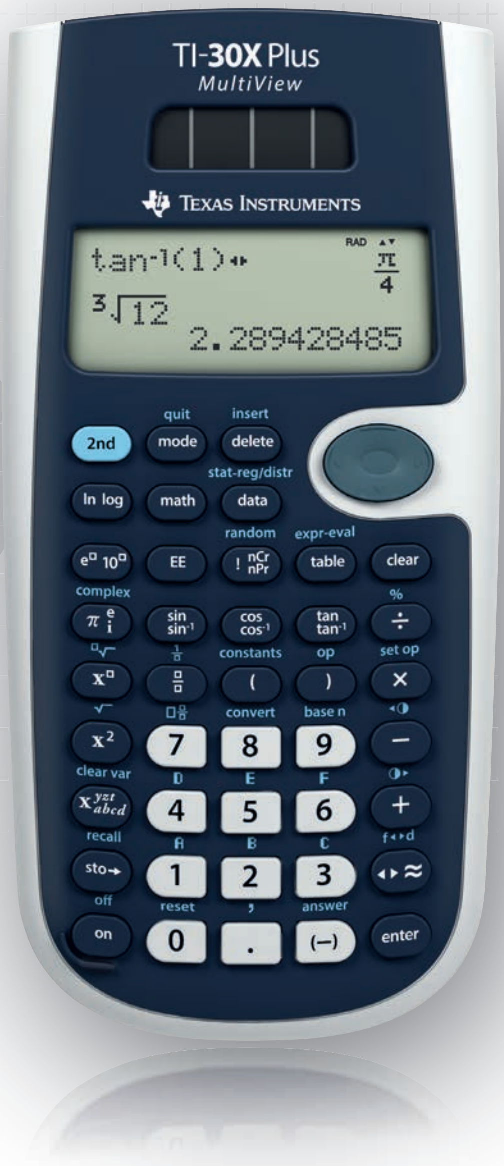
Heinz Klaus Strick

Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Aufgaben für das Fach Mathematik



» Analysis

» Analytische Geometrie

» Lineare Algebra

» Stochastik

Texas Instruments

Dieses und weiteres Material steht Ihnen zum pdf-Download bereit: www.ti-unterrichtsmaterialien.net
Gedruckte Exemplare erhalten Sie über den Webshop: www.ti-activities-shop.net

Inhaltsverzeichnis

Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Aufgaben für das Fach Mathematik

Die schriftliche Abiturprüfung im Fach Mathematik wird in zwei Teilen durchgeführt.

Im Prüfungsteil A ist eine Verwendung von Hilfsmitteln nicht vorgesehen, im Prüfungsteil B dürfen Hilfsmittel verwendet werden. Beide Prüfungsteile enthalten Aufgaben zu jedem der Sachgebiete Analysis, Analytische Geometrie/Lineare Algebra und Stochastik.

Der Prüfungsteil A besteht aus mehreren kurzen, nicht zusammenhängenden Aufgaben.
Für den Prüfungsteil B sind umfangreichere Aufgaben vorgesehen, für die als Hilfsmittel u. a. wissenschaftliche Taschenrechner (WTR) zugelassen sind.

Grundlegendes Anforderungsniveau

Die insgesamt zu erreichenden 100 Bewertungseinheiten verteilen sich folgendermaßen auf die beiden Prüfungsteile und die drei Sachgebiete:

Sachgebiet	Prüfungsteil A ohne Hilfsmittel	Prüfungsteil B mit Hilfsmitteln
Analysis	20	40
Stochastik		20
Analytische Geometrie/ Lineare Algebra		20

Für den Prüfungsteil A ist eine Arbeitszeit von insgesamt 45 Minuten, für den Prüfungsteil B von insgesamt 180 Minuten vorgesehen.

Erhöhtes Anforderungsniveau

Die insgesamt zu erreichenden 120 Bewertungseinheiten verteilen sich folgendermaßen auf die beiden Prüfungsteile und die drei Sachgebiete:

Sachgebiet	Prüfungsteil A ohne Hilfsmittel	Prüfungsteil B mit Hilfsmitteln
Analysis	20	50
Stochastik		25
Analytische Geometrie/ Lineare Algebra		25

Für den Prüfungsteil A ist eine Arbeitszeit von insgesamt 45 Minuten, für den Prüfungsteil B von insgesamt 225 Minuten vorgesehen.

In der Vereinbarung der Länder wird die Funktionalität der zugelassenen Taschenrechner (WTR) eingeschränkt. Die WTR dürfen folgende Möglichkeiten nicht enthalten:

Analysis

- Umformen von Termen mit Variablen, Lösen von Gleichungen oder Gleichungssystemen, Differenzieren oder Integrieren, Berechnen von Werten einer Ableitungsfunktion oder eines Integrals, Darstellen von Graphen

Analytische Geometrie

- Rechnen mit Koordinaten (z. B. zum Aufstellen der Gleichung einer Ebene aus den Koordinaten dreier gegebener Punkte), Rechnen mit Vektoren (z. B. Bestimmen des Werts eines Skalarprodukts oder der Größe des Winkels zwischen zwei Vektoren), Bestimmen der Lagebeziehungen von Punkten, Geraden und Ebenen, grafisches Darstellen geometrischer Objekte (z. B. Geraden oder Ebenen)

Lineare Algebra

- Rechnen mit Matrizen, Umformen von Matrizen (z. B. durch Zeilenoperationen)

Stochastik

- Berechnen von Werten eines Parameters einer Wahrscheinlichkeitsverteilung aus einem Wert dieser Verteilung und gegebenen Werten der weiteren zugehörigen Parameter

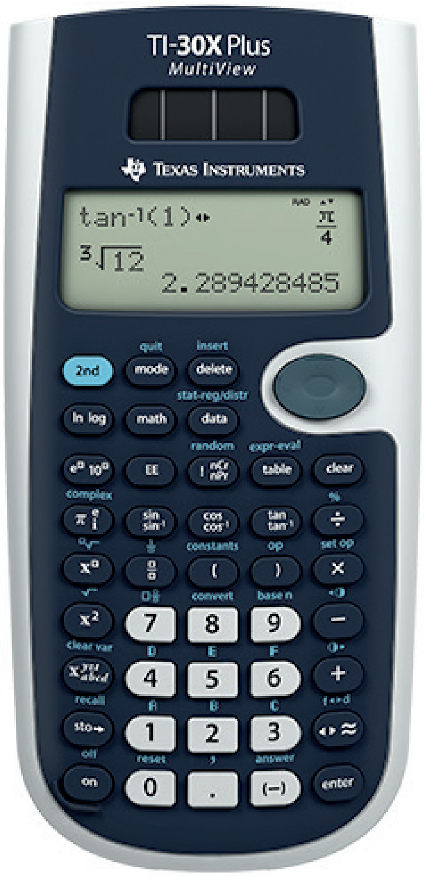
Es wird jedoch vorausgesetzt, dass der WTR über Funktionen eigens zum Berechnen von Werten der Binomialverteilung, der kumulativen Binomialverteilung und der Normalverteilung verfügt.

Der wissenschaftlicher Taschenrechner

TI-30X Plus MultiView™

erfüllt alle diese Bedingungen.

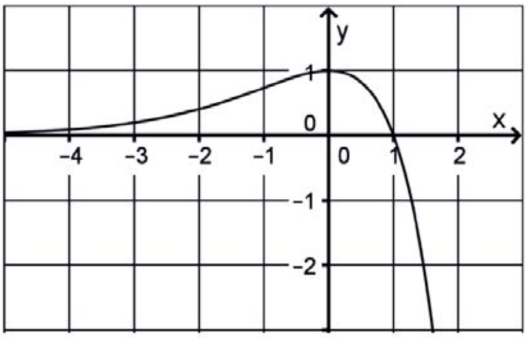
In den folgenden Lösungen der Musteraufgaben für den Prüfungsteil B ist angegeben, wie die verschiedenen Funktionalitäten des WTR aufgerufen werden können.



Analysis (grundlegendes Anforderungsniveau)

1

Die Abbildung zeigt den Graphen G_f der Funktion $f: x \mapsto (1-x) \cdot e^x$ mit Definitionsbereich IR.



Für die zweite Ableitung von f gilt $f''(x) = -(1+x) \cdot e^x$.

a (3 BE)

Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von G_f mit den Koordinatenachsen.

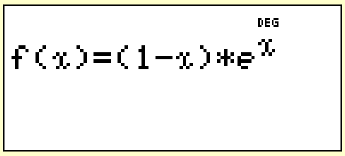
Lösung

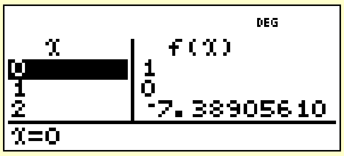
Zu bestimmen sind

– der Funktionswert der Funktion f an der Stelle x = 0:

Es gilt: f(0) = 1; der Punkt (0 | 1) des Graphen liegt auf der y-Achse.

table





– die Nullstelle des Graphen der Funktion f:

Der Funktionsterm ist in Produktform gegeben; ein Produkt ist genau dann gleich null, wenn mindestens einer der Faktoren gleich null ist. Da für die Exponentialfunktion mit $y = e^x$ gilt: $e^x > 0$ für alle $x \in$ IR, folgt, dass die einzige Nullstelle der Funktion gegeben ist durch die Bedingung $1 - x = 0$, also durch x = 1.

Der Punkt (1 | 0) ist der Schnittpunkt mit der x-Achse.

b (6 BE)

Bestimmen Sie rechnerisch Monotonie und Krümmungsverhalten von G_f.

Lösung

– *Rechnerische Bestimmung der Monotonieintervalle*

Bestimmung der Ableitungsfunktion mithilfe der Produktregel:

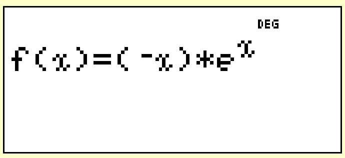
$f'(x) = (1-x)' \cdot e^x + (1-x) \cdot (e^x)' = (-1) \cdot e^x + (1-x) \cdot e^x = -x \cdot e^x$

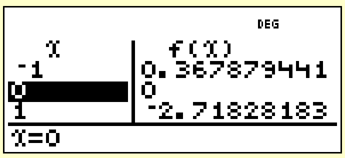
f '(x) hat nur eine Nullstelle bei x = 0. Durch diese Nullstelle (keine doppelte Nullstelle) ist die Definitionsmenge in zwei Monotonieintervalle unterteilt.
Es genügt daher, an jeweils einer Stelle eines Intervalls das Vorzeichen der Ableitungsfunktion zu bestimmen:

Intervall	Beispiel	f '(a)	Monotonie auf dem Intervall
x < 0	a = -1	$1 \cdot e^{-1} > 0$	G_f ist streng monoton steigend
x > 0	a = +1	$(-1) \cdot e^{1} < 0$	G_f ist streng monoton fallend

- Kontrollrechnung:

table





– *Rechnerische Bestimmung der Krümmungsintervalle*

Bestimmung der 2. Ableitung mithilfe der Produktregel ((dies ist nicht verlangt, s. o.))

$f''(x) = (-x)' \cdot e^x + (-x) \cdot (e^x)' = (-1) \cdot e^x + (-x) \cdot e^x = -(1 + x) \cdot e^x$

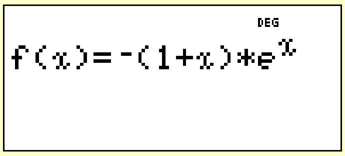
Es gilt: $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + x = 0 \vee e^x = 0 \Leftrightarrow x = -1$ (da $e^x > 0$, s. o.).

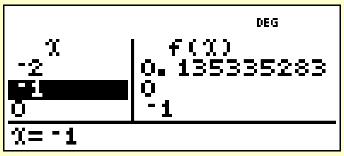
$f''(x)$ hat nur eine Nullstelle bei $x = -1$. Durch diese Nullstelle (keine doppelte Nullstelle) ist die Definitionsmenge in zwei Krümmungsintervalle unterteilt.
Es genügt daher, an jeweils einer Stelle eines Intervalls das Vorzeichen der 2. Ableitungsfunktion zu bestimmen:

Intervall	Beispiel	f ''(a)	Krümmung auf dem Intervall
$x < -1$	$a = -2$	$1 \cdot e^{-2} > 0$	G_f ist linksgekrümmt
$x > -1$	$a = 0$	$(-1) \cdot e^0 < 0$	G_f ist rechtsgekrümmt

- Kontrollrechnung:

table





c (4 BE)

Ermitteln Sie rechnerisch die Gleichung der Tangente an den Graphen von f in dessen Wendepunkt.

Lösung

Die Gleichung einer Geraden g mit Steigung m durch einen Punkt (a | b) ist gegeben durch: $g(x) = m \cdot (x – a) + b$. Die Gleichung einer Tangente t an den Graphen einer Funktion f an der Stelle a ist entsprechend gegeben durch: $t(x) = f'(a) \cdot (x – a) + f(a)$.

Wie aus der Untersuchung der Krümmung in Teilaufgabe b hervorgeht, findet an der Stelle $x = -1$ ein Krümmungswechsel statt, d. h., G_f hat an der Stelle $x = -1$ eine Wendestelle.

Zum Aufstellen der Tangentengleichung müssen noch bestimmt werden:

$f(-1) = (1 – (-1)) \cdot e^{-1} = 2/e$ sowie $f'(-1) = -(-1) \cdot e^{-1} = 1/e$

also: $t(x) = \frac{1}{e} \cdot (x - (-1)) + \frac{2}{e}$ also $t(x) = \frac{1}{e} \cdot x + \frac{3}{e}$

d (3 BE)

Auf der y-Achse gibt es Punkte, die auf einer Tangente an G_f liegen. Geben Sie die y-Koordinaten dieser Punkte an und begründen Sie Ihre Angabe mithilfe des Verlaufs von G_f.

Lösung

- *Alternative 1: Qualitative Beschreibung*

Links vom Wendepunkt liegen die Tangenten an den Graphen unterhalb des Graphen. Da die Steigung des Graphen, also der Tangenten, positiv ist und für $x \to -\infty$ gegen 0 geht, schneiden die Tangenten die y-Achse oberhalb des Ursprungs, aber unterhalb des Punktes (0 | 3/e).

Die Tangente durch den Wendepunkt schneidet die y-Achse im Punkt (0 | 3/e). Die Tangenten rechts des Wendepunktes schneiden die y-Achse zwischen den Punkten (0 | 3/e) und dem Hochpunkt (0 | 1).

Die Tangenten rechts vom Hochpunkt haben negative Steigungen und werden für $x \to +\infty$ betraglich beliebig groß. Die Schnittpunkte „wandern" also für $x \to +\infty$ auf der y-Achse beliebig weit nach oben.

Zusammengefasst: Die y-Koordinaten nehmen alle positiven reellen Zahlen an.

- *Alternative 2: Untersuchung mithilfe einer Rechnung*

Analog zu Teilaufgabe d wird eine allgemeine Tangentengleichung aufgestellt, indem man den Wert der Funktion und der 1. Ableitung an der Stelle a einsetzt:

$t(x) = (-a \cdot e^a) \cdot (x - a) + (1 - a) \cdot e^a = -a \cdot e^a \cdot x + (a^2 - a + 1) \cdot e^a$

Diese Tangenten schneiden die y-Achse im Punkt $(0 \mid (a^2 - a + 1) \cdot e^a)$.

Wegen $a^2 - a + 1 = (a - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0$ ist der erste Faktor stets positiv, der zweite Faktor geht für $a \to -\infty$ gegen 0, für $a \to +\infty$ gegen $+\infty$. Daher nimmt das Produkt $(a^2 - a + 1) \cdot e^a$ alle positiven Werte an.

e
(5 BE)

Betrachtet werden alle Rechtecke ABCD, die folgende Bedingungen erfüllen:

- Die Punkte $B(1|0)$ und $D(u|f(u))$ mit $u \in]-\infty;1[$ sind Eckpunkte.
- Die Seiten sind parallel zu den Koordinatenachsen.

Zeichnen Sie ein solches Rechteck in die Abbildung ein.

Die folgenden Aussagen I, II und III stellen im Zusammenhang mit den beschriebenen Rechtecken die Lösung einer Aufgabe dar:

I $R(u) = (1-u) \cdot f(u)$

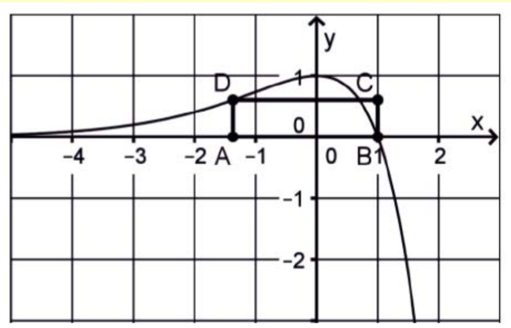
II $R'(u) = 0 \Leftrightarrow u = -1$ und es gilt $R''(-1) < 0$

III $R(-1) \approx 1{,}5$

Formulieren Sie die zugehörige Aufgabenstellung und beschreiben Sie die Bedeutung jeder Aussage im Zusammenhang mit den beschriebenen Rechtecken.

Lösung

Da die Seiten parallel zu den Koordinatenachsen verlaufen, ergibt sich folgende Situation:



(I) R(u) gibt den Flächeninhalt eines Rechtecks in Abhängigkeit von u an, denn die Breite ist gleich $1 + |u| = 1 + (-u)$ für $u < 0$ und gleich $1 - u$ für $0 \le u < 1$, und die Höhe ist durch f(u) gegeben.

(II) $R'(u) = 0$ ist die notwendige Bedingung dafür, dass an einer Stelle u ein lokales Extremum für die Flächeninhaltsfunktion vorliegt; dieses soll nach Aufgabenstellung an der Stelle $u = -1$ gelten. Die Bedingung $R''(-1) < 0$ stellt dann eine hinreichende Bedingung dafür dar, dass an der Nullstelle $u = -1$ von R' ein lokales Maximum vorliegt.

(III) $R(-1) = 1{,}5$ ist dann der zugehörige maximale Flächeninhalt.

Hinweis

Bei dieser Teilaufgabe geht es nur um die Deutung der Aussagen (I), (II), (III), nicht um den rechnerischen Nachweis.

Ein Nachweis wäre rechnerisch wie folgt zu führen:

$R(u) = (1 - u) \cdot f(u) = (1 - u)^2 \cdot e^u = (1 - 2u + u^2) \cdot e^u$

$R'(u) = (1 - 2u + u^2) \cdot e^u + (-2 + 2u) \cdot e^u = (-1 + u^2) \cdot e^u$

$R'(u) = 0 \Leftrightarrow u^2 = 1 \Leftrightarrow u = -1$ (da $u < 1$)

$R''(u) = (-1 + u^2) \cdot e^u + 2u \cdot e^u = (-1 + 2u + u^2) \cdot e^u$ und

$R''(-1) = (-2) \cdot e^{-1} < 0$

f
(3 BE)

Für ein $a \in IR$ ist die in IR definierte Funktion $F: x \mapsto (a-x) \cdot e^x$ eine Stammfunktion von f. Bestimmen Sie den Wert von a.

(zur Kontrolle: $a = 2$)

Lösung

Der Nachweis, dass F (dem Typ nach) eine Stammfunktion für f ist, erfolgt durch Ableiten von F: $F'(x) = (a-x) \cdot e^x + (-1) \cdot e^x = (a-x-1) \cdot e^x$

Bestimmung des Parameters a:

$F'(x) = f(x) \Leftrightarrow a - x - 1 = 1 - x \Leftrightarrow a = 2$

2

Betrachtet wird ein 150 m langer Abschnitt eines Damms. Die Profillinie des Querschnitts des Damms wird für $-4 \le x \le 1$ modellhaft durch die Funktion f beschrieben, und zwar für $-4 \le x \le 0$ auf der Seeseite und für $0 \le x \le 1$ auf der Landseite. Das Modell geht von einer horizontalen Grundfläche des Damms aus, die im Querschnitt durch die x-Achse beschrieben wird. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht 10 m in der Realität.

a

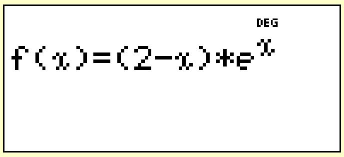
Berechnen Sie das Volumen dieses Abschnitts des Damms.

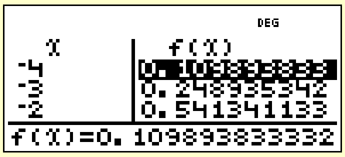
Lösung

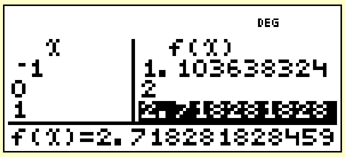
Die Querschnittsfläche des Damms ist durch das bestimmte Integral der Funktion im Intervall -4 ≤ x ≤ +1 gegeben:

$$\int_{-4}^{1} f(x)dx = \left[(2-x) \cdot e^x\right]_{-4}^{1} \approx 2{,}71828 - 0{,}10989 = 2{,}60839$$

table



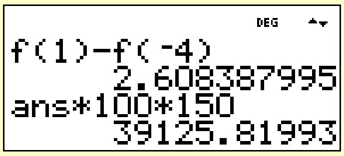




Statt Einzelwerte in der Wertetabelle der Stammfunktion abzulesen, kann man auch die Option nutzen, die Differenz F(1) – F(-4) direkt zu bestimmen.

Das Volumen des Damms ergibt sich hieraus durch Multiplikation mit 100 (da 1 LE = 10 m, also 1 FE = 100 m²) und mit der Länge des Damms (150 m).

table



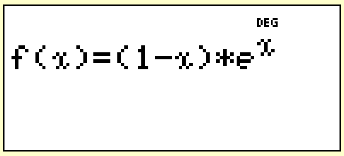
Der Abschnitt des Damms hat ein Volumen von ca. 39.000 m³.

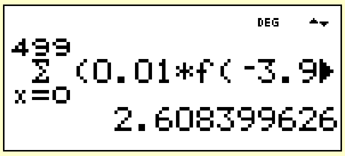
Hinweis

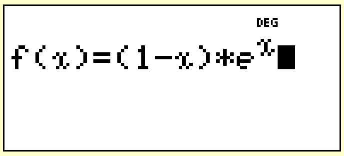
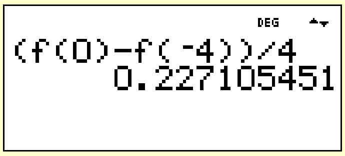
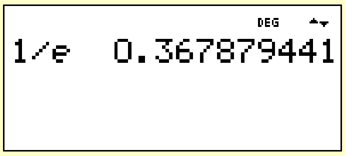
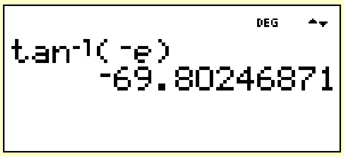
Wenn eine Stammfunktion nicht angegeben wäre, dann könnte man zur Kontrolle die Größe der Querschnittsfläche näherungsweise mithilfe von Rechteckstreifen bestimmen. Dazu zerlegt man das Intervall von -4 bis +1, also ein Intervall der Länge 5, in 500 gleich große Teilintervalle der Breite 0,01. Die Flächeninhalte der 500 Rechtecke ergeben sich dann jeweils aus der Breite 0,01 und der Höhe = Funktionswert in der Mitte der Teilintervalle (beginnend mit -4 + ½ · 0,01 = - 3,995):

$$\sum_{k=0}^{499} 0{,}01 \cdot f(-3{,}995 + 0{,}01 \cdot k)$$

table
math





b	Bestimmen Sie für die Seeseite des Damms rechnerisch die mittlere und die größte Steigung der Profillinie jeweils in Prozent.
Lösung table π	Die mittlere Steigung m_S auf der Seeseite ergibt sich aus dem Differenzenquotienten der Sekante durch die Endpunkte des Intervalls [-4 ; 0]: $m_S \approx 0{,}227 = 22{,}7\ \%$.    Die Steigung ist durch die Ableitungsfunktion f’ gegeben. Die Ableitungsfunktion nimmt an der Wendestelle bei x = -1 (vgl. Teilaufgabe b) eine maximale Steigung an. Wie in Teilaufgabe c ausgerechnet wurde, ist diese gleich $f'(-1) = 1/e \approx 36{,}8\ \%$. *Hinweis*: Der Graph der Funktion hat bei einem Übergang von einer Links- zu einer Rechtskrümmung eine (lokal) maximale Steigung, bei einem Übergang von einer Rechts- zu einer Linkskrümmung eine (lokal) minimale Steigung.
c	Ermitteln Sie für die Landseite des Damms rechnerisch den größten Neigungswinkel der Profillinie gegen die Horizontale.
Lösung tan π	Für x > 0 ist der Graph streng monoton fallend. Der größte Neigungswinkel ist daher am rechten Endpunkt des Intervalls gegeben, d. h. an der Stelle x = 1: Es gilt: $f'(1) = (-1) \cdot e = -e$ und $\tan^{-1}(-e) \approx -69{,}8°$ (WTR-Modus: DEG). Der größte Neigungswinkel beträgt also ca. 70°. 
d	Durch die Wirkung des Wassers verliert der Damm mit der Zeit an Höhe. Beschreiben Sie die Bedeutung des Terms $15000 \cdot \int_{-4}^{0} \left(f(x) - 0{,}95 \cdot f(x)\right) dx$ im Sachzusammenhang.
Lösung	Der Term f(x) – 0,95 · f(x) = 0,05 · f(x) gibt einen 5%-igen Anteil der Höhe des Damms auf der Seeseite an. Das mit 150 · 100 multiplizierte Integral über diese Funktion gibt daher das durch die Wirkung des Wassers verloren gegangene Gesamtvolumen in m³ an, wenn die Höhe um 5 % abgenommen hat.

Analysis (erhöhtes Anforderungsniveau)

1

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x^2 + 9x - 5$ und Definitionsmenge IR. Abbildung 1 zeigt den Graphen G_f von f.

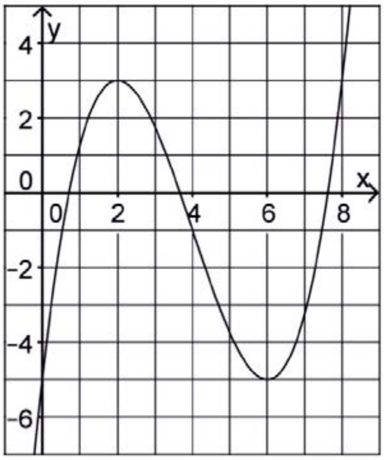


Abb. 1

a (5 BE)

Bestimmen Sie rechnerisch die Koordinaten und die Art der Extrempunkte von G_f.

Lösung

1. Ableitung: $f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 6x + 9$

- *notwendige Bedingung*:

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 12 = 0 \Leftrightarrow (x-2)\cdot(x-6) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = 6$

- *hinreichende Bedingung*:

Alternative 1: Untersuchung des Vorzeichens der 2. Ableitung

$f''(x) = \frac{3}{2} \cdot x - 6$; $f''(2) = -3 < 0$; $f''(6) = +3 > 0$; daher liegt an der Stelle x = 2 ein lokales Maximum und der Stelle x = 6 ein lokales Minimum vor.

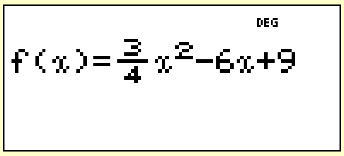
Alternative 2: Untersuchung mithilfe der 1. Ableitung auf Vorzeichenwechsel

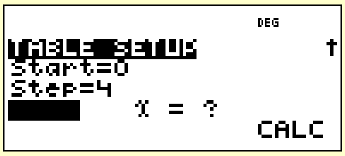
Durch die Nullstellen der 1. Ableitung ergeben sich drei Monotonieintervalle:

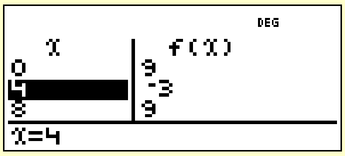
Intervall	Beispiel	f'(a)	Monotonie auf dem Intervall
$x < 2$	$a = 0$	$+9 > 0$	G_f ist streng monoton steigend
$2 < x < 6$	$a = 4$	$-3 < 0$	G_f ist streng monoton fallend
$x > 6$	$a = 8$	$+9 > 0$	G_f ist streng monoton steigend

- Kontrollrechnung

table





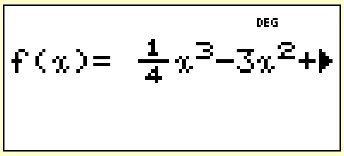


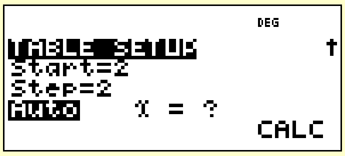
An der Stelle x = 2 ist ein Wechsel der Monotonie von steigend zu fallend, daher liegt dort ein lokales Maximum vor. An der Stelle x = 6 ist ein Wechsel der Monotonie von fallend zu steigend, daher liegt dort ein lokales Minimum vor.

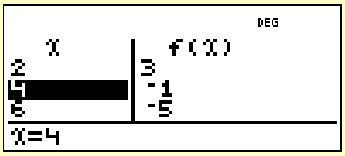
Berechnung der y-Koordinaten: f(2) = 3 ; f(6) = -5

G_f hat einen Hochpunkt H (2 | 3) und einen Tiefpunkt T (6 | -5).

table



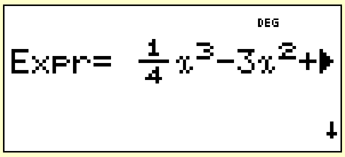


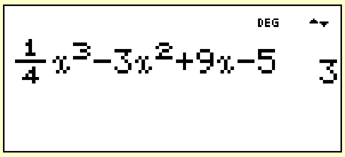


Hinweis

2nd table

Alternativ können die Funktionswerte auch mithilfe der *expr-eval*-Option des WTR ermittelt werden. Dazu muss zunächst der Term eingegeben werden und dann der einzusetzende x-Wert, z. B. für den Funktionsterm f(x) und die Stelle x = 2:





b
(4 BE)

Betrachtet wird die Gleichung $f(x) = c$ mit $c \in \mathbb{R}$. Ermitteln Sie mithilfe von Abbildung 1 die Anzahl der Lösungen dieser Gleichung in Abhängigkeit von c.

Lösung

Wegen der Lage des Hoch.- bzw. Tiefpunktes schneidet eine Parallele zur x-Achse den Graphen von f entweder einmal (oberhalb des Hochpunktes bzw. unterhalb des Tiefpunktes) oder zweimal (im Hochpunkt bzw. im Tiefpunkt) oder dreimal (zwischen Hochpunkt und Tiefpunkt).

Die Gleichung besitzt also für c > 3 und für c < -5 jeweils genau eine Lösung, für c = 3 und für c = -5 jeweils genau zwei Lösungen und für -5 < c < 3 genau drei Lösungen.

c
(2 BE)

Durch Verschiebung von G_f um 4 in negative x-Richtung und um 1 in positive y-Richtung entsteht der Graph einer Funktion g.

Geben Sie einen Term von g an, an dem man diese Verschiebung erkennen kann.

Lösung

Ersetzt man im Funktionsterm f(x) die Variable x durch den Term (x – a), dann bewirkt dies eine Verschiebung des Graphen von f um a in Richtung der x-Achse. Addiert man zum Funktionsterm f(x) die Konstante b, dann bewirkt dies eine Verschiebung des Graphen von f um b in Richtung der y-Achse.

Daher ergibt sich für g der Funktionsterm

$$g(x) = \left[\tfrac{1}{4}\cdot(x+4)^3 - 3\cdot(x+4)^2 + 9\cdot(x+4) - 5\right] + 1$$

d
(3 BE)

Ein vereinfachter Term von g ist $g(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x$. Begründen Sie mithilfe der Funktion g, dass der Graph von f symmetrisch bezüglich des Punkts $(4 \mid -1)$ ist.

Lösung

Enthält der Funktionsterm g(x) einer ganzrationalen Funktion nur Potenzen von x mit ungeradem Exponenten, dann ist der Graph von g punktsymmetrisch zum Ursprung.

Dies ist hier der Fall. Da der Graph von g durch Verschieben des Graphen von f um -4 in Richtung der x-Achse und um +1 in Richtung der y-Achse hervorgegangen ist, ist der ursprüngliche Graph punktsymmetrisch zum Punkt (4 | -1).

e
(3 BE)

Bestätigen Sie rechnerisch, dass $\int_1^3 f(x)\,dx = 5$ gilt.

Lösung

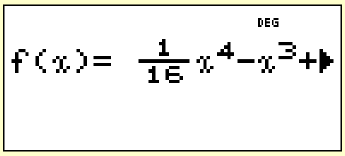
- *Bestimmen einer Stammfunktion für f(x)*

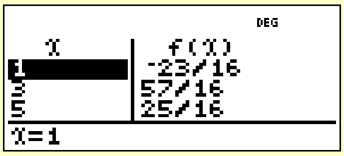
$$\int\left(\tfrac{1}{4}x^3 - 3x^2 + 9x - 5\right)dx = \tfrac{1}{16}x^4 - x^3 + \tfrac{9}{2}x^2 - 5x$$

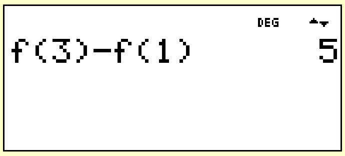
- *Bestimmen des bestimmten Integrals*

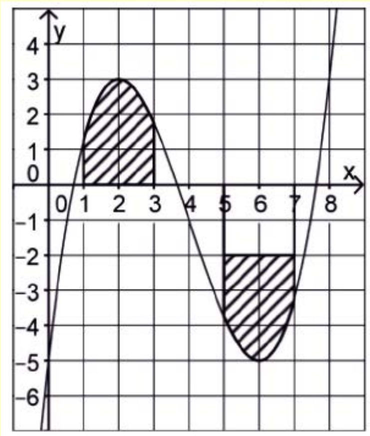
$$\int_1^3\left(\tfrac{1}{4}x^3 - 3x^2 + 9x - 5\right)dx = \left[\tfrac{1}{16}x^4 - x^3 + \tfrac{9}{2}x^2 - 5x\right]_1^3 = \tfrac{57}{16} - \left(-\tfrac{23}{16}\right) = \tfrac{80}{16} = 5$$

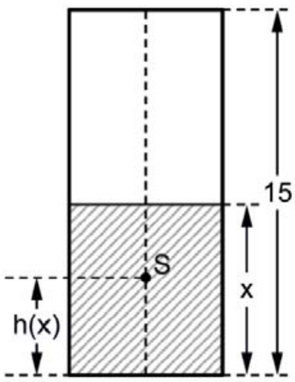
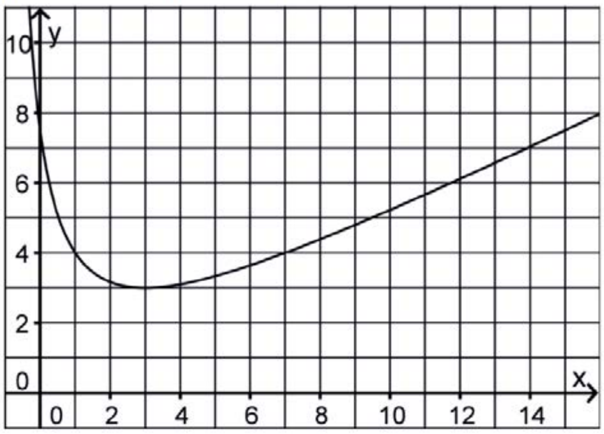
table

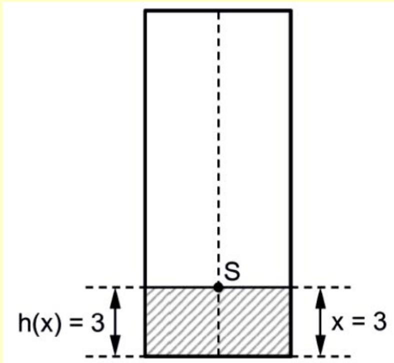




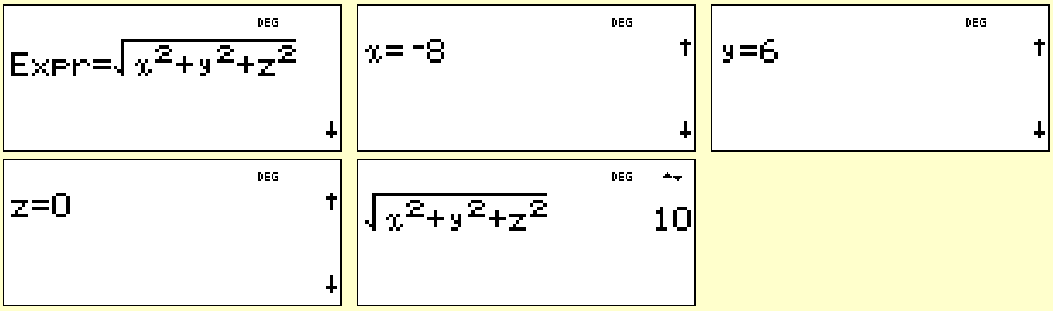
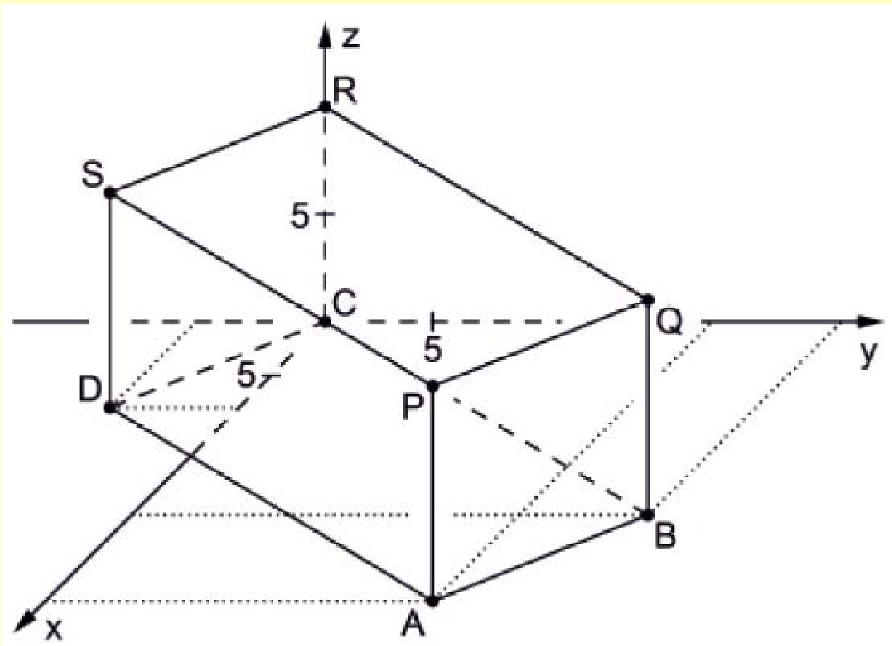


<table>
<tr><td>f
(5 BE)</td><td>Bestimmen Sie ohne Verwendung einer Stammfunktion den Wert des Integrals $\int_5^7 f(x)\,dx$ und veranschaulichen Sie Ihr Vorgehen durch geeignete Eintragungen in Abbildung 1.</td></tr>
<tr><td>Lösung</td><td>Wegen der Punktsymmetrie des Graphen zum Punkt (4 | -1) – vgl. Teilaufgabe d – sind die beiden rechts schraffierten Flächenstücke gleich groß.
Das Integral über dem Intervall [5 ; 7] berechnet sich daher als Summe des in Teilaufgabe e berechneten Integrals (= 5) und dem Flächeninhalt des Quadrats (= 2 · 2), und da das Flächenstück unterhalb der x-Achse liegt, muss dies noch mit (-1) multipliziert werden:
$$\int_5^7 f(x)dx = -\left(\int_1^3 f(x)dx + 4\right) = -9$$

</td></tr>
<tr><td>g
(3 BE)</td><td>Die Funktion f gehört zur Schar der in IR definierten Funktionen f_a mit $f_a(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x^2 + ax - 5$ und $a \in IR$. Der Graph von f_a wird mit G_a bezeichnet.
Bestimmen Sie die Koordinaten des Wendepunkts von G_a.</td></tr>
<tr><td>Lösung</td><td>• Bestimmen der Ableitungen
$f_a'(x) = \frac{3}{4} x^2 - 6x + a$; $f_a''(x) = {}^3/_2\, x - 6$
• Untersuchung mithilfe der Wendestellen-Kriterien
notwendige Bedingung: $f_a''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 4$
hinreichende Bedingung: f_a'' hat als lineare Funktion mit positiver Steigung einen Vorzeichenwechsel von – nach +, d. h., an der Stelle x = 4 findet ein Krümmungswechsel von einer Rechts- in eine Linkskrümmung statt.
• Bestimmen der Koordinaten der Schar-Wendepunkte
$f_a(4) = 16 - 48 + 4a - 5 = 4a - 37$
Wendepunkte W_a (4 | 4a – 37)</td></tr>
<tr><td>h
(2 BE)</td><td>Die Wendepunkte aller Graphen G_a liegen auf einer zur y-Achse parallelen Geraden. Begründen Sie, dass man dies am Term von f_a erkennen kann.</td></tr>
<tr><td>Lösung</td><td>Der Parameter a tritt im Funktionsterm $f_a(x)$ nur im linearen Glied ax auf, in der 1. Ableitung nur als Konstante, ist also in der 2. Ableitung nicht mehr vorhanden.
Daher spielt der Parameter bei der Bestimmung der Nullstelle der 2. Ableitung, also im Hinblick auf die x-Koordinate des Wendepunkts, keine Rolle,
d. h., die x-Koordinate der Wendepunkte der Funktionenschar hängt nicht vom Parameter a ab.</td></tr>
<tr><td>i
(5 BE)</td><td>Ermitteln Sie die Koordinaten des Punkts, durch den alle Graphen der Schar verlaufen. Bestimmen Sie den Wert von a so, dass sich die Graphen G_a und G_3 in diesem Punkt senkrecht schneiden.</td></tr>
<tr><td>Lösung</td><td>• Bestimmen eines gemeinsamen Punkts der Graphen der Funktionenschar
Untersucht wird, wann für unterschiedliche Parameterwerte a_1 und a_2 gilt:
$f_{a1}(x) = f_{a2}(x)$, also $\frac{1}{4} x^3 - 3x^2 + a_1x - 5 = \frac{1}{4} x^3 - 3x^2 + a_2x - 5$
$\Leftrightarrow a_1x = a_2x \Leftrightarrow x \cdot (a_1 - a_2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (da $a_1 \neq a_2$, also $a_1 - a_2 \neq 0$)</td></tr>
</table>

	Wegen $f_a(0) = -5$ gilt daher: Alle Graphen der Funktionenschar verlaufen durch den Punkt (0 | -5). • *Bestimmen der Steigung von G_3 an der Stelle $x = 0$* $f_3'(x) = \frac{3}{4} x^2 - 6x + 3$; $f_3'(0) = 3$ • *Bestimmen eines G_3 senkrecht schneidenden Graphen der Funktionenschar* Zwei Graphen schneiden einander senkrecht in einem Punkt, wenn dort für die Steigungen m_1 und m_2 gilt: $m_1 \cdot m_2 = -1$. Aus $m_1 = 3$ (für $a_1 = 3$) folgt daher $m_2 = -\,^1/_3$ und damit $a_2 = -^1/_3$, d. h., die Graphen von G_3 und $G_{-1/3}$ schneiden sich im Punkt (0 | -5) im rechten Winkel.
j (4 BE)	Untersuchen Sie rechnerisch, für welche Werte von a der Graph G_a keinen Punkt besitzt, in dem die Tangente parallel zur x-Achse verläuft.
Lösung	Eine Tangente verläuft genau dann parallel zur x-Achse, wenn deren Steigung gleich null ist. $f_a'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{4} x^2 - 6x + a = 0 \Leftrightarrow x^2 - 8x + {}^4/_3\, a = 0 \Leftrightarrow (x-4)^2 = 16 - {}^4/_3\, a$ Diese quadratische Gleichung hat keine Lösung, falls die rechte Seite negativ ist: $16 - {}^4/_3\, a < 0 \Leftrightarrow 16 < {}^4/_3\, a \Leftrightarrow a > 12$ Für $a > 12$ besitzt der Graph G_a keinen Punkt, in dem die Tangente parallel zur x-Achse verläuft.
2	Eine vertikal stehende Getränkedose hat die Form eines geraden Zylinders. Die Lage des gemeinsamen Schwerpunkts S von Dose und enthaltener Flüssigkeit hängt von der Füllhöhe der Flüssigkeit über dem Dosenboden ab. Ist die Dose vollständig gefüllt, so beträgt die Füllhöhe 15 cm (vgl. Abbildung 2).  Abb. 2 Abbildung 3 zeigt den Graphen G_h der Funktion h, die für $0 \le x \le 15$ die Höhe des Schwerpunkts S über dem Dosenboden in Zentimetern angibt; dabei ist x die Füllhöhe in Zentimetern. G_h hat den Tiefpunkt $(3\,\|\,3)$.  Abb. 3
a (2 BE)	Ermitteln Sie grafisch die Füllhöhen, bei denen der Schwerpunkt auf halber Höhe der Dose liegt.

Lösung	Die halbe Dosenhöhe beträgt ½ · 15 cm = 7,5 cm. Aus der Grafik kann man ablesen, dass die Bedingung h(x) = 7,5 ungefähr an den Stellen x = 0 (Dose leer) bzw. x = 15 (Dose vollständig gefüllt) erfüllt ist.
b (4 BE)	Die zunächst leere Dose wird langsam mit Flüssigkeit gefüllt, bis die maximale Füllhöhe von 15 cm erreicht ist. Beschreiben Sie die Bewegung des Schwerpunkts S während des Füllvorgangs. Stellen Sie für den Moment, in dem sich der Schwerpunkt in seiner geringsten Höhe befindet, Dose, Füllhöhe und Schwerpunkt schematisch dar und beschreiben Sie die Besonderheit dieser Situation.
Lösung	Aus dem Verlauf des Graphen kann man ablesen: G_h ist streng monoton fallend für 0 < x < 3 und streng monoton steigend für 3 < x < 15. Der Tiefpunkt hat die Koordinaten (3 | 3), d. h., der Schwerpunkt einer bis zur Füllhöhe von 3 cm gefüllten Dose hat ihren Schwerpunkt in 3 cm Höhe, d. h. in Höhe der Oberfläche der Flüssigkeit. 
c (4 BE)	Für die Funktion h gilt $h(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}+\frac{8}{x+1}$. Bestimmen Sie rechnerisch die Füllhöhen, bei denen der Schwerpunkt 4 cm über dem Dosenboden liegt.
Lösung	$h(x)=4 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x-\frac{1}{2}+\frac{8}{x+1}=4 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x\cdot(x+1)-\frac{1}{2}\cdot(x+1)+8=4\cdot(x+1)$ $\Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}+8=4x+4 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2-4x=-\frac{7}{2} \Leftrightarrow x^2-8x+4^2=-7+4^2$ $\Leftrightarrow (x-4)^2=9 \Leftrightarrow x=1 \vee x=7$ Bei den Füllhöhen 1 cm bzw. 7 cm liegt der Schwerpunkt in der Höhe 4 cm.
d (4 BE)	Nun wird eine andere vertikal stehende Dose betrachtet, die ebenfalls die Form eines geraden Zylinders hat. Sowohl bei leerer als auch bei vollständig gefüllter Dose liegt der gemeinsame Schwerpunkt von Dose und enthaltener Flüssigkeit genau in der Mitte der Dose. Ist diese Dose vollständig gefüllt, so beträgt die Füllhöhe 11 cm. Die Höhe des Schwerpunkts wird durch eine Funktion k mit $k(x)=\frac{1}{2}x+s+\frac{t}{x+1}$ mit $s,t\in\mathbb{R}$ beschrieben. Bestimmen Sie die passenden Werte von s und t.
Lösung	Aus der Beschreibung ergeben sich zwei Bedingungen: leere Dose: k(0) = ½ · 11 = 5,5 und vollständig gefüllte Dose: k(11) = 5,5, also: k(0) = 5,5 ⇔ s + t = 5,5 und $k(11)=5{,}5 \Leftrightarrow 5{,}5+s+\frac{t}{12}=5{,}5$ Lösung des linearen Gleichungssystems, z. B. durch Einsetzen von $s=-\frac{t}{12}$ in die erste Gleichung: $t-\frac{t}{12}=5{,}5 \Leftrightarrow \frac{11}{12}t=5{,}5 \Leftrightarrow t=6$ und hieraus s = -½ .

Analytische Geometrie (grundlegendes Anforderungsniveau)

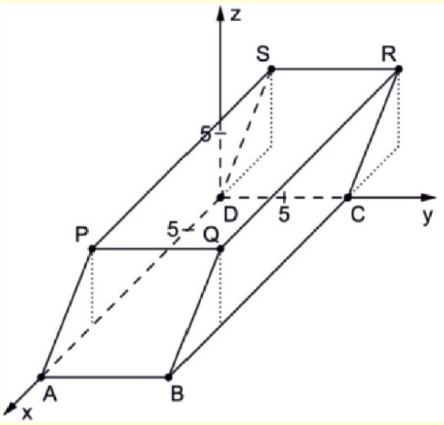
	In einem kartesischen Koordinatensystem ist der Quader ABCDPQRS mit $A(26\mid 18\mid 0)$, $B(18\mid 24\mid 0)$, $C(0\mid 0\mid 0)$, $D(8\mid -6\mid 0)$ und $P(26\mid 18\mid 10)$ gegeben. ABCD ist die Grundfläche des Quaders.
a (3 BE)	Zeigen Sie, dass die Seitenfläche ABQP ein Quadrat ist.
Lösung 2nd table	Da eine Seitenfläche eines Quaders betrachtet wird, ist ABQP ein Rechteck. Daher ist nur zu zeigen, dass zwei benachbarte Seiten gleich lang sind: $\left\lvert\overrightarrow{AB}\right\rvert = \left\lvert\begin{pmatrix}18\\24\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}26\\18\\0\end{pmatrix}\right\rvert = \left\lvert\begin{pmatrix}-8\\6\\0\end{pmatrix}\right\rvert = \sqrt{(-8)^2+6^2+0^2} = 10$ $\left\lvert\overrightarrow{AP}\right\rvert = \left\lvert\begin{pmatrix}26\\18\\10\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}26\\18\\0\end{pmatrix}\right\rvert = \left\lvert\begin{pmatrix}0\\0\\10\end{pmatrix}\right\rvert = \sqrt{0^2+0^2+10^2} = 10$ Die Länge eines Vektors kann *grundsätzlich* (nicht unbedingt in diesem einfachen Fall) auch mithilfe der *expr-eval*-Option des WTR berechnet werden: Man definiert den Term (*expr*), gibt nacheinander die Werte für die Variablen x, y, z ein und dann wird der Wert des Term automatisch bestimmt: 
b (3 BE)	Stellen Sie den Quader in einem Koordinatensystem grafisch dar.
Lösung	

<table>
<tr><td>c
(3 BE)</td><td>Die Seitenfläche ABQP liegt in einer Ebene E. Ermitteln Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform.
(zur Kontrolle: $E: 3x+4y-150=0$)</td></tr>
<tr><td>Lösung</td><td>Ausgehend vom Punkt A wird die Ebene aufgespannt durch die Richtungsvektoren
$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}-8\\6\\0\end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AP}=\begin{pmatrix}0\\0\\10\end{pmatrix}$, also
E: $\vec{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\overrightarrow{OA}+r\cdot\overrightarrow{AB}+s\cdot\overrightarrow{AP}=\begin{pmatrix}26\\18\\0\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-8\\6\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}26-8r\\18+6r\\10s\end{pmatrix}$
Alternative 1: Lösung des lineares Gleichungssystems $\left|\begin{array}{r}x=26-8r\\y=18+6r\\z=10s\end{array}\right|$
Addiert man das 4-fache der 2. Gleichung zum 3-fachen der 1. Gleichung, so erhält man: 4y + 3x = 4 · 18 + 3 · 26 = 150
Alternative 2: Bestimmen eines Normalenvektors zu den Richtungsvektoren von E:
Offensichtlich gilt für den Vektor $\vec{n}=\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}$, dass das Skalarprodukt mit den beiden Richtungsvektoren null ergibt:
$\vec{n}*\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}-8\\6\\0\end{pmatrix}=-24+24=0$ und $\vec{n}*\overrightarrow{AP}=\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}0\\0\\10\end{pmatrix}=0\cdot$
Hieraus ergibt sich dann eine Koordinatengleichung der Ebene durch
$\vec{n}*\vec{x}=\vec{n}*\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}26\\18\\0\end{pmatrix}=150$, also   E: 3x + 4y = 150.
Alternative 3: Einsetzen der Koordinaten von drei Punkten der Ebene
Eine Ebene ist eindeutig bestimmt durch drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen. Einsetzen der Koordinaten der Punkte A, B und P in die allgemeine Ebenengleichung E: ax + by + cz = d ergibt:
$\left|\begin{array}{r}26a+18b=d\\18a+24b=d\\26a+18b+10c=d\end{array}\right|\Leftrightarrow\left|\begin{array}{r}104a+72b=4d\\54a+72b=3d\\d+6c=d\end{array}\right|\Leftrightarrow\left|\begin{array}{r}50a=d\\54a+72b=3d\\c=0\end{array}\right|\Leftrightarrow\left|\begin{array}{r}50a=d\\54a+72b=150a\\c=0\end{array}\right|$
$\Leftrightarrow\left|\begin{array}{r}50a=d\\72b=96a\\c=0\end{array}\right|\Leftrightarrow\left|\begin{array}{r}50a=d\\3b=4a\\c=0\end{array}\right|$
Wählt man für a den Wert a = 3, dann folgt: b = 4 und d = 150.</td></tr>
<tr><td>d
(2 BE)</td><td>Die Seitenfläche CDSR liegt in einer Ebene F. Begründen Sie ohne zu rechnen, dass F durch die Gleichung $3x+4y=0$ beschrieben werden kann.</td></tr>
<tr><td>Lösung</td><td>Die Ebene F liegt als „gegenüberliegende“ Seitenfläche eines Quaders parallel zu E; daher kann F durch die Koordinatengleichung 3x + 4y = c beschrieben werden. Da der Punkt C der Ursprung des Koordinatensystems ist und in der Ebene F enthalten ist, ergibt sich für c der Wert 0.</td></tr>
</table>

	Der Quader beschreibt modellhaft den Grundkörper eines Kunstwerks aus massivem Beton, der auf einer horizontalen Fläche steht. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht 0,1 m in der Wirklichkeit. Der Grundkörper ist mit einer dünnen geradlinigen Bohrung versehen, die im Modell vom Punkt $G(17\|8\|10)$ der Deckfläche aus in Richtung des Punkts $H(20\|10\|4)$ der Seitenfläche DAPS verläuft. In der Bohrung ist eine gerade Stahlstange mit einer Länge von 1,4 m so befestigt, dass die Stange zu drei Vierteln ihrer Länge aus der Deckfläche herausragt und in einer Höhe von 0,9 m über der Deckfläche endet. Ihr Durchmesser wird im Modell vernachlässigt.
e (5 BE)	Bestimmen Sie im Modell die Koordinaten des Punkts, in dem die Stange in der Bohrung endet.
Lösung	Die Gerade g durch G und H lässt sich mithilfe einer Parameterdarstellung beschreiben: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}17\\8\\10\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}20-17\\10-8\\4-10\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}17\\8\\10\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}3\\2\\-6\end{pmatrix}$ wobei die Strecke GH die Länge |GH| = $\sqrt{3^2+2^2+(-6)^2} = \sqrt{49} = 7$ hat, d. h. in der Realität eine Länge von 0,7 m. Ein Viertel der Stange steckt im Betonkörper, also mit einer Länge von ¼ · 1,40 m = 0,35 m. Die Bohrung endet also im Mittelpunkt K der Strecke GH: $\overrightarrow{OK} = \begin{pmatrix}17\\8\\10\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}3\\2\\-6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}18{,}5\\9\\7\end{pmatrix}.$ Der Mittelpunkt K der Strecke GH kann einfacher auch so bestimmt werden, dass man die Mittelwerte der Koordinaten der Punkte G und H bildet: K (½ · (17+20) | ½ · (8+10) | ½ · (10+4)) = (18,5 | 9 | 6).
Hinweis	Die Information, dass die Stange in einer Höhe von 9 LE oberhalb der Deckfläche endet, also die z-Koordinate 10 + 9 = 19 hat, wird hier nicht benötigt. Zur Kontrolle kann man aber wie folgt rechnen: Bezeichnet man das Ende der Stange mit X, dann liegt dieses ¾ · 14 = 10,5 LE von G entfernt, und zwar in entgegengesetzter Richtung. Vom Punkt G aus muss also das (-1,5)-fache des Richtungsvektors addiert werden: $\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix}17\\8\\10\end{pmatrix} - \frac{3}{2}\cdot\begin{pmatrix}3\\2\\-6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}15{,}5\\5\\19\end{pmatrix}.$
f (4 BE)	Auf der Deckfläche des Grundkörpers steht ein Stahlzylinder mit einem Radius von 0,3 m und einer Höhe von 0,5 m. Der Mittelpunkt der Grundfläche des Zylinders ist im Modell der Punkt M. Beschreiben Sie, wie man im Modell rechnerisch überprüfen könnte, ob die Stange den Stahlzylinder am Rand seiner Deckfläche berührt, wenn die Koordinaten von M bekannt wären.
Lösung	Aus den Koordinaten des Punktes M lassen sich durch Erhöhen der z-Koordinate um 5 LE die Koordinaten des Mittelpunktes N der Deckfläche des Zylinders bestimmen. Dann bestimmt man denjenigen Punkt L der Geraden g, der die z-Koordinate 10 + 5 = 15 hat, also die Bedingung $10 - 6r = 15$ erfüllt . Dann bestimmt man den Abstand |NL|. Falls dieser genau gleich dem Radius r = 3 LE des Stahlzylinders ist, berührt die Stange den Stahlzylinder.

Hinweis	Aus der Bedingung 10 – 6r = 15 erhält man den Parameterwert r = - $^5/_6$ und hieraus die Koordinaten des Punktes L: $\overrightarrow{OL} = \begin{pmatrix}17\\8\\10\end{pmatrix} - \frac{5}{6}\cdot\begin{pmatrix}3\\2\\-6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}14{,}5\\6\frac{1}{3}\\15\end{pmatrix}$. Der Mittelpunkt N der Deckfläche des Zylinders hat die Koordinaten (n_1 | n_2 | 15). Im Falle des Berührens wird dabei die Bedingung $(14{,}5 - n_1)^2 + (6\frac{1}{3} - n_2)^2 = r^2 = 9$ erfüllt.

Analytische Geometrie (erhöhtes Anforderungsniveau)

1	In einem kartesischen Koordinatensystem ist der Körper ABCDPQRS mit $A(28\|0\|0)$, $B(28\|10\|0)$, $C(0\|10\|0)$, $D(0\|0\|0)$ und $P(20\|0\|6)$ gegeben. Der Körper ist ein schiefes Prisma, die Grundfläche ABCD, die Deckfläche PQRS und die vier Seitenflächen sind also Parallelogramme.
a (3 BE)	Zeigen Sie, dass die Seitenfläche ABQP quadratisch ist.
Lösung 2nd table	Da eine Seitenfläche eines schiefen Prismas betrachtet wird, ist ABQP ein Parallelogramm. Daher ist zu zeigen, dass zwei benachbarte Seiten gleich lang sind und dass sie orthogonal zueinander sind. • *Bestimmung der Länge* $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \left\|\begin{pmatrix}28\\10\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}28\\0\\0\end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix}0\\10\\0\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{0^2+10^2+0^2} = 10$ $\left\|\overrightarrow{AP}\right\| = \left\|\begin{pmatrix}20\\0\\6\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}28\\0\\0\end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix}-8\\0\\6\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{(-8)^2+0^2+6^2} = 10$ Die Länge eines Vektors kann *grundsätzlich* (nicht unbedingt in diesem einfachen Fall) auch mithilfe der *expr-eval*-Option des WTR berechnet werden, vgl. Aufgabe mit grundlegendem Anforderungsniveau). • *Nachweis der Orthogonalität* $\overrightarrow{AB} * \overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix}0\\10\\0\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}-8\\0\\6\end{pmatrix} = 0$
b (3 BE)	Stellen Sie das Prisma in einem Koordinatensystem grafisch dar.
	

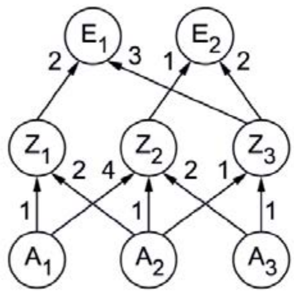
c (3 BE)	Die Seitenfläche ABQP liegt in einer Ebene E. Ermitteln Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform. *(zur Kontrolle: $E: 3x + 4z - 84 = 0$)*
Lösung	Ausgehend vom Punkt A wird die Ebene aufgespannt durch die Richtungsvektoren $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$, also E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 28 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28-8s \\ 10r \\ 6s \end{pmatrix}$ *Alternative 1*: Lösung des lineares Gleichungssystems $\left\lvert \begin{matrix} x = 28-8s \\ y = 10r \\ z = 6s \end{matrix} \right\rvert$ Ersetzt man in der 1. Gleichung s durch $^1/_6 \cdot z$ (vgl. 3. Gleichung), so erhält man: $x = 28 - {}^4/_3 \cdot z \Leftrightarrow 3x + 4z = 84$ *Alternative 2*: Bestimmen eines Normalenvektors zu den Richtungsvektoren von E: Offensichtlich gilt für den Vektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$, dass das Skalarprodukt mit den beiden Richtungsvektoren null ergibt: $\vec{n} * \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ und $\vec{n} * \overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = -24 + 24 = 0 \cdot$ Hieraus ergibt sich dann eine Koordinatengleichung der Ebene durch $\vec{n} * \vec{x} = \vec{n} * \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 28 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 84$, also E: 3x + 4z= 84. *Alternative 3*: Einsetzen der Koordinaten von drei Punkten der Ebene Eine Ebene ist eindeutig bestimmt durch drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen. Einsetzen der Koordinaten der Punkte A, B und P in die allgemeine Ebenengleichung E: ax + by + cz = d ergibt: $\left\lvert \begin{matrix} 28a = d \\ 28a + 10b = d \\ 20a + 6c = d \end{matrix} \right\rvert \Leftrightarrow \left\lvert \begin{matrix} 28a = d \\ 28a + 10b = 28a \\ 20a + 6c = 28a \end{matrix} \right\rvert \Leftrightarrow \left\lvert \begin{matrix} 28a = d \\ b = 0 \\ 3c = 4a \end{matrix} \right\rvert \cdot$ Wählt man für a den Wert a = 3, dann folgt: c = 4 und d = 84.
d (2 BE)	Die Seitenfläche CDSR liegt in einer Ebene F. Begründen Sie ohne zu rechnen, dass F durch die Gleichung $3x + 4z = 0$ beschrieben werden kann.
Lösung	Die Ebene F liegt als „gegenüberliegende" Seitenfläche eines schiefen Prismas parallel zu E; daher kann F durch die Koordinatengleichung 3x + 4y = c beschrieben werden. Da der Punkt D der Ursprung des Koordinatensystems ist und in der Ebene F enthalten ist, ergibt sich für c der Wert 0.

<table>
<tr><td></td><td>Das Prisma beschreibt modellhaft den Grundkörper eines Kunstwerks aus massivem Beton, der auf einer horizontalen Fläche steht. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht 0,1 m in der Wirklichkeit.
Der Grundkörper ist mit einer dünnen geradlinigen Bohrung versehen, die im Modell vom Punkt $G(11|3|6)$ der Deckfläche aus in Richtung des Schnittpunkts der Diagonalen der Grundfläche verläuft. In der Bohrung ist eine gerade Stahlstange mit einer Länge von 1,4 m so befestigt, dass die Stange zu drei Vierteln ihrer Länge aus der Deckfläche herausragt und in einer Höhe von 0,9 m über der Deckfläche endet. Ihr Durchmesser wird im Modell vernachlässigt.</td></tr>
<tr><td>e
(6 BE)</td><td>Bestimmen Sie im Modell die Koordinaten des Punkts, in dem die Stange in der Bohrung endet.</td></tr>
<tr><td>Lösung</td><td>Der Schnittpunkt H der Diagonalen der Grundfläche (ein Parallelogramm) ist Mittelpunkt der Strecke BD und hat die Koordinaten H (14 | 5 | 0).
Die Gerade g durch G und H lässt sich mithilfe einer Parameterdarstellung beschreiben: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 14-11 \\ 5-3 \\ 0-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$
wobei die Strecke GH die Länge $|GH| = \sqrt{3^2 + 2^2 + (-6)^2} = \sqrt{49} = 7$ hat, d. h. in der Realität eine Länge von 0,7 m.
Ein Viertel der Stange steckt im Betonkörper, also mit einer Länge von ¼ · 1,40 m = 0,35 m. Die Bohrung endet also im Mittelpunkt N der Strecke GH:
$\overrightarrow{ON} = \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12{,}5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$
Der Mittelpunkt N der Strecke GH kann einfacher auch so bestimmt werden, dass man die Mittelwerte der Koordinaten der Punkte G und H bildet:
N (½ · (11+14) | ½ · (3+5) | ½ · (6+0)) = (12,5 | 4 | 3).</td></tr>
<tr><td>Hinweis</td><td>Die Information, dass die Stange in einer Höhe von 9 LE oberhalb der Deckfläche endet, also die z-Koordinate 6 + 9 = 15 hat, wird hier nicht benötigt (aber bei einer der Lösungsalternativen von Teilaufgabe g).
Zur Kontrolle kann man hier wie folgt rechnen: Bezeichnet man das Ende der Stange mit X, dann liegt dieses ¾ · 14 = 10,5 LE von G entfernt, und zwar in entgegengesetzter Richtung. Vom Punkt G aus muss also das (-1,5)-fache des Richtungsvektors addiert werden: $\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} - \frac{3}{2} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6{,}5 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix}.$</td></tr>
<tr><td>f
(4 BE)</td><td>Auf der Deckfläche des Grundkörpers liegt eine Stahlkugel mit einem Durchmesser von 0,8 m. Im Modell berührt die Kugel die Deckfläche des Prismas im Punkt K. Beschreiben Sie, wie man im Modell rechnerisch überprüfen könnte, ob die Stahlkugel die Stange berührt, wenn die Koordinaten von K bekannt wären.</td></tr>
<tr><td>Lösung</td><td>Aus den Koordinaten des Punktes K lassen sich durch Erhöhen der z-Koordinate um r = ½ · 8 LE = 4 LE die Koordinaten des Mittelpunktes M der Kugel bestimmen.
Dann bestimmt man Abstand des Punktes M von der Geraden g.
Falls dieser genau gleich dem Radius r = 4 LE der Stahlkugel ist, berührt die Stange die Stahlkugel.</td></tr>
</table>

g (4 BE)	Zum Schutz vor Beschädigungen während einer Baumaßnahme soll diejenige Seitenfläche des Kunstwerks, die im Modell durch das Quadrat ABQP dargestellt wird, mit einer rechteckigen Holzplatte so versehen werden, dass diese am Kunstwerk anliegt, sowohl unten als auch seitlich bündig mit diesem abschließt und in einer Höhe von 1 m über der Deckfläche endet. Untersuchen Sie, ob die Lage der Stahlstange das Anbringen der Holzplatte zulässt.
Lösung	Um die Lage der Stange und der Holzplatte zu untersuchen, wird der Schnittpunkt der Geraden g mit der Ebene E bestimmt. Gemeinsame Punkte der Ebene E und der Geraden g erfüllen sowohl die Koordinatengleichung der Ebene wie auch die Parameterdarstellung der Geraden: Einsetzen der Koordinaten eines Punktes der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11+3r \\ 3+2r \\ 6-6r \end{pmatrix}$ in die Koordinatengleichung der Ebene E: 3x + 4y = 84 ergibt: $3 \cdot (11 + 3r) + 4 \cdot (6 - 6r) = 84 \Leftrightarrow 33 + 9r + 24 - 24r = 84 \Leftrightarrow -15r = 27 \Leftrightarrow r = -1{,}8$ *Alternative 1*: Vergleich der Lage des Schnittpunkts mit der Kante der Holzplatte Der Schnittpunkt S hat die Koordinaten $S\,(11 - 3 \cdot 1{,}8 \mid 3 - 2 \cdot 1{,}8 \mid 6 + 6 \cdot 1{,}8) = (5{,}6 \mid -0{,}6 \mid 16{,}8)$. Ein Punkt, der 1 m oberhalb der Deckfläche liegt, hat die z-Koordinate 6 + 10 = 16. Die Stange schneidet also die Ebene E oberhalb der Holzplatte, d. h., die Lage der Stange lässt das Anbringen der Holzplatte zu. *Alternative 2*: Untersuchung der Lage der Endpunkte der Stange Wie im Hinweis zur Lösung von Teilaufgabe e) gezeigt wurde, werden die Endpunkte der Stange durch die Parameterwerte $-1{,}5 \le r \le 0{,}5$ beschrieben, d. h., der Parameterwert t = -1,8 des Schnittpunkts liegt außerhalb dieses Intervalls, die Stange reicht also nicht bis an die Ebene heran, in der die Holzplatte liegt.

Lineare Algebra (grundlegendes Anforderungsniveau)

Ein Industriebetrieb fertigt gemäß dem abgebildeten Verflechtungsgraphen aus den Ausgangsprodukten A_1, A_2 und A_3 zunächst die Zwischenprodukte Z_1, Z_2 sowie Z_3 und daraus anschließend die beiden Endprodukte E_1 sowie E_2.



1

Stückzahlen der Ausgangsprodukte, der Zwischenprodukte und der Endprodukte sollen jeweils durch einen Spaltenvektor dargestellt werden. Die Verflechtungsmatrix AZ gibt zu jedem Zwischenprodukt die Stückzahlen der für ein Stück erforderlichen Ausgangsprodukte an, die Verflechtungsmatrix ZE entsprechend zu jedem Endprodukt die Stückzahlen der erforderlichen Zwischenprodukte.

a (2 BE)

Geben Sie AZ und ZE an.

Lösung

In tabellarischer Form kann der Bedarf an Ausgangsprodukten für die Herstellung des Zwischenprodukts bzw. der Bedarf an Zwischenprodukten für die Herstellung der Endprodukte wie folgt dargestellt werden:

AZ	Z_1	Z_2	Z_3
A_1	1	4	0
A_2	2	1	1
A_3	0	2	1

ZE	E_1	E_2
Z_1	2	0
Z_2	0	1
Z_3	3	2

Hieraus ergeben sich die beiden Matrizen

$$AZ = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad ZE = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Hinweis

Der gesamte Produktionsprozess kann auch in nur *einer* Tabelle dargestellt werden; dabei steht die Verflechtungsmatrix AE (Bedarf an Ausgangsprodukten für die Herstellung von Endprodukten; vgl. Teilaufgabe b) im unteren Teil der Tabelle:

			ZE	E_1	E_2
			Z_1	2	0
			Z_2	0	1
AZ	Z_1	Z_2	Z_3	3	2
A_1	1	4	0	2	4
A_2	2	1	1	7	3
A_3	0	2	1	3	4

.

b (4 BE)

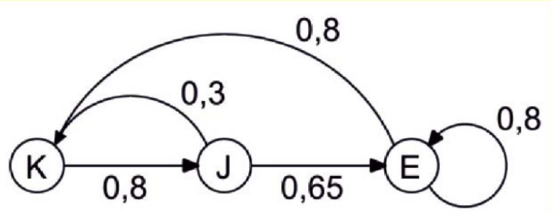
Dem Industriebetrieb liegt eine Bestellung von 500 E_1 und 400 E_2 vor. Berechnen Sie die Stückzahlen der dafür erforderlichen Ausgangsprodukte.

Lösung	Um die Stückzahlen der erforderlichen Ausgangsprodukte zu ermitteln, muss die Verflechtungsmatrix AE mit dem Auftragsvektor $\vec{v}=\begin{pmatrix}500\\400\end{pmatrix}$ multipliziert werden: $AE=\begin{pmatrix}1&4&0\\2&1&1\\0&2&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&0\\0&1\\3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&4\\7&3\\3&4\end{pmatrix}$ und $AE\cdot\vec{v}=\begin{pmatrix}2&4\\7&3\\3&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}500\\400\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2600\\4700\\3100\end{pmatrix}$
c (4 BE)	Den folgenden Tabellen können für die Ausgangsprodukte und die Zwischenprodukte die dem Betrieb entstehenden Anschaffungskosten bzw. Fertigungskosten pro Stück entnommen werden: Tabelle 1: A_1 / A_2 / A_3 — Anschaffungskosten: 2 € / 1 € / 3 € Tabelle 2: Z_1 / Z_2 / Z_3 — Fertigungskosten: 3,5 € / 5 € / 2 € Die Kosten für die Fertigung eines Endprodukts E_1 aus den Zwischenprodukten betragen sieben Euro. Ermitteln Sie die Kosten, die dem Betrieb für die Herstellung eines Endprodukts E_1 für Anschaffung und Fertigung insgesamt entstehen.
Lösung	Für die Herstellung einer Einheit des Endprodukts E_1 werden benötigt 2 Einheiten des Ausgangsprodukts A_1, 7 Einheiten des Ausgangsprodukts A_2 und 3 Einheiten des Ausgangsprodukts A_3 (vgl. 1. Spalte der Matrix AE) sowie 2 Einheiten des Zwischenprodukts Z_1 und 3 Einheiten des Zwischenprodukts Z_3 (vgl. 1. Saplte der Matrix ZE). Die Kosten betragen daher (2 · 2 € + 7 · 1 € + 3 · 3 €) + (2 · 3,50 € + 0 · 5 € + 3 · 2 €) + 7 € = 40 € Die Berechnung kann auch mithilfe des Skalarprodukts der Vektoren berechnet werden: $\begin{pmatrix}2\\7\\3\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}3{,}5\\5\\2\end{pmatrix}+7=40$ Die Herstellungskosten für 1 Einheit des Endprodukts E_1 betragen insgesamt 40 €.
Hinweis	Die Gesamtkosten für je eine Einheit der Endprodukte E_1 und E_2 berechnen sich wie folgt: $\begin{pmatrix}2&1&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&4\\7&3\\3&4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3{,}5&5&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&0\\0&1\\3&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}7&a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}40&32+a\end{pmatrix}$ (a gibt die Fertigungskosten einer Einheit des Endprodukts E_2 aus den Zwischenprodukten an).
d (2 BE)	Der Betrieb hat 46 Z_1, 64 Z_2 und 81 Z_3 auf Lager. Bestimmen Sie, wie viele Endprodukte E_1 sich daraus höchstens fertigen lassen.
Lösung	Für die Herstellung des Endprodukts E_1 werden 2 Einheiten des Zwischenprodukts Z_1 benötigt und 3 Einheiten des Zwischenprodukts Z_3. Aus 46 Einheiten von Z_1 können maximal 46:2 = 23 Einheiten von E_1 hergestellt werden, aus 81 Einheiten Z_3 höchstens 81:3 = 27 Einheiten. Demnach können aus den Beständen maximal 23 Einheiten von E_1 gefertigt werden.

e (2 BE)	Beschreiben Sie für jede der Matrizen AZ und ZE, wie die Anzahl der Zeilen und die Anzahl der Spalten verändert werden müssen, wenn aus den Ausgangsprodukten ein weiteres Zwischenprodukt Z_4 gefertigt wird, das für die Herstellung der Endprodukte verwendet wird.
Lösung	Die 3x3-Matrix AZ muss noch um eine 4. Spalte ergänzt werden, die 3x2-Matrix ZE um eine 4. Zeile.
2	Unter geänderten Produktionsbedingungen gibt die Verflechtungsmatrix $AE = \begin{pmatrix} 2 & a \\ 7 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ zu jedem der Endprodukte E_1 und E_2 die Stückzahlen der für ein Stück erforderlichen Ausgangsprodukte A_1, A_2 und A_3 an.
a (2 BE)	Beschreiben Sie die Bedeutung der Werte der ersten Spalte sowie der Werte der zweiten Zeile von AE im Sachzusammenhang.
Lösung	In der 1. Spalte der Matrix AE ist angegeben, wie viele Einheiten der Ausgangsprodukte A_1, A_2, A_3 für die Herstellung einer Einheit des Endprodukts E_1 erforderlich sind. In der 2. Spalte der Matrix AE ist angegeben, wie viele Einheiten des Ausgangsprodukts A_2 für die Herstellung der Endprodukte E_1 und E_2 benötigt werden.
b (3 BE)	Untersuchen Sie, ob es für den Parameter a einen Wert gibt, für den ein Lagerbestand von 750 A_1, 3400 A_2 und 2000 A_3 vollständig aufgebraucht wird und die Stückzahlen der daraus gefertigten Endprodukte E_1 und E_2 im Verhältnis 2:1 stehen.
Lösung	Bezeichnet man mit x die Anzahl der Einheiten des Endprodukts E_2 (und daher mit 2x die Anzahl der Einheiten des Endprodukts E_1), dann müssen folgende Bedingungen erfüllt sein: $\begin{pmatrix} 2 & a \\ 7 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2x \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 750 \\ 3400 \\ 2000 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\| \begin{matrix} 4x + ax = 750 \\ 14x + 3x = 3400 \\ 6x + 4x = 2000 \end{matrix} \right\| \Leftrightarrow \left\| \begin{matrix} 4x + ax = 750 \\ x = 200 \\ x = 200 \end{matrix} \right\| \Leftrightarrow \left\| \begin{matrix} 200a = -50 \\ x = 200 \\ x = 200 \end{matrix} \right\|$ Das lineare Gleichungssystem hat genau dann eine Lösung, wenn a = -¼. Ein negativer Wert für a ist im Sachzusammenhang einer Verflechtung von Ausgangs- und Endprodukten nicht sinnvoll. Daher gibt es keinen Parameterwert a, der die Bedingungen erfüllt.

Lineare Algebra (erhöhtes Anforderungsniveau)

<table>
<tr><td>1</td><td>Betrachtet wird die Entwicklung einer Population weiblicher Tiere eines Wildtierbestands in einem großen, abgeschlossenen Gebiet. Die Entwicklung dieser weiblichen Tiere lässt sich in drei Lebensphasen einteilen: Nachkommen werden im Frühjahr geboren und im ersten Lebensjahr als Kitze sowie im Alter von einem Jahr als Jungtiere bezeichnet; Tiere ab einem Alter von zwei Jahren gelten als erwachsen.

In einem Modell werden Zusammensetzungen der Population durch Vektoren der Form $\begin{pmatrix} K \\ J \\ E \end{pmatrix}$ dargestellt, wobei K die Anzahl der Kitze, J die Anzahl der Jungtiere und E die Anzahl der erwachsenen Tiere bezeichnet. Zu Beginn der Beobachtung der Population wird deren Zusammensetzung durch einen Vektor $\overrightarrow{v_0}$ dargestellt. Die Entwicklung der Population von einem Jahr n zum nächsten Jahr lässt sich durch die Matrix $R = \begin{pmatrix} 0 & 0,3 & 0,8 \\ 0,8 & 0 & 0 \\ 0 & 0,65 & 0,8 \end{pmatrix}$ und die Gleichung $R \cdot \overrightarrow{v_n} = \overrightarrow{v_{n+1}}$ beschreiben.</td></tr>
<tr><td>a
(3 BE)</td><td>Stellen Sie die durch die Matrix R beschriebene Entwicklung in einem Übergangsdiagramm dar.</td></tr>
<tr><td>Lösung</td><td></td></tr>
<tr><td>b
(1 BE)</td><td>Geben Sie die Bedeutung des Werts 0,65 im Sachzusammenhang an.</td></tr>
<tr><td>Lösung</td><td>Durch den Koeffizienten 0,65 wird die Überlebenswahrscheinlichkeit vom Zustand J zum Zustand E beschrieben (vom Jungtier nach einem Jahr zu einem erwachsenen Tier nach 2 Jahren).</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Sechs, sieben und acht Jahre nach Beobachtungsbeginn lassen sich die Zusammensetzungen der Population im Modell durch folgende Vektoren darstellen:
$\overrightarrow{v_6} \approx \begin{pmatrix} 500 \\ 343 \\ 603 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{v_7} \approx \begin{pmatrix} 585 \\ 400 \\ 705 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{v_8} \approx \begin{pmatrix} 684 \\ 468 \\ 824 \end{pmatrix}$</td></tr>
<tr><td>a
(2 BE)</td><td>Berechnen Sie im Modell die Anzahl der Kitze, die Anzahl der Jungtiere und die Anzahl der erwachsenen Tiere neun Jahre nach Beobachtungsbeginn.</td></tr>
<tr><td>Lösung</td><td>$\overrightarrow{v_9} = \begin{pmatrix} 0 & 0,3 & 0,8 \\ 0,8 & 0 & 0 \\ 0 & 0,65 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{v_8} = \begin{pmatrix} 0 & 0,3 & 0,8 \\ 0,8 & 0 & 0 \\ 0 & 0,65 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 684 \\ 468 \\ 824 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 800 \\ 547 \\ 963 \end{pmatrix}$</td></tr>
</table>

b
(3 BE)

Der folgenden Tabelle ist für drei Zeitpunkte jeweils zu entnehmen, um welchen Anteil die Anzahl aller Tiere der Population gegenüber dem Vorjahr zugenommen hat:

Zeitpunkt	sieben Jahre	acht Jahre	neun Jahre
	nach Beobachtungsbeginn		
Wachstum	17 %	17 %	17 %

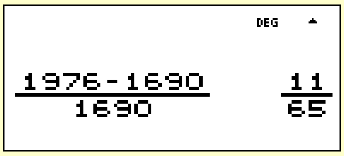
Bestätigen Sie rechnerisch den Wert für den Zeitpunkt acht Jahre nach Beobachtungsbeginn. Stellen Sie anhand der in der Tabelle angegebenen Werte eine Vermutung dazu auf, wie sich das Wachstum der Population ohne Verwendung von Matrizen näherungsweise beschreiben lässt.

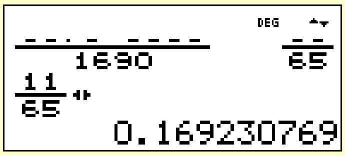
Lösung

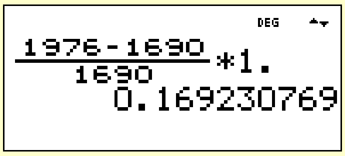
Nach 6 Jahren lebten insgesamt 500+343+603 = 1446 Tiere in der betrachteten Population, nach 7 Jahren 585+400+705 = 1690 Tiere und nach 8 Jahren 684+468+824 = 1976. (Nach 9 Jahren waren es insgesamt 800+547+963 = 2310 Tiere.)

Die Zuwachsrate im 8. Jahr war $\frac{1976-1690}{1690} \approx 0{,}17$.

Daher liegt die Vermutung nahe, dass sich der Tierbestand jeweils um 17 % erhöht, d. h. exponentiell mit dem Wachstumsfaktor 1,17 wächst.







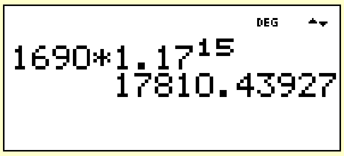
Hinweis zum Berechnen des Wachstumsfaktors: Der WTR gibt das Rechenergebnis in Bruchform an, durch Betätigen der Umwandeltaste als Dezimalzahl. Man kann diese Form direkt erhalten, indem man den Quotienten mit der Dezimalzahl 1.0 multipliziert.

c
(4 BE)

Berechnen Sie auf der Grundlage Ihrer Vermutung, auf wie viele Tiere die sieben Jahre nach Beobachtungsbeginn vorhandene Population nach weiteren 15 Jahren angewachsen ist. Geben Sie einen Grund dafür an, dass dieser Wert der Realität möglicherweise nicht gerecht wird.

Lösung

Hier ergibt sich $1690 \cdot 1{,}17^{15} \approx 17810$. Eine so langfristige Prognose erscheint unangemessen, da unvorhersehbare Ereignisse, wie z. B. Infektionen, dazwischenkommen können.



3

Aufgrund einer Krankheit halbiert sich die Überlebensrate der Kitze. Die Entwicklung der Population von einem Jahr zum nächsten Jahr kann nun im Modell durch die Matrix $M = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}3 & 0{,}8 \\ 0{,}4 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}65 & 0{,}8 \end{pmatrix}$ beschrieben werden.

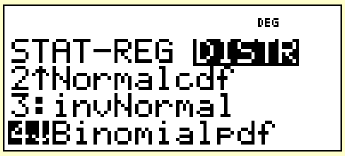
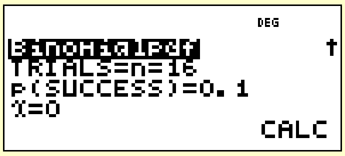
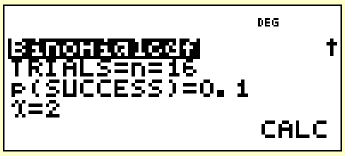
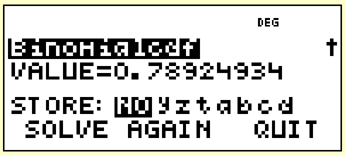
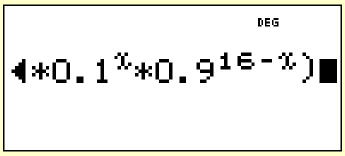
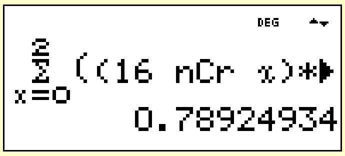
a
(2 BE)

Es gilt $R \cdot M = \begin{pmatrix} 0{,}12 & 0{,}52 & 0{,}64 \\ 0 & 0{,}24 & 0{,}64 \\ a & 0{,}52 & 0{,}64 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie den Wert von a.

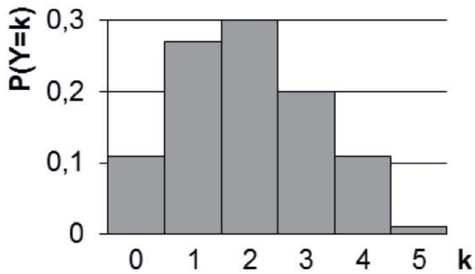
Lösung	$R\cdot M=\begin{pmatrix}0&0,3&0,8\\0,8&0&0\\0&0,65&0,8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0,3&0,8\\0,4&0&0\\0&0,65&0,8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,12&0,52&0,64\\0&0,24&0,64\\0,26&0,52&0,64\end{pmatrix}$ Der Wert des gesuchten Koeffizienten beträgt 0,26.
b (3 BE)	Interpretieren Sie den Term $R\cdot M\cdot\overrightarrow{v_9}$ hinsichtlich der Entwicklung der Population.
Lösung	Der Vektor $\overrightarrow{v_9}$ beschreibt die Population neun Jahre nach Beginn der Beobachtungen. $M\cdot\overrightarrow{v_9}$ gibt dann die aufgrund der Krankheit veränderte Population an. $R\cdot M\cdot\overrightarrow{v_9}=\begin{pmatrix}0,12&0,52&0,64\\0&0,24&0,64\\0,26&0,52&0,64\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}800\\547\\963\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}996\\748\\1114\end{pmatrix}$ beschreibt dann die Zusammensetzung der Population nach 11 Jahren, wobei im 11. Jahr wieder die alten Übergangswahrscheinlichkeiten gelten. ((Hinweis: die Berechnung des Zustandsvektors ist nicht verlangt))
4	Um Schäden durch eine zu große Population zu vermeiden, untersucht eine Forschungsgruppe die Möglichkeit, den Tieren der Population ein Hormon zu verabreichen, das bei erwachsenen Tieren zu Unfruchtbarkeit führt. Obwohl dadurch bei den Jungtieren die Geburtenrate zunähme, bliebe durch diese Maßnahme die Anzahl der Tiere konstant. Ab dem Zeitpunkt der Verabreichung des Hormons ließe sich die Entwicklung der Population von einem Jahr zum nächsten Jahr im Modell durch die Matrix $H=\begin{pmatrix}0&1,25&0\\0,8&0&0\\0&0,65&0,8\end{pmatrix}$ beschreiben.
a (2 BE)	Zeigen Sie, dass sich eine Population, deren Zusammensetzung durch den Vektor $\overrightarrow{u_1}=\begin{pmatrix}250\\200\\650\end{pmatrix}$ dargestellt wird, im Modell von einem Jahr zum nächsten nicht verändert.
Lösung	$H\cdot\overrightarrow{u_1}=\begin{pmatrix}0&1,25&0\\0,8&0&0\\0&0,65&0,8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}250\\200\\650\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}250\\200\\650\end{pmatrix}=\overrightarrow{u_1}$
Hinweis	Die Eigenschaft gilt nicht für beliebige Vektoren: Aus der Bedingung $\begin{pmatrix}0&1,25&0\\0,8&0&0\\0&0,65&0,8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1,25y\\0,8x\\0,65y+0,8z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ ergibt sich ein lineares Gleichungssystem mit unendlich vielen Lösungen: $\begin{vmatrix}x-1,25y=0\\0,8x-y=0\\0,65y-0,2z=0\end{vmatrix}\Leftrightarrow\begin{vmatrix}x=1,25y\\z=3,25y\end{vmatrix}$. Für y = 200 ergibt sich der o. a. Vektor.

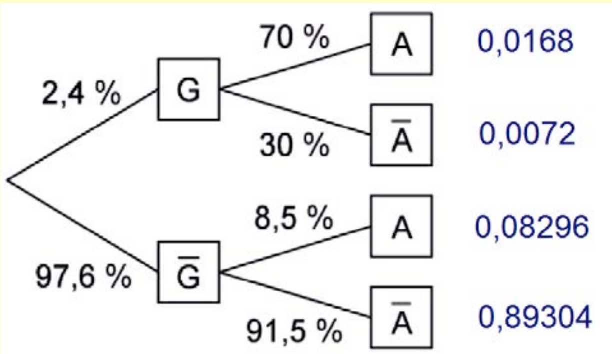
b (5 BE)	Zum Zeitpunkt der Verabreichung des Hormons soll die Zusammensetzung der Population durch einen Vektor $\overrightarrow{w_0} = r \cdot \overrightarrow{u_1} + s \cdot \overrightarrow{u_2}$ dargestellt werden; dabei ist $\overrightarrow{u_1} = \begin{pmatrix} 250 \\ 200 \\ 650 \end{pmatrix}$ sowie $\overrightarrow{u_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 \end{pmatrix}$ und es gilt $H \cdot \overrightarrow{u_2} = 0{,}8 \cdot \overrightarrow{u_2}$. Zeigen Sie, dass die Zusammensetzung der Population ein Jahr später durch den Vektor $\overrightarrow{w_1} = r \cdot \overrightarrow{u_1} + 0{,}8 \cdot s \cdot \overrightarrow{u_2}$ beschrieben wird. Weisen Sie nach, dass sich die Population mit der Zeit einer Zusammensetzung nähert, die durch einen bestimmten Vektor dargestellt wird, und geben Sie diesen Vektor an.
Lösung	Bestimmung des Zustandsvektors $\overrightarrow{w_1}$ nach einem Jahr: Wegen der Linearität der Matrixmultiplikation gilt: $\overrightarrow{w_1} = H \cdot \overrightarrow{w_0} = H \cdot r \cdot \overrightarrow{u_1} + H \cdot s \cdot \overrightarrow{u_2} = r \cdot H \cdot \overrightarrow{u_1} + s \cdot H \cdot \overrightarrow{u_2} = r \cdot \overrightarrow{u_1} + s \cdot 0{,}8 \cdot \overrightarrow{u_2}$ Bestimmung des Zustandsvektors $\overrightarrow{w_n}$ nach n Jahren: $\overrightarrow{w_n} = H^n \cdot \overrightarrow{w_0} = H^n \cdot r \cdot \overrightarrow{u_1} + H^n \cdot s \cdot \overrightarrow{u_2} = r \cdot H^n \cdot \overrightarrow{u_1} + s \cdot H^n \cdot \overrightarrow{u_2} = r \cdot \overrightarrow{u_1} + s \cdot 0{,}8^n \cdot \overrightarrow{u_2}$ Da die Potenz $0{,}8^n$ für $n \to +\infty$ gegen null strebt, folgt: $\overrightarrow{w_n}$ strebt gegen $r \cdot \overrightarrow{u_1}$.

Stochastik (grundlegendes Anforderungsniveau)

	Ein Glaukom ist eine Augenerkrankung, die zu einer Einschränkung des Sehvermögens führt und vor allem bei Personen auftritt, die älter als 40 Jahre sind. Häufige Ursache der Erkrankung ist ein erhöhter Augeninnendruck.
1	Es kann davon ausgegangen werden, dass in Deutschland von insgesamt 45 Millionen Personen, die älter als 40 Jahre sind, 10 % einen erhöhten Augeninnendruck haben. Für eine Studie werden in Deutschland 16 Personen, die älter als 40 Jahre sind, zufällig ausgewählt. Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der ausgewählten Personen mit erhöhtem Augeninnendruck.
a (4 BE)	Beschreiben Sie, was man unter einem Bernoulli-Experiment versteht. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei keiner der ausgewählten Personen ein erhöhter Augeninnendruck vorliegt.
Lösung 2nd data	Bei einem Bernoulli-Experiment beschränkt man sich darauf, die möglichen Ergebnisse des Zufallsversuchs zu zwei Ergebnissen zusammenzufassen: Das eine Ergebnis bezeichnet man willkürlich als *Erfolg* (*Treffer*),das andere als *Misserfolg* (*Niete*). Wird das Bernoulli-Experiment mehrfach durchgeführt, dann verändern sich die Wahrscheinlichkeiten p für einen Erfolg p bzw. q = 1 – p für einen Misserfolg nicht, d. h., Erfolge bzw. Misserfolge treten auf den einzelnen Stufen *unabhängig* voneinander auf. Für X: *Anzahl der Personen mit erhöhtem Augeninnendruck mit p = 0,1* gilt: $P(X = 0) = 0{,}9^{16} \approx 0{,}185 = 18{,}5\ \%$   
b (3 BE)	Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Augeninnendruck bei mehr als zwei der ausgewählten Personen erhöht ist.
Lösung 2nd data math ! nCr nPr $x^{\square}$	Die Bestimmung der gesuchten Wahrscheinlichkeit erfolgt gemäß Komplementärregel mithilfe der Option der kumulierten Binomialverteilung des WTR: $P(X > 2) = 1 - P(X \le 2) \approx 1 - 0{,}789 = 0{,}211$   Es ist auch eine aufwendigere Berechnung mithilfe der Bernoulli-Formel möglich: Die Wahrscheinlichkeit für höchstens 2 Erfolge bei einem 16-stufigen Bernoulli-Experiment ist $\binom{16}{0}\cdot 0{,}1^0 \cdot 0{,}9^{16} + \binom{16}{1}\cdot 0{,}1^1 \cdot 0{,}9^{15} + \binom{16}{2}\cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}9^{14}$. Mithilfe der Summationsoption des WTR kann dann wie folgt gerechnet werden:   

<table>
<tr><td>c
(3 BE)</td><td>Die Abbildung zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsgröße Y. Zeigen Sie, dass der Erwartungswert von Y größer als der Erwartungswert der Zufallsgröße X ist.


</td></tr>
<tr><td>Lösung</td><td>Für den Erwartungswert einer Binomialverteilung gilt: E(X) = n · p, also hier mit n = 16 und p = 0,1: E(X) = 16 · 0,1 = 1,6.
Aus der Grafik sind die ungefähren Werte der Wahrscheinlichkeitsverteilung ablesbar; hieraus kann dann das gewichtete Mittel der Werte der Verteilung bestimmt werden:
$E(Y) \approx 0 \cdot 0{,}11 + 1 \cdot 0{,}27 + 2 \cdot 0{,}3 + 3 \cdot 0{,}2 + 4 \cdot 0{,}11 + 5 \cdot 0{,}01 = 1{,}96$,
also E(Y) > E(X).</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Studien zufolge sind in Deutschland 2,4 % der Personen, die älter als 40 Jahre sind, an einem Glaukom erkrankt; von diesen erkrankten Personen haben 70 % einen erhöhten Augeninnendruck. Unter den Personen, die älter als 40 Jahre und nicht an einem Glaukom erkrankt sind, liegt bei 8,5 % ein erhöhter Augeninnendruck vor.</td></tr>
<tr><td>a
(3 BE)</td><td>Stellen Sie den Sachverhalt in einem beschrifteten Baumdiagramm dar.</td></tr>
<tr><td>Lösung</td><td>Bezeichnung der betrachteten Merkmale:
G: „Die Person ist an einem Glaukom erkrankt."
A: „Die Person hat einen erhöhten Augeninnendruck."
Auf der 1. Stufe wird das Merkmal Glaukom-Erkrankung betrachtet, auf der 2. Stufe das Merkmal erhöhter Augeninnendruck:


</td></tr>
<tr><td>b
(3 BE)</td><td>Unter den Personen, die älter als 40 Jahre sind und einen erhöhten Augeninnendruck haben, wird eine Person zufällig ausgewählt. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Person an einem Glaukom erkrankt ist.</td></tr>
<tr><td>Lösung</td><td>Aus den Pfad-Wahrscheinlichkeiten des Baumdiagramms in Teilaufgabe 2a ergibt sich:
Die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Person (die älter ist als 40 Jahre) einen erhöhten Augeninnendruck hat, beträgt
1,68 % + 8,296 % = 9,976 % (= Summe der Wahrscheinlichkeiten des 1. und 3. Pfads).
Die (bedingte) Wahrscheinlichkeit, dass diese Person an einem Glaukom erkrankt ist, beträgt daher
$P_A(G) = \frac{P(G \cap A)}{P(A)} = \frac{P(G \cap A)}{P(A \cap G) + P(A \cap \overline{G})} = \frac{0{,}0168}{0{,}09976} \approx 0{,}168 = 16{,}8\,\%$</td></tr>
</table>

c
(4 BE)

Für eine Studie wird unter den Personen, die älter als 40 Jahre sind und an einem Glaukom erkrankt sind, eine bestimmte Anzahl von Personen zufällig ausgewählt. Die binomialverteilte Zufallsgröße Z gibt die Anzahl derjenigen ausgewählten Personen an, bei denen kein erhöhter Augeninnendruck vorliegt. Für den Erwartungswert von Z gilt $21 < E(Z) < 27$. Bestimmen Sie die möglichen Werte für die Anzahl der ausgewählten Personen.

Lösung

Für die Zufallsgröße Z: *Anzahl der Personen, die an Glaukom erkrankt sind, aber keinen erhöhten Augeninnendruck haben,* gilt nach Aufgabenstellung:

Die Erfolgswahrscheinlichkeit beträgt p = 0,3.

Aus $E(Z) = n \cdot 0{,}3$ folgt für E(Z) = 21, dass n = 70, und für E(Z) = 27, dass n = 90.

Daher gilt: $70 < n < 90$.

Stochastik (erhöhtes Anforderungsniveau)

1

In einer Großstadt steht die Wahl des Oberbürgermeisters bevor. Vor Beginn des Wahlkampfs wird eine repräsentative Umfrage unter den Wahlberechtigten durchgeführt. Der Umfrage zufolge haben sich 44 % der befragten Wahlberechtigten bereits für einen Kandidaten entschieden; jeder Siebte derjenigen Befragten, die sich noch nicht für einen Kandidaten entschieden haben, ist Jungwähler, d. h. eine wahlberechtigte Person im Alter bis 24 Jahre. Der Anteil dieser Jungwähler unter den Wahlberechtigten beträgt 12 %.

a
(4 BE)

Erstellen Sie zu dem beschriebenen Sachzusammenhang ein beschriftetes Baumdiagramm oder eine vollständig ausgefüllte Vierfeldertafel.

Lösung

Bezeichnung der betrachteten Merkmale:

J: „Die befragte Person ist Jungwähler."
K: „Die befragte Person hat sich bereits für einen Kandidaten entschieden."

In der Vierfeldertafel kann eingetragen werden:

P(K) = 44 %, hieraus folgt: $P(\overline{K}) = 56\,\%$

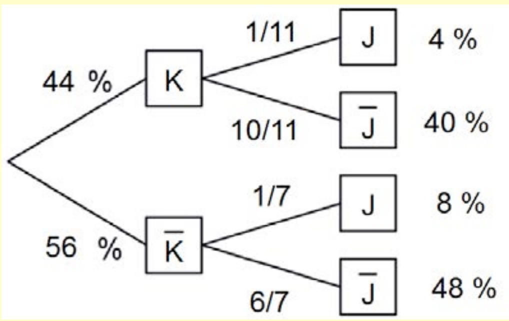
Da jeder Siebte der nicht-entschiedenen Wähler ein Jungwähler ist, folgt:
$P(\overline{K} \cap J) = 8\,\%$

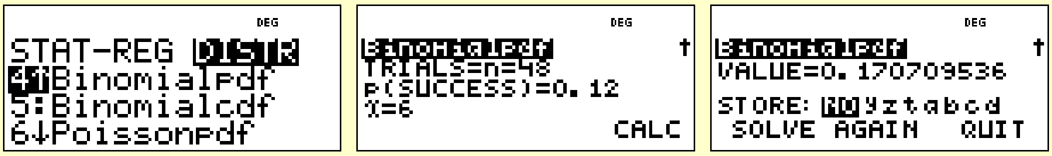
Weiter gilt: P(J) = 12 %, hieraus folgt: $P(\overline{J}) = 88\,\%$

Aus diesen drei Informationen über Randfelder bzw. innere Felder der Vierfeldertafel lassen sich die fehlenden Wahrscheinlichkeiten durch Ergänzen finden.

Da die Wahrscheinlichkeiten der inneren Felder die Pfad-Wahrscheinlichkeiten im Baumdiagramm wiedergeben, erschließen sich die fehlenden Wahrscheinlichkeiten der 2. Stufe aus den Pfadregeln (Pfad-Wahrscheinlichkeiten dividiert durch Wahrscheinlichkeiten der 1. Stufe):

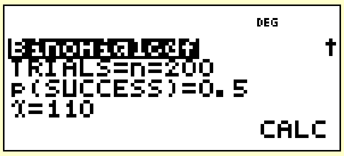
	J	$\overline{J}$	
K	4 %	40 %	44 %
$\overline{K}$	8 %	48 %	56 %
	12 %	88 %	100 %

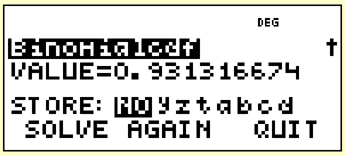


b (4 BE)	Zeigen Sie, dass der Anteil derjenigen, die sich noch nicht für einen Kandidaten entschieden haben, unter den befragten Jungwählern größer ist als unter denjenigen befragten Wahlberechtigten, die älter als 24 Jahre sind. Begründen Sie, dass es trotz dieser Tatsache nicht sinnvoll ist, sich im Wahlkampf vorwiegend auf die Jungwähler zu konzentrieren.
Lösung	Die zu vergleichenden bedingten Wahrscheinlichkeiten lassen sich leicht aus der Vierfeldertafel entnehmen: $P_J(\overline{K}) = \frac{0{,}08}{0{,}12} \approx 66{,}7\ \%$ und $P_{\overline{J}}(\overline{K}) = \frac{0{,}48}{0{,}88} \approx 54{,}5\ \%$. Da die älteren Wähler unter den nicht entschiedenen Wahlberechtigten einen erheblich größeren Anteil bilden (48 % gegenüber 8 %), wäre es nicht sinnvoll, sich auf die jüngeren Wahlberechtigten zu konzentrieren.
c (2 BE)	Der Kandidat der Partei A spricht an einem Tag während seines Wahlkampfs 48 zufällig ausgewählte Wahlberechtigte an. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich darunter genau sechs Jungwähler befinden.
Lösung 2nd data	Die Zufallsgröße X: *Anzahl der Jungwähler in der Stichprobe* ist binomialverteilt mit p = 0,12. Gemäß Bernoulli-Formel gilt: $P(X=6) = \binom{48}{6} \cdot 0{,}12^6 \cdot 0{,}88^{42} \approx 17{,}1\%$ 
2	Der Umfrage zufolge hätte der Kandidat der Partei A etwa 50 % aller Stimmen erhalten, wenn die Wahl zum Zeitpunkt der Befragung stattgefunden hätte. Ein Erfolg im ersten Wahlgang, für den mehr als 50 % aller Stimmen erforderlich sind, ist demnach fraglich. Deshalb rät die von der Partei A eingesetzte Wahlkampfberaterin in der Endphase des Wahlkampfs zu einer zusätzlichen Kampagne, die allerdings mit Kosten verbunden wäre. Die Partei ist daran interessiert, einerseits einen Erfolg im ersten Wahlgang zu erreichen, andererseits unnötige Kosten zu vermeiden.
a (5 BE)	Um einen Anhaltspunkt für eine Entscheidung über die Durchführung einer zusätzlichen Kampagne zu gewinnen, soll die Nullhypothese „Der Kandidat der Partei A würde gegenwärtig höchstens 50 % aller Stimmen erhalten.“ mithilfe einer Stichprobe von 200 Wahlberechtigten auf einem Signifikanzniveau von 5 % getestet werden. Bestimmen Sie die zugehörige Entscheidungsregel.
Lösung	Die Zufallsgröße X: *Anzahl der Wähler des Kandidaten A* wird als binomialverteilt angenommen. Die Nullhypothese *Der Kandidat der Partei würde gegenwärtig höchstens 50 % aller Stimmen erhalten* (also $p \le 0{,}5$) würde verworfen, wenn in der Stichprobe signifikant viele Wähler angeben, den Kandidaten wählen zu wollen. Dabei bedeutet „signifikant viele“ bei einem Signifikanzniveau von 5 %, dass es einen kritischen Wert k_o gibt, derart dass $P(X > k_o) \le 0{,}05$. Untersuchung mit p = 0,5: Einen geeigneten kritischen Wert findet man durch (systematisches) Probieren. Dazu wählt man einen Startwert, der oberhalb des Erwartungswerts von $\mu = 200 \cdot 0{,}5 = 100$ liegt, und berechnet schrittweise die Wahrscheinlichkeiten.

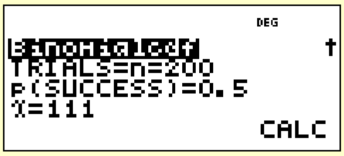
2nd data

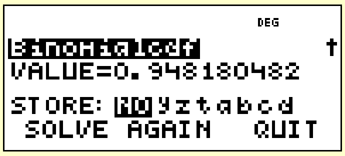
$P(X > 110) = 1 - P(X \leq 110) \approx 1 - 0{,}931 = 0{,}069 > 0{,}05$



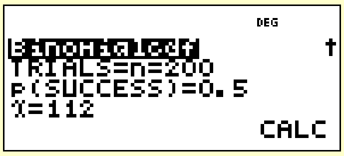


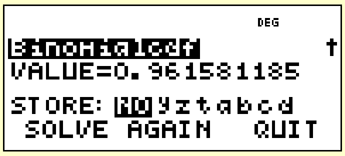
$P(X > 111) = 1 - P(X \leq 111) \approx 1 - 0{,}948 = 0{,}052 > 0{,}05$





$P(X > 112) = 1 - P(X \leq 112) \approx 1 - 0{,}962 = 0{,}038 \leq 0{,}05$



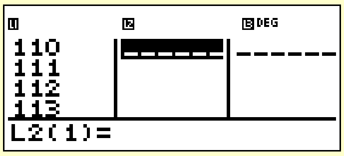


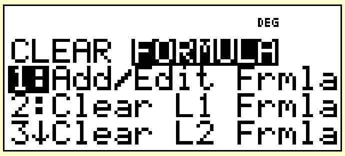
Hinweis

Das systematische Probieren kann alternativ auch so erfolgen:

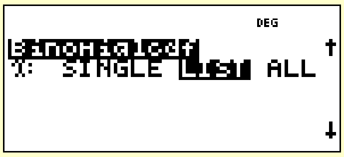
Man gibt infrage kommende Werte für X als Liste L1 ein (z. B. 110, 111, 112, 113), wechselt dann zur Liste L2, um eine „Formel“ zur Erstellung der Werte für Liste L2 einzugeben. Dies geschieht, indem man die kumulierte Binomialverteilung mit der Option LIST auswählt. Dann bestätigt der WTR, dass die Liste der x-Werte in L1 steht und die der kumulierten Binomialverteilung in L2 eingetragen wird. So erhält man schließlich die Wahrscheinlichkeiten der interessierenden Ereignisse.

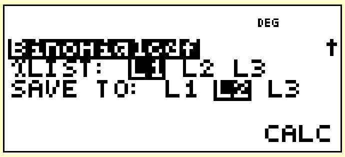
data

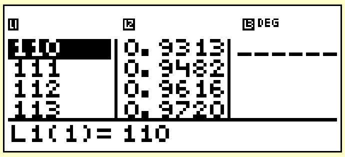




2nd data







Da die Nullhypothese $p \leq 0{,}5$ eine zusammengesetzte Hypothese darstellt, müssen auch Erfolgswahrscheinlichkeiten $p < 0{,}5$ betrachtet werden:

Da aber die Wahrscheinlichkeitsverteilung für kleinere Werte als $p = 0{,}5$ nach links verschoben ist, gilt für $p < 0{,}5$ erst recht: $P(X > 112) \leq 0{,}05$.

Mit $k_o = 112$ ergibt sich daher die Entscheidungsregel:

Verwirf die Nullhypothese, falls in der Stichprobe mehr als 112 Personen erfasst werden, die Kandidat A wählen wollen.

b
(3 BE)

Vor der Durchführung des beschriebenen Tests wurde festgelegt, auf die Kampagne nur dann zu verzichten, wenn die Nullhypothese aufgrund des Testergebnisses abgelehnt werden müsste. Entscheiden Sie, ob bei dieser Festlegung das Interesse, einen Erfolg im ersten Wahlgang zu erreichen, oder das Interesse, unnötige Kosten zu vermeiden, im Vordergrund stand. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

Lösung

Nach Vorgabe des Signifikanzniveaus beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass in der Stichprobe *zufällig* mehr als 112 Wähler des Kandidaten A vorgefunden werden, obwohl der Anteil der Wähler insgesamt höchstens 50 % ist, weniger als 5 %.

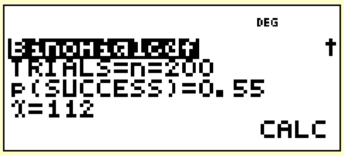
Dieses Risiko für eine falsche Entscheidung ist daher gering (Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art).

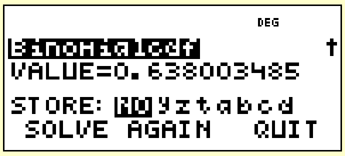
2nd **data**

Ein Fehler 2. Art wäre es, wenn in der Stichprobe *zufällig* weniger als 113 Wähler des Kandidaten angetroffen werden, obwohl der Anteil der Wähler insgesamt größer ist als 50 %. Dann würde die Kampagne durchgeführt, obwohl sie nicht notwendig wäre.

Diese Wahrscheinlichkeit hierfür kann aber sehr viel größer sein.

Beispiel: $p = 0{,}55$; $P(X \le 112) \approx 0{,}638$





Daher stand das Interesse im Vordergrund, möglichst die absolute Mehrheit bereits im 1. Wahlgang zu erreichen.

3

Nach der Wahl darf die Partei A in einem Ausschuss drei Sitze besetzen. Von den acht Stadträtinnen und vier Stadträten der Partei A, die Interesse an einem Sitz in diesem Ausschuss äußern, werden drei Personen per Losentscheid als Ausschussmitglieder bestimmt. Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der weiblichen Ausschussmitglieder der Partei A.

a (3 BE)

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(X=2)$.

Lösung

Es handelt sich um einen Ziehvorgang ohne Zurücklegen. In einem Baumdiagramm mit $2^3 = 8$ Pfaden gehören 3 Pfade zum Ereignis $X = 2$. Dabei gilt:

P(wwm, wmw, mww) =

$$\frac{8}{12}\cdot\frac{7}{11}\cdot\frac{4}{10}+\frac{8}{12}\cdot\frac{4}{11}\cdot\frac{7}{10}+\frac{4}{12}\cdot\frac{8}{11}\cdot\frac{7}{10}=3\cdot\frac{8}{12}\cdot\frac{7}{11}\cdot\frac{4}{10}=\frac{28}{55}\approx 50{,}9\%$$

b (4 BE)

Die Abbildungen 1 und 2 zeigen die Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Zufallsgrößen X bzw. Y.

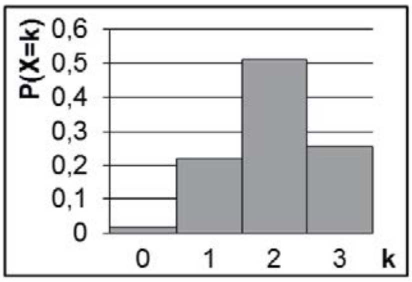


Abb. 1

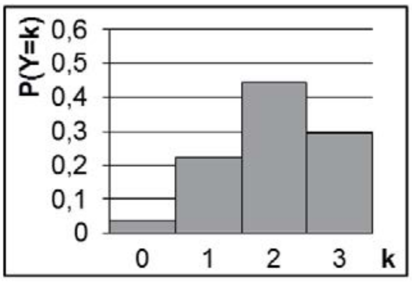


Abb. 2

Die Zufallsgröße X besitzt den Erwartungswert 2 und die Varianz $\frac{6}{11}$. Die Zufallsgröße Y ist binomialverteilt mit den Parametern $n=3$ und $p=\frac{2}{3}$. Zeigen Sie rechnerisch, dass Y den gleichen Erwartungswert wie die Zufallsgröße X, aber eine größere Varianz als X besitzt. Beschreiben Sie, woran man an den Abbildungen 1 und 2 erkennen kann, dass $\mathrm{Var}(Y) > \mathrm{Var}(X)$ gilt.

Lösung

Für die binomialverteilte Zufallsgröße Y gilt:

$E(Y) = n \cdot p = 3 \cdot {}^2/_3 = 2$ und $V(Y) = n \cdot p \cdot (1-p) = E(Y) \cdot (1-p) = 2 \cdot {}^1/_3 = {}^2/_3$

Damit gilt: $E(X) = E(Y)$ und $V(X) < V(Y)$.

Für die Varianzen V(X) bzw. V(Y) gilt wegen $E(X) = E(Y) = 2$ nach Definition

$$V(X)=\sum_{k=0}^{3}(k-2)^2\cdot P(X=k) \quad \text{und} \quad V(Y)=\sum_{k=0}^{3}(k-2)^2\cdot P(Y=k).$$

	Bei der Berechnung der Varianz spielt das Ergebnis $X = 2$ bzw. $Y = 2$ keine Rolle, da dieser Summand gleich null ist: $(2-2)^2 \cdot P(X = 2) = 0 = (2-2)^2 \cdot P(Y = 2)$. Da aber $P(X = 2) > P(Y = 2)$, also $P(X \neq 2) < P(Y \neq 2)$, wirkt sich dies bei der Berechnung der Varianz „zugunsten“ von V(Y) aus. Für die zugehörigen einzelnen Summanden gilt: Für die beiden zum Erwartungswert benachbarten Werte gilt: $P(X = 1) \approx P(Y = 1)$, also $(1-2)^2 \cdot P(X = 1) \approx (1-2)^2 \cdot P(Y = 1)$. aber es gilt: $P(X = 3) < P(Y = 3)$ und deshalb $(3-2)^2 \cdot P(X = 3) < (3-2)^2 \cdot P(Y = 3)$. Außerdem gilt: $P(X = 0) < P(Y = 0)$, also $(0-2)^2 \cdot P(X = 0) < (0-2)^2 \cdot P(Y = 0)$, und somit insgesamt $V(X) < V(Y)$.

Nutzung der Tasten des TI-30X Plus Multiview™ und deren Funktionalitäten (Auswahl)

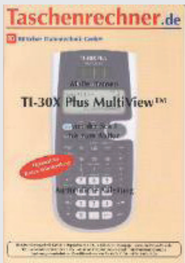
Taste	Funktionalität
2nd	Zweitbelegung einer Taste wird aufgerufen
mode	Festlegung des Modus: u. a. Winkel in Grad (DEG) oder Bogenmaß (RAD), Festlegen der Zahlennotation, Festlegen des Zahlensystems. Auf dem Display sind zwei Darstellungsformen möglich: CLASSIC (Zeichen nebeneinander) oder MATHPRINT (übliche mathematische Notation, erkennbar am ⁞⁞ -Zeichen als Platzhalter für eine erwartete Eingabe)
2nd mode = quit	Verlassen der aktuellen Ebene
delete	Löschen der letzten Eingabe links vom Cursor
2nd delete = insert	Einfügen eines Zeichens (ohne „insert“ wird ein Zeichen überschrieben)
clear	Löschen des zuletzt eingegebenen Terms
math	Math-Option: Umwandeln von Brüchen, kgV, ggT, Primfaktorzerlegung, Summe von Termen, Produkt von Termen; weitere Optionen: numerisch, Umrechnung/Umwandeln von Winkelangaben
data	Optionen: Möglichkeit der Eingabe von drei Listen mit jeweils max. 42 Zahlen, Definition von Formeln für die Berechnung der Zahlen für die Listen
2nd data = stat-reg/distr	Optionen: STAT-REG: Auswertung statistischer Daten einschl. Regression, DISTR: Wahrscheinlichkeitsverteilungen (Normal-, Binomial, Poisson-Vert.)
table	Optionen: *f(*: Möglichkeit, einen bereits definierten Funktionsterm in einem Term zu verwenden, *Edit function*: Eingabe eines Funktionsterms und Berechnen der Wertetabelle einer Funktion
2nd table = expr-eval	nach Eingabe eines Terms und der Eingabe eines einzusetzenden x-Werts erfolgt die Berechnung des Funktionswerts
2nd × = set op 2nd) = op	Möglichkeit, eine Abfolge von Operationen zu definieren Aufruf dieser Folge von Operationen
! nCr nPr	mehrfach belegte Taste: nacheinander Fakultät, nCr (= Binomialkoeffizient), nPr (Auswahl mit Beachtung der Reihenfolge)
2nd ! nCr nPr = random	Erzeugung von Zufallszahlen – Optionen: „*rand*“ = Zufallszahl aus dem Intervall [0 ; 1[oder „*random*(a,b)“ = ganzzahlig (aus der Menge {a, …, b})
$x^{\square}$ 2nd $x^{\square}$ = $\sqrt[n]{x}$	Eingabe einer Potenz, Berechnen der n-ten Wurzel
$\frac{\square}{\square}$ 2nd $\frac{\square}{\square}$	Möglichkeit der getrennten Eingabe von Zähler und Nenner bzw. Kehrwert
sin cos tan	mehrfach belegte Tasten: Berechnen von Funktionswerten trigonometrischer Funktionen und deren Umkehrung (zu einem Funktionswert den zugehörigen x-Wert berechnen) sowie der Hyperbelfunktionen sinh, cosh, tanh
ln log	mehrfach belegte Taste: nacheinander ln, log (Basis 10), log (bel. Basis)
$e^{\square}$ $10^{\square}$	mehrfach belegte Taste: nacheinander Potenzen zur Basis e bzw. 10
π e i	mehrfach belegte Taste: nacheinander π, e, i
2nd π e i = complex	Operationen mit komplexen Zahlen
x yzt abc	Wahl der Variablen (8 Möglichkeiten: x, y, z, t, a, b, c, d)
sto→ 2nd sto→ = recall 2nd x yzt abc = clear var	Speichern einer Zahl (Angabe einer Variablen notwendig) Aufruf einer gespeicherten Zahl Löschen aller gespeicherter Zahlen
EE	Taste zur direkten Eingabe einer Zahl in wissenschaftlicher Notation
◄► ≈	Umwandeln eines Bruchs in eine Dezimalzahl und umgekehrt
on 2nd on = off	Einschalten bzw. Ausschalten des WTR
2nd 0 = reset	Löschen aller gespeicherter Daten und Terme

Praxisorientierte Unterrichtsmaterialien

Nützliche Aufgabenbeispiele für Ihren mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht, kostenlose Downloads und Hinweise auf Verlagspublikationen finden Sie auf der TI Materialdatenbank.
Auch ganz speziell zum TI-30X Plus MultiView™, z. B.:

Arbeitsblätter für den
TI-30X Plus MultiView™
von Heinz Klaus Strick

Beispiele zum Einsatz des
TI-30X Plus MultiView™
von Heinz Klaus Strick



TI-30X Plus MultiView™
Mathematik
von Malte Hansen

TI-30X Plus MultiView™ –
von der Sek I bis zum Abitur
von H. Gruber, R. Neumann

Schauen Sie mal rein:

» TI Materialdatenbank: www.ti-unterrichtsmaterialien.net

» Ausgewählte Hefte als Druckexemplar im Webshop erhältlich: ti-activities-shop.net

Leistungsfähige Emulator-Software

Die TI-SmartView™ Emulator-Software für TI-30X Pro MultiView™ geht über den Funktionsumfang des TI-30X Plus MultiView™ hinaus und bietet Ihnen für den Einsatz eines wissenschaftlichen Taschenrechners im Unterricht somit zusätzliche Möglichkeiten.
Probieren Sie es aus. Die kostenlose Test-Version finden Sie auf den TI Webseiten.

Nutzen Sie unser Kennenlernangebot:

Rechner und Software erhalten Sie zum Lehrerprüfpreis. Das Bestellformular finden Sie auf den TI Webseiten.

» Ausführliche Produkt- und Serviceinformationen sowie Bezugsquellen finden Sie auf unseren TI Webseiten education.ti.com

» Die TI Schulberater unterstützen Sie gerne bei allen Fragen rund um den Einsatz von TI Rechnern im Unterricht: schulberater-team@ti.com

Haben Sie Fragen zu Produkten von Texas Instruments? Oder sind Sie an weiteren Unterrichtsmaterialien oder einer Lehrerfortbildung interessiert? Gerne steht Ihnen auch unser Customer Service Center mit Rat und Tat zu Seite. Nehmen Sie mit uns Kontakt auf:

Customer Service Center
TEXAS INSTRUMENTS
Tel.: 00 800 - 4 84 22 73 7 (Anruf kostenlos)
Fax: +49 (0)8161 80 3185
ti-cares@ti.com
education.ti.com/deutschland
education.ti.com/oesterreich
education.ti.com/schweiz

Weitere Materialien finden Sie unter:
www.ti-unterrichtsmaterialien.net