720} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + x + 1$$

$$\text{taylor}(f(x), x, k, x0) \text{ ▸ } 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720}$$

Beispiel 2:

$f(x) = \sin x; \qquad x_0 = \pi$

$f(\pi) = 0$

$f'(x) = \cos x \qquad f'(\pi) = -1$

$f''(x) = -\sin x \qquad f''(\pi) = 0$

$f'''(x) = -\cos x \qquad f'''(\pi) = 1$

$f^{(4)}(x) = \sin x \qquad f^{(4)}(\pi) = 0$

$$T(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(\pi)}{i\,!} \cdot (x - \pi)^i$$

$$T(x) = 0 + \frac{-1}{1\,!} \cdot (x - \pi) + 0 + \frac{1}{3\,!} \cdot (x - \pi)^3 + 0 + \frac{-1}{5\,!} \cdot (x - \pi)^5 + 0 + \frac{1}{7\,!} \cdot (x - \pi)^7 + \ \ldots$$

$$T(x) = -\frac{(x-\pi)}{1!} + \frac{(x-\pi)^3}{3!} - \frac{(x-\pi)^5}{5!} + \frac{(x-\pi)^7}{7!} - \frac{(x-\pi)^9}{9!} + \ \ldots$$

Taylorreihe und Taylorpolynom:

$$T(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1} \cdot (x-\pi)^{2i+1}}{(2i+1)!} \qquad t_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^{i+1} \cdot (x-\pi)^{2i+1}}{(2i+1)!}$$

$f(x) := \sin(x)$ ▸ *Fertig* $\quad x0 := \pi$ ▸ $\pi \quad k = 9$ ▸ 9

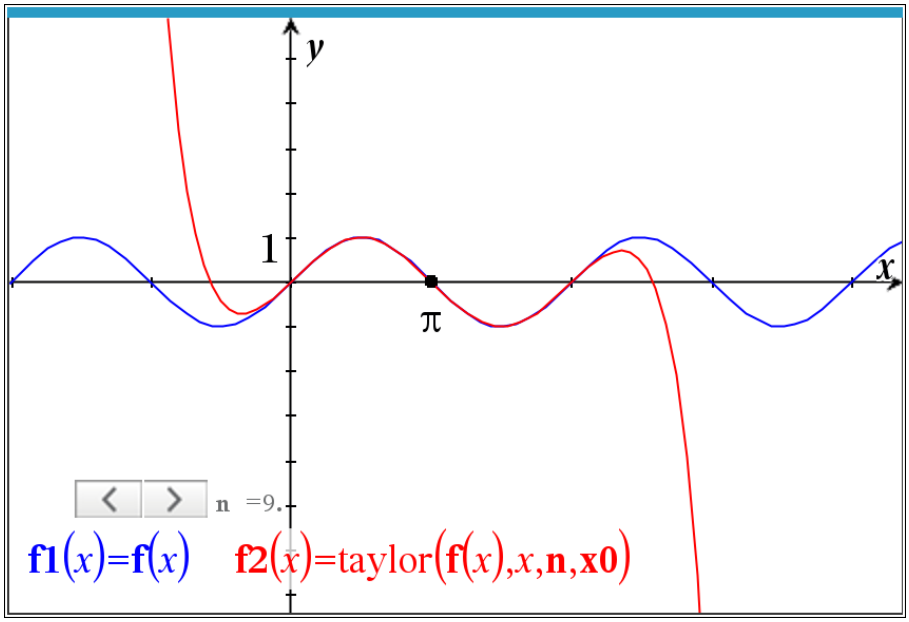
$t(x,k)$

▸ $\dfrac{-(x-\pi)\cdot\left(x^8-8\cdot\pi\cdot x^7+4\cdot\left(7\cdot\pi^2-18\right)\cdot x^6-8\cdot\pi\cdot\left(7\cdot\pi^2-54\right)\cdot x^5+2\cdot\right.}{}$

$\text{taylor}\left(f(x),x,k,x0\right)$

▸ $-(x-\pi)+\dfrac{(x-\pi)^3}{6}-\dfrac{(x-\pi)^5}{120}+\dfrac{(x-\pi)^7}{5040}-\dfrac{(x-\pi)^9}{362880}$

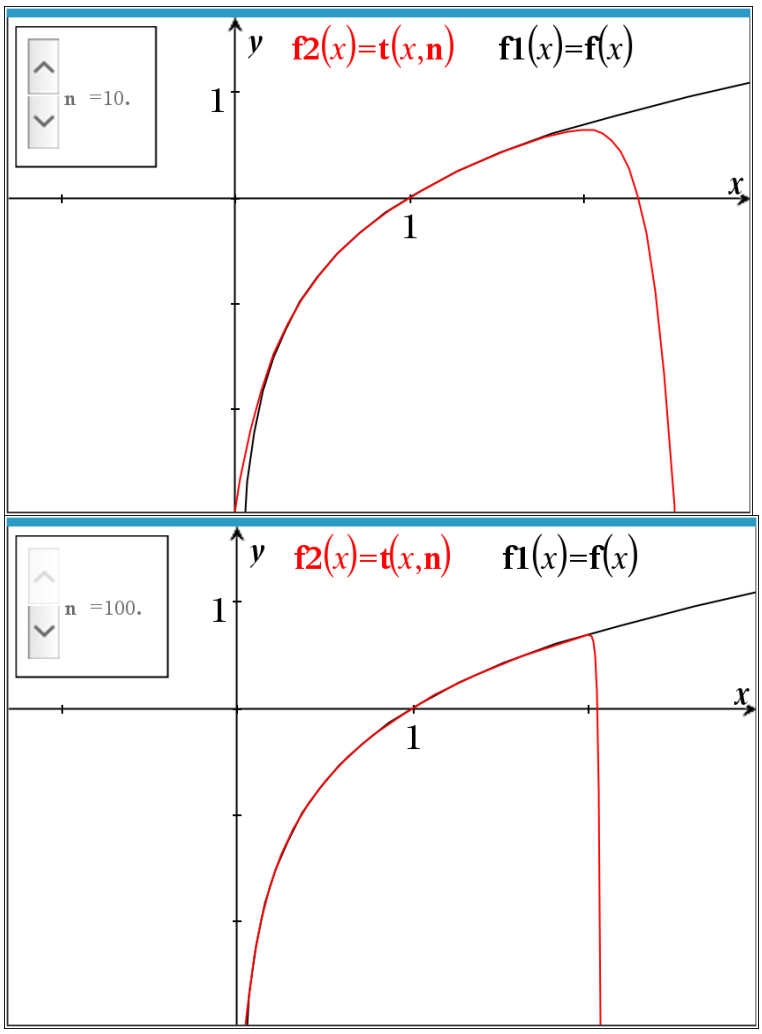
$t(x,k)=\text{taylor}\left(f(x),x,k,x0\right)$ ▸ true



Impuls 8:
Sehen Sie sich die Graphen der Taylorpolynome der Funktion $f(x) = \ln x$ mit der Entwicklungsstelle $x_0 = 1$ bei zunehmender Ordnung und den Graphen von f an und interpretieren Sie Ihre Beobachtung.

$f(x) := \ln(x)$ ▸ *Fertig*

$t(x,n) := \text{taylor}\left(f(x),x,n,1\right)$ ▸ *Fertig*



Vermutung:
Die Taylorreihe $T(x)$ der Funktion $f(x) = \ln x$ mit der Entwicklungsstelle $x_0 = 1$ ist konvergent vermutlich im Intervall (0;2) oder (0;2] (Konvergenzbereich).
Im Konvergenzbereich gilt T(x)=f(x).

Nachtrag: Konvergenzbereich $(0; 2]$; $T(2) = \ln(2)$