

Modellieren als roter Faden – wie geht das? Der Aufsatz zeigt, wie in unterschiedlichen Realsituationen, Modellierungen erarbeitet und verglichen werden. Schwierigkeiten bei der Mathematisierung bzw. Entdeckungen neuer mathematischer Funktionen führen dann zur entsprechenden Einführung der mathematischen Begriffe und Verfahren, also umgekehrt wie im Standardvorgehen, wo meist zunächst die innermathematischen Werkzeuge bereit gestellt werden, ehe dann nach einer mehr oder weniger langen Übungsphase vielleicht noch Modellierungsaspekte im Sinne von Anwendungen in den Blick genommen werden.

Die Kontexte sind:

- (1) Das m&m-Experiment
- (2) Zusammenhang von Masse und Flügelfläche bei Vögeln
- (3) Der Flug einer Basketballkurve
- (4) Der CO₂-Datensatz

Ausführliche Darstellungen des Unterrichtsgangs zu (1) findet man in den TI-Nachrichten 2/2008, S.23-27. Hier wird der Unterrichtsgang zu (2), (3) und (4) dargestellt. Der Unterrichtszusammenhang ist folgender:

In einer Klasse 10 wurde mit Hilfe des m&m-Experiments das exponentielle Wachstum eingeführt und dann um das lineare und quadratische ergänzt. Dabei sind die charakteristischen Eigenschaften eingeführt worden (linear: Differenzen konstant, quadratisch: Differenzen der Differenzen konstant, exponentiell: Quotienten konstant). Da die Klasse infolge curricularer Umstellungen lineare Gleichungssysteme noch nicht behandelt hatte, sollten diese bei der Behandlung von (3) eingeführt werden, eingerahmt in Probleme der beschreibenden Modellierung mit Ausgleichskurven und einer verständnisorientierten Einführung des Regressionsmoduls des GTR.

Als Material dienten zunächst die folgenden drei Aufgaben. Aufgabe 3 ist dabei bewusst offen formuliert, weil in diesem Stadium die Schüler von allein die Notwendigkeit der Suche nach einer passenden Funktion erfassen sollten. Es wird dann ein Verlaufsprotokoll des Unterrichtsgangs gegeben, so wie stattfand.

1

Die Tabelle zeigt die Masse und die Flügelfläche bei verschiedenen Vogelarten.

- a) • Skizziere ein „Masse-Flügelfläche-Diagramm“
(Masse: x-Achse, Flügelfläche. y-Achse)
- Gesucht sind Funktionen, die gut zu den Messwerten passen. Vergleiche verschiedene Lösungen. Formuliere eine Beziehung zwischen Masse und Flügelfläche.

Vogel	Masse	Flügelfläche
Spatz	25g	87cm ²
Schwalbe	47g	186cm ²
Amsel	78g	245cm ²
Star	93g	190 cm ²
Taube	143g	357 cm ²
Krähe	440g	1344 cm ²
Möwe	607g	2006 cm ²

- b) • Wie groß müsste die Masse eines Vogels mit 500cm² Flügelfläche sein?
Wie groß müsste die Flügelfläche eines Vogels sein, der 300g wiegt?
• Ein Blaureiher wiegt 2100g und hat eine Flügelfläche von 4450cm². Passen diese Werte noch in etwa zu deinen Funktionen?

aus: NEUE WEGE 11/12 Niedersachsen, S.43

2

Wie fliegt ein Basketball?

Ein Korbwurf wird ausgewertet und liefert folgende Tabelle:

x	0	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5
y	2	2,45	2,75	3	3,2	3,4	3,6
x	1,75	2	2,25	2,5	2,75	3	3,25
y	3,75	3,9	4	4,05	4,05	4,1	4
x	3,5	3,75	4	4,25	4,5	4,75	
y	3,9	3,8	3,75	3,5	3,35	3,05	

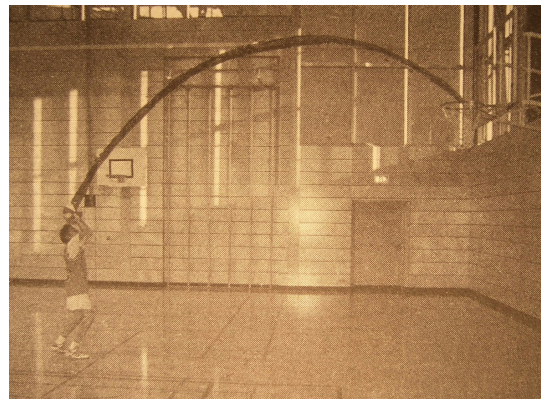


Bild und Daten aus : H.-G. Weigand (Hrsg.) *Wie die Mathematik in die Umwelt kommt*, S.44

- a) • Wo ist der Ursprung des Koordinatensystems gesetzt worden.
• Wie weit vom Korb weg ist der Werfer?
• Wie groß ist der Spieler?
- b) • Auf was für einer Kurve fliegt der Basketball?
• Wo würde der Ball landen, wenn es keinen Korb gäbe?

3

CO₂-Gehalt der Luft

Jahr	1960	1962	1964	1966	1968	1970	1972	1974	1976	1978	1980	1982
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
CO ₂	316	318	319	320	322	325	327	330	331	334	337	340

- Erläutere, wie es zu dem "x" kommt.
- Wann hat sich der CO₂ - Gehalt der Luft verdoppelt (bzgl. 1980)?
- Informiere dich, worin die Gefahr einer Erhöhung des CO₂ - Gehalt der Luft liegt.

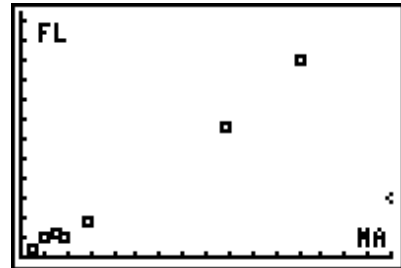
zu 1:

Zunächst wird der Datensatz mit dem GTR grafisch-tabellarisch dargestellt.

Ma: Masse

Fl: Flügelfläche

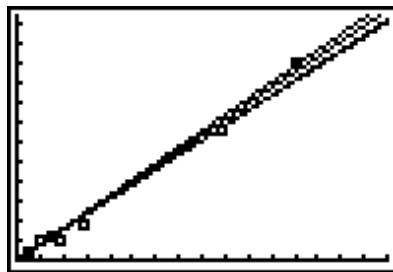
MA	FL	z
25	187	-----
47	186	-----
78	245	
93	190	
143	357	
440	1344	
607	2006	
FL(1)=87		



Die Grafik zeigt, dass die Punkte nicht exakt auf einer Geraden liegen, es könnte aber eine Ursprungsgerade gut passen. Dann ist die Flügelfläche proportional zur Masse. Exakt muss das auch nicht passen, weil die Natur sich nicht genau nach dem mathematischen Modell richtet und weil natürlich auch Schwalbe nicht gleich Schwalbe ist und weil wir ja auch Messungenauigkeiten berücksichtigen müssen.

Wir basteln Modelle:

Modell		Begründung	500cm ²	300g
1. Hendrik	$f_1(x) = 3,2 \cdot x$	Probieren/Annahme: Ursprungsgerade (Proportionalität)	156	960
2. Florian/ Daniel	$f_2(x) = 3x + 25$	Probieren, aber Typ $f(x) = mx + b$	158	925
3. Leon/ Frank	$f_3(x) = 3,07x$	Proportionalitätsfaktor (Steigung) ist Durchschnitt der Quotienten aus Flügelfläche und Masse	163	921
4. Steffen	$f_4(x) = \frac{2006}{607}x$	Steigung mit einem Messpunkt (Möwe)	151	991



Alle Modelle passen gut zu den Messwerten. Auch die Werte zu 500cm² und 300g liegen nah beieinander. Der Blaureiher passt aber zu keinem Modell, bei ihm ist der Quotient aus Flügelfläche und Masse 2,12.

f_2 passt zwar gut zu den Messwerten, ist aber bezogen auf die Realität sinnlos, weil nach diesem Modell ein Vogel mit 0g Masse 25cm² Flügelfläche hätte.

Welches Modell ist nun am besten?

Eine Abstimmung liefert ein recht ausgeglichenes Meinungsbild. Manche sind für 1., manche für 3. und manche für 4. Welche Argumente gibt es für die einzelnen Modelle:

1. Verläuft ‚mittig‘ durch Messpunkte.
3. Grundlage ist eine *Berechnung*, die alle Messwerte berücksichtigt.
4. Verläuft wenigstens durch einen Messpunkt exakt.

Fazit: Es gibt nicht die richtige Lösung, sondern verschiedene, nach unterschiedlichen Kriterien, gut passende Lösungen.

Ergebnis: Die Flügelfläche und die Masse sind proportional, es gilt: $Fl \approx 3 \cdot Ma$

Der Blaureiher zeigt aber, dass dies wohl nicht für alle Vögel gilt. Bei Pinguinen erwarten wir, dass der Quotient <1 ist, bei Hühner wird er wohl auch kleiner sein.

- Liefert der Quotient aus Flügelfläche und Masse eine Möglichkeit, Vögel zu klassifizieren?
- Sind Blaureiher und Pinguin ‚Ausreisser‘ und Sonderlinge oder sind sie typisch für eine Gruppe von Vögeln?

• ...

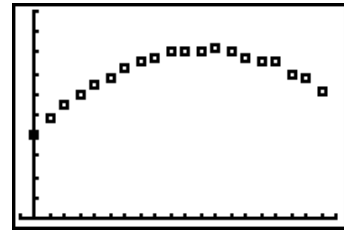
Fragen wir die Biologen.....

zu 2 :

x	0	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5
y	2	2,45	2,75	3	3,2	3,4	3,6
x	1,75	2	2,25	2,5	2,75	3	3,25
y	3,75	3,9	4	4,05	4,05	4,1	4
x	3,5	3,75	4	4,25	4,5	4,75	
y	3,9	3,8	3,75	3,5	3,35	3,05	

Die Flugbahn scheint parabelförmig zu sein. Wir setzen also folgenden Modelltyp an:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$



- Was können wir über eine geeignete Parabel aussagen?

Wir können natürlich irgendwie probieren, besser aber ist, vorher nachzudenken. Folgendes wird erkannt:

- (1) Es gibt keine Parabel, die exakt durch alle Punkte verläuft, weil:
 - a) Bei gleichen x-Abständen müsste die Änderung der Änderung konstant sein (Hendrik). Für die Änderungen erhält man hier aber 0,45/0,3/0,25/0,2/0,2 und damit für die Änderungen der Änderungen 0,15/0,05/0,05/0.
 - b) 4,1 ist der größte y-Wert. Wenn dann ((3 | 4,1) der Scheitelpunkt wäre, müssten in gleichem Abstand links und rechts davon dieselben y-Werte auftreten, was hier aber nicht der Fall ist (Malte).
 - c) 4,05 tritt zweimal auf. Dann müsste aus Symmetriegründen der Scheitelpunkt bei $x = 2,6125$ sein.

Wir können damit (wieder) nur eine mehr oder weniger gut passende Parabel finden.

- (2) Die Parabel ist nach unten geöffnet, also $a < 0$.
- (3) Daniel schlägt vor, dass die Parabel durch (0 | 2) verläuft. Wegen (1) muss sie das zwar nicht, aber es ist praktisch, weil wir damit wissen, dass $c = 0$ gilt (Dies haben wir auch schon bei der Bestimmung geeigneter Funktionen beim m&m Experiment und anderen Problemen benutzt). Wir erhalten: $f(x) = ax^2 + bx + 2$ (*)

Wir wissen aber immer noch nicht, was b und was a ist! Wir überlegen weiter:

- (4) (3 | 4,1) soll Scheitelpunkt sein (muss natürlich wegen (1) auch wieder nicht sein, nehmen wir aber einfach mal an). Wie werten wir diese Information aus? Wir müssen uns erinnern, wir brauchen wieder Wissen über Parabeln. Julia erinnert sich, dass es ja die Scheitelpunktform gibt, nämlich: $f(x) = a(x - m)^2 + n$

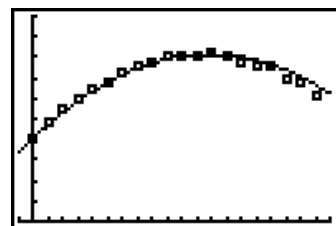
Wenn wir hier jetzt die Scheitelpunktkoordinaten einsetzen, erhalten wir:

$$f(x) = a(x - 3)^2 + 4,1 \quad (**)$$

- (5) Carina findet $x = 2,6125$ als Scheitelpunktcoordinate besser [vgl. (1)c)] und will (bzw. soll) dies für die weitere Berechnung benutzen (was ist aber eine sinnvolle y-Koordinate des Scheitelpunktes?).

Wir sind immer noch nicht fertig, was ist a? Jetzt brauchen wir aber nur noch eine Größe zu bestimmen. Wir haben zwei verschiedene Gleichungen [(*), (**)], bei denen jedes Mal etwas fehlt. Wenn wir jetzt aber (3) und (4) zusammenbauen, wenn wir (0|2) in (**) einsetzen, dann...

- (6) $2 = a(0 - 3)^2 + 4,1 = 9a + 4,1$ $f(x) = -0,23(x - 3)^2 + 4,1$
 $a = \frac{-2,1}{9} = -0,233..$ $= -0,23(x^2 - 6x + 9) + 4,1$
 $= -0,23x^2 + 1,38x - 2,07 + 4,1$
 Wir haben damit folgende Funktion ermittelt: $= -0,233x^2 + 1,38x + 2,03$



Die Funktion passt schon ziemlich gut, nur am Ende (kurz vor dem Korb) ist die Abweichung etwas größer. Wir probieren es noch einmal auf andere Weise.

Eine geeignete Parabel muss eigentlich durch keinen der Messpunkte exakt verlaufen, sie muss nur gut zu allen Punkten passen. Wie sollen wir da aber einen geeigneten Ansatz finden? Wir bleiben da lieber bei unserem Prinzip und benutzen einige Punkte, durch die unsere Parabel dann exakt verläuft, in der Hoffnung, dass sie zu den anderen Punkten auch gut passt.

Den Punkt (0 | 2) behalten wir zuerst einmal bei und erhalten damit: $f(x) = ax^2 + bx + 2$ (*)

Wir benötigen noch Werte für zwei Variable, also brauchen wir noch zwei Informationen.

(3/4,1) ist zwar der höchste Messpunkt, muss aber nicht Scheitelpunkt sein (Carina wollte sowieso einen anderen). Am Ende passte Modell 1 nicht so gut, also nehmen wir den letzten Punkt (4,75/3,05). Sinnvoll ist dann noch ein Punkt ‚aus der Mitte‘, wir nehmen (2,5/4,05).

An diesem Beispiel wird jetzt das Additionsverfahren zum Lösen linearer Gleichungssysteme instruktiv eingeführt. Weil im Anschluss daran das Lösen von linearen Gleichungssystemen dem GTR übertragen wird, der die Koeffizientenmatrix diagonalisiert und damit die Lösung bestimmt, geschieht dies hier streng nach dem Gauß-Algorithmus, es wird also nach der Berechnung der ersten Variable nicht auf das Einsetzungsverfahren gewechselt, wie man es pragmatisch tun würde. Um leichter die Übersicht zu wahren, geschieht dies an einem Beispiel mit einfachen Werten, es wird die Normalparabel $y = ax^2 + bx$ durch die Punkte

A(1/1) und B(2/3) bestimmt ($f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$).

Das Verfahren wird an zwei Beispielen geübt.

(1) $f(x) = ax^2 + bx$; A(2/1) ; B(3/2).

(2) $f(x) = ax^2 + bx + 2$; A(2/8) ; B(4/10).

Bei (2) wird der Übergang zur Matrixdarstellung eingeführt und die Diagonalisierung erläutert.

Schauen wir uns die Matrizen der Reihe nach an. Den Rechenoperationen mit den Gleichungen entsprechen jetzt Multiplikationen der Zeilen und

Addition/Subtraktion von Zeilen. Dabei treten immer nur Grundrechenarten auf, also eigentlich etwas Einfaches, dies aber recht

häufig. Wenn die Matrix die Form $\begin{bmatrix} 1 & 0 & * \\ 0 & 1 & \bullet \end{bmatrix}$ hat, kann man die Lösung sofort ablesen, sie

ist: (* / •). Das Übertragen der Matrix in die Form $\begin{bmatrix} 1 & 0 & * \\ 0 & 1 & \bullet \end{bmatrix}$ kann der GTR („RREF“)

$$\begin{array}{l} I \quad 4a + 2b = 6 \\ II \quad 16a + 4b = 8 \end{array} \quad \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 16 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} I' : II - 2I \quad 8a = \\ II' : I \quad 4a + 2b = \end{array} \quad \begin{bmatrix} 8 & 0 & -4 \\ 4 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} I'' : I' \quad 8a = -4 \\ II'' : 2II' - I \quad 4b = 16 \end{array} \quad \begin{bmatrix} 8 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & 16 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} I''' \quad a = -0,5 \\ II''' \quad b = 4 \end{array} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -0,5 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

MATRIX – EDIT

NAMES MATH	
1:	[A]
2:	[B]
3:	[C]
4:	[D]
5:	[E]
6:	[F]
7:	[G]

2x3

MATRIX[A] 2 x 3			
[0	0	0]
[0	0	0]

1, 1=0

Eingabe zeilenweise

MATRIX[A] 2 x 3			
[4	2	6]
[16	4	8]

2, 3=8

<p>Man kann sich die Matrix noch mal angucken:</p> <pre>[A] [[4 2 6] [16 4 8]]</pre>	<p>Und jetzt der Superbefehl: MATRIX – MATH – [B] rref</p> <pre>NAMES MATH EDIT 6:randM(7:augment(8:Matr→list(9:List→matr(0:cumSum(A:rref(B:rref(</pre>	<p>auf das Arbeitsblatt kopiert</p> <pre>rref(</pre>
<p>Auswahl der Matrix</p> <pre>NAMES MATH EDIT 1:[A] 2x3 2:[B] 3:[C] 4:[D] 5:[E] 6:[F] 7:[G]</pre>	<p>und Ausführung</p> <pre>rref([A]) [[1 0 -.5] [0 1 4]]</pre>	<p>Bruchdarstellung optional.</p> <pre>[A] [[4 2 6] [16 4 8]] rref([A])→Frac [[1 0 -1/2] [0 1 4]]</pre>

Da dem GTR ja ziemlich egal ist, ob die Zahlen ‚schön‘ sind oder nicht, können wir ihm jetzt ja unser Modell 2 des Basketballwurfs zur Auswertung übergeben.

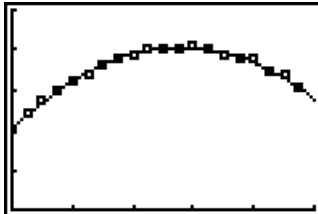
Gleichungssystem	Matrix	reduzierte Matrix
<p>I $6,25a + 2,5b = 2,05$ II $22,5625a + 4,75b = 1,05$</p>	$\begin{bmatrix} 6,25 & 2,5 & 2,05 \\ 22,5625 & 4,75 & 1,05 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -0,26619... \\ 0 & 1 & 1,48549... \end{bmatrix}$

Man kann natürlich auch eine exakte Bruchdarstellung erzeugen, aber hier sind ja sowieso nur einige Stellen sinnvoll.

Modell 2:

$$f(x) = -0,266x^2 + 1,485x + 2$$

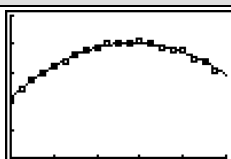
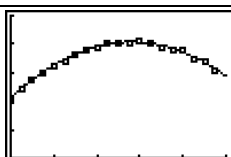
Die Parabel passt hervorragend!

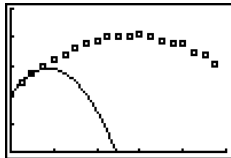
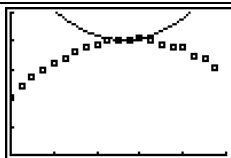


Wenn wir den Punkt auf der y-Achse benutzen, haben wir sofort den Wert für eine Variable, wenn wir das aber nicht tun, müssen wir drei Punkte vorgeben.

An einem einfachen Beispiel ((-1/6), (1/2), (2/3)) wird nun die Reduktion auf ein 2x2-LGS vorgeführt und die entsprechenden Matrizen erzeugt. Danach wendet die Lerngruppe sich wieder dem Korbwurf zu.

Mit der Kenntnis von drei Punkten können wir eine Parabelgleichung ermitteln. Natürlich war Modell 2 und eigentlich auch schon Modell 1 in jeder Hinsicht zufriedenstellend, aber wir üben Neues jetzt an diesem Beispiel. Nebenbei: Wie viele Möglichkeiten gibt es, aus den 20 Messpunkten 3 auszuwählen?

Punkte	Lineares Gleichungssystem (LGS)	Matrix	reduzierte Matrix/ Funktion	Grafik
(A) (0,5/2,75) (2/3,9) (4/3,75)	<p>I $0,25a + 0,5b + c = 2,75$ II $4a + 2b + c = 3,9$ III $16a + 4b + c = 3,75$</p>	$\begin{bmatrix} 0,25 & 0,5 & 1 & 2,75 \\ 4 & 2 & 1 & 3,9 \\ 16 & 4 & 1 & 3,75 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -0,24 \\ 0 & 1 & 0 & 1,36 \\ 0 & 0 & 1 & 2,13 \end{bmatrix}$ $fA(x) = -0,24x^2 + 1,36x + 2,12$	
(B) (0,25/2,45) (2,25/4) (4,5/3,35)	<p>I $0,0625a + 0,25b + c = 2,45$ II $5,0625a + 2,25b + c = 4$ III $20,25a + 4,5b + c = 3,35$</p>	$\begin{bmatrix} 0,0625 & 0,25 & 1 & 2,45 \\ 5,0625 & 2,25 & 1 & 4 \\ 20,25 & 4,5 & 1 & 3,35 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -0,25 \\ 0 & 1 & 0 & 1,40 \\ 0 & 0 & 1 & 2,12 \end{bmatrix}$ $fB(x) = -0,25x^2 + 1,4x + 2,11$	

(C) (0/2) (0,25/2,45) (0,5/2,75)	$\begin{array}{l} I \quad c = 2 \\ II \quad 0,0625a + 0,25b + c = 2,45 \\ III \quad 0,25a + 0,5b + c = 2,75 \end{array}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0,0625 & 0,25 & 1 & 2,45 \\ 0,25 & 0,5 & 1 & 2,75 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1,2 \\ 0 & 1 & 0 & 2,1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$	
$f_C(x) = -1,2x^2 + 2,1x + 2$				
(D) (2,5/4,05) (2,75/4,05) (3/4,01)	$\begin{array}{l} I \quad 6,25a + 2,5b + c = 4,05 \\ II \quad 7,5625a + 2,75b + c = 4,05 \\ III \quad 9a + 3b + c = 4,1 \end{array}$	$\begin{bmatrix} 6,25 & 2,5 & 1 & 4,05 \\ 7,5625 & 2,75 & 1 & 4,05 \\ 9 & 3 & 1 & 4,1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0,4 \\ 0 & 1 & 0 & -2,1 \\ 0 & 0 & 1 & 6,8 \end{bmatrix}$	
$f_D(x) = 0,4x^2 - 2,1x + 6,8$				

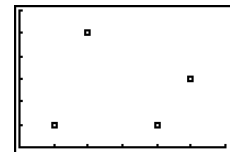
Wie wichtig eine sinnvolle Auswahl der Punkte ist, zeigen f_C und f_D . Hier wird auch das grundsätzliche Problem bzw. der Nachteil dieses Verfahrens zur Ermittlung einer geeigneten Funktion durch eine Menge von Messpunkten deutlich. Wir wählen immer, mehr oder weniger willkürlich, einige Punkte aus. Bei der Berechnung spielen die anderen Punkte - meist die Mehrheit - keine Rolle mehr (Malte). Die berechnete Funktion schert sich überhaupt nicht um diese Punkte, sie sind ihr gänzlich egal, sie sind vollkommen unabhängig von ihr. Wenn wir aber sinnvolle Punkte auswählen, können viele Funktionen gut passen, aber dann entsteht natürlich auch eine Frage. Gibt es eine am besten passende Funktion? Also:

- (1) Gibt es eine Funktion, die am besten zu den Messpunkten passt?
- (2) Gibt es ein Verfahren, das alle Messpunkte berücksichtigt, bei dem wir also nicht einige Werte durch Auswahl herausstellen und die anderen vernachlässigen? (Hanno)

Clea: „Berechnen wir doch eine Parabel, die durch vier Punkte verläuft.“

Sönke: „Das geht nicht, wir haben bei $ax^2 + bx + c$ ja nur drei Variable.“

Herr Körner: „Clea, schau mal.“



Carina: „Dann müssen wir die Funktion so umbauen, dass eben vier Variable auftreten.“

Alina: „Das ist aber auch total doof, weil dann ja die übrigen 16 Punkte nicht berücksichtigt sind.“

Leon: „Also brauchen wir 20 Variable.“

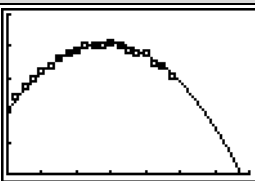
Herr Körner: „Hat jemand eine Idee für einen Ansatz mit vier Variablen?“

Sönke: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Herr Körner: „Und wenn wir 20 Variable brauchen?“

Einige Schüler: „ $f(x) = a_{19}x^{19} + a_{18}x^{18} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0$.“

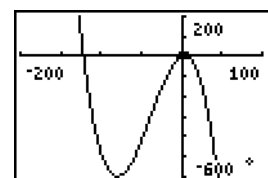
Versuchen wir es doch zuerst einmal mit vier Punkten:

Punkte	LGS	Matrix	Reduzierte Matrix	Grafik
A(0/2) B(1/3,2) C(2/3,9) D(4/3,75)	$\begin{array}{l} I \quad d = 2 \\ II \quad a + b + c + d = 3,2 \\ III \quad 8a + 4b + 2c + d = 3,9 \\ IV \quad 64a + 16b + 4c + d = 3,75 \end{array}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3,2 \\ 8 & 4 & 2 & 1 & 3,9 \\ 64 & 16 & 4 & 1 & 3,75 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -0,0021 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -0,2438 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1,4458 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$	
$f(x) = -0,0021x^3 - 0,2437x^2 + 1,4458x + 2$				

Passt auch! Aber besser als eine Parabel?

Erforschen wir aus Neugier mal das Aussehen dieser Funktion:

So etwas kennen wir noch nicht! Gibt es noch weitere Hoch- und Tiefpunkte? Die Messpunkte sind nur noch ein schwarzer Fleck. In diesem Bereich passt die Funktion, ansonsten fliegt ein Basketball aber wohl nicht so.



Bevor wir jetzt alle 20 Punkte benutzen, überlegen wir:

- Die Matrix besteht aus $20 \cdot 21 = 420$ Einträgen! Wer schafft so etwas ohne Eingabefehler?

Wer prüft das nach?

- Angenommen, wir vermessen uns um 1 cm:

$$2,45^{19} = 24783098,5$$

$$2,46^{19} = 26777315,46$$

Eine Messgenauigkeit von 1cm führt zu einer Differenz von 2000000 !

Der Funktionstyp $f(x) = a_{19}x^{19} + a_{18}x^{18} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ (Polynom vom Grad 19) ist nicht sinnvoll.

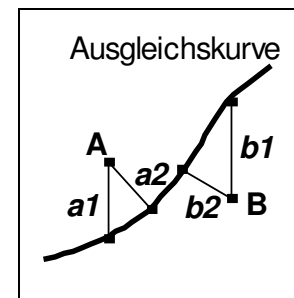
Wenn aber das exakte Treffen der Messpunkte nicht das entscheidende Kriterium ist, dann brauchen wir ein anderes Kriterium. Nehmen wir einfach mal an, dass unser Kandidat eventuell sogar durch keinen einzigen der Messpunkte verläuft. Welche Kurven würden wir dann für besonders gut halten? Naja, die Kurven, die möglichst nahe an den Messpunkten verlaufen. Was heißt hier aber „möglichst nahe“? Was soll überhaupt der Abstand eines Messpunktes von der Kurve sein?

Wenn **A** und **B** zwei Messpunkte sind, was soll dann der Abstand zur Ausgleichskurve sein?

1. Carina: Die Abstände in y-Richtung, also die Abweichung des Funktionswertes vom gemessenen Wert (**a1** und **b1**).

2. Julia: Senkrecht zur Kurve („Lot auf Kurve“) (**a2** und **b2**).

Beide Definitionen machen in gewissen Hinsichten Sinn. Die Abweichung von der Messung ist das, was von der Sache her hier interessiert. Dies spricht für 1. Wenn man ‚Abstand‘ als geometrischen Begriff fasst, ist 2. angemessen.



In der Wissenschaft nimmt man meistens noch ein anderes Kriterium. Vom Ansatz her nimmt man 1., betrachtet dann aber die Quadrate der Abstände in y-Richtung. Wenn man jetzt in diesem Sinne die Abstände aller Messwerte von verschiedenen Kurven berechnet, nimmt man die Funktion, bei der die Summe dieser Abstandsquadrate am kleinsten ist. Vorher muss man natürlich festlegen, welchen Funktionstyp man benutzen will. Auf den Korbwurf bezogen heißt dies, dass dieses Verfahren uns die bezüglich dieses Kriteriums beste Parabel liefert, aber nicht klärt, ob die Parabel als Funktionstyp am besten geeignet ist. Auf das m&m – Experiment bezogen heißt dies, dass die Entscheidung für eine Parabel oder eine Exponentialfunktion von diesem Verfahren vollkommen unberührt bleibt, hier half wirklich nur unser eigenes Nachdenken.

Dieses Verfahren (**Regression**) beschreibt nur, erklärt aber nicht! Weil aber die Abstände aller Punkte in die Rechnung einfließen, werden alle Punkte berücksichtigt. In diesem Sinne ist die Regression besser als unser selbständig entwickeltes Verfahren und eine Antwort auf (2). Es gibt aber nicht die beste Parabel, sondern immer nur die beste Parabel bezüglich eines vorher vereinbarten Kriteriums!

Der GTR kann Regressionsfunktionen (verschiedene Typen) bestimmen!

Wir erhalten: $f(x) = -0,256x^2 + 1,434x + 2,051$

Wir sind bei unserem Problem, eine geeignete Kurve zu Messpunkten zu finden zuerst einmal erfolgreich gewesen und haben mehrere geeignete Funktionen gefunden. Wir mussten natürlich immer zuerst einen geeigneten Funktionstyp festlegen. Beim Korbwurf war der naheliegend, aber wenn wir uns an das m&m – Experiment erinnern, dann waren da von der Kurvenpassung her sowohl Parabeln als auch Exponentialfunktionen geeignet. Erst die zugrunde liegende Gesetzmäßigkeit entschied hier. Welche Gesetzmäßigkeiten liegen nun beim Korbwurf zugrunde? Fragen wir den Physiker...

Wir halten fest: Vieles spricht dafür, dass ein Basketball eine parabelförmige Flugkurve hat. Und ein Federball?...

• Wo landet der Ball?

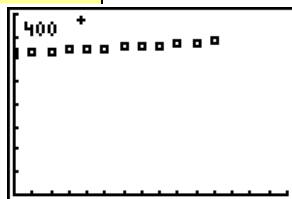
Wir müssen die Nullstelle bestimmen.

Modell 1:	$f_1(x) = -0,233x^2 + 1,38x + 2,03$	$x_n = 7,14$
Modell 2:	$f_2(x) = -0,266x^2 + 1,485x + 2$	$x_n = 6,704$

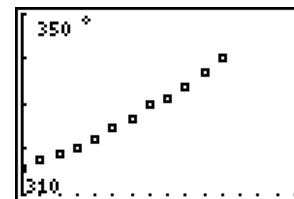
Modell 3:	$f_3(x) = -0,24x^2 + 1,36x + 2,12$	$x_n = 6,94$
Modell 4: (Regression)	$f_4(x) = -0,256x^2 + 1,434x + 2,051$	$x_n = 6,783$

Beim Basketballwurf ist eine Schwankung von 35cm auf ca. 7m bezogen wohl nicht so entscheidend. Wenn es aber um Geschosse (Raketen) geht, dann macht es schon einen Unterschied, ob man den Palast des Diktators oder das daneben liegende Krankenhaus trifft...

zu 3: Wir stellen die Daten grafisch dar:



Wer die Dramatik des Anstiegs von CO₂ herausstellen will, wird nach links schauen, wer alles ganz harmlos findet, nach rechts. Wie wachsen nun aber die Werte? Welche Funktion passt besonders gut?



Alina: *Ich finde, eine Gerade passt am besten.*

Elisa: *Das kommt darauf an, welche Grafik ich benutze. Bei der rechten Grafik würde ich eine Parabel nehmen.*

Malte: *Eine Exponentialfunktion könnte auch passen.*

Herr Körner: *Kennt jemand noch eine Möglichkeit, eine geeignete Funktion zu finden?*

Claudia: *Wir können die Änderungen untersuchen.*

Herr Körner: *Machen wir das.*

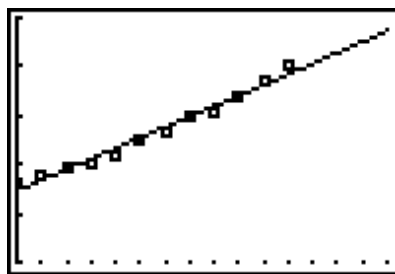
Die Änderung der Änderung ist nicht, auch nicht annähernd, konstant, die Änderung auch nicht. Der Quotient ist annähernd konstant, dies spricht für exponentielles Wachstum. Andererseits ist auch die Änderung annähernd konstant, wenn man sie auf Bestände von ca. 320 bezieht. Gleiches gilt für die Änderung der Änderung. Die Untersuchung des Änderungsverhaltens gibt keinen klaren Aufschluss, alle drei Funktionstypen sind gleichermaßen passend oder nicht passend.

Zeit	CO ₂	Änderung	Änderung der Änderung	Quotient
0	316			
1	318	2		1,0063
2	319	1	-1	1,0031
3	320	1	0	1,0031
4	322	2	1	1,0063
5	325	3	1	1,0093
6	327	2	-1	1,0062
7	330	3	1	1,0092
8	331	1	-2	1,0030
9	334	3	2	1,0091
10	337	3	0	1,0090

Da wir nicht wissen, welche Gesetzmäßigkeiten es bei der CO₂ – Entwicklung gibt, wir uns aber für einen Funktionstyp vorweg entscheiden müssen, wenn wir Regressionsfunktionen bestimmen (das sind die Kurven, bei denen die Quadrate der Abstandssummen minimal sind (Variation von Carinas Modell)), probieren wir alle drei Typen:

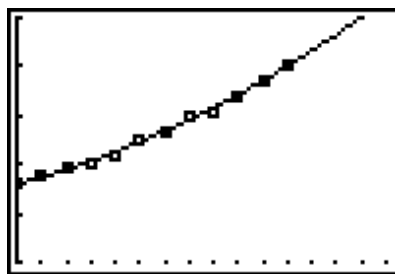
Lineares Modell:

$$f_L(x) = 2,17x + 314,64$$



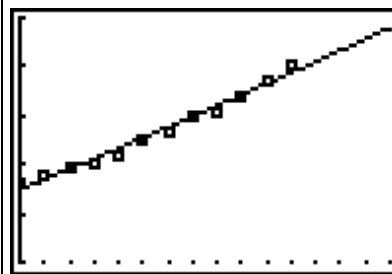
Quadratisches Modell:

$$f_Q(x) = 0,08x^2 + 1,31x + 316$$



Exponentielles Modell:

$$f_E(x) = 314,79 \cdot 1,0067^x$$

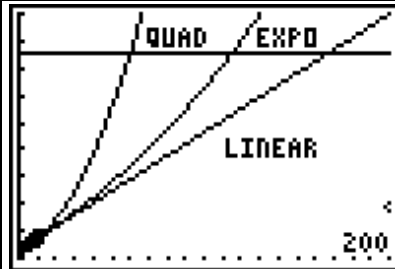


Alle drei Modelle passen gleichermaßen gut. Gibt es ein Kriterium dafür, welches von den drei Modellen am besten passt. Ja, wir können es hier aber nicht herleiten, der GTR kann es aber (DiagnosticOn). Zu jeder Regressionsfunktion wird der Korrelationskoeffizient berechnet. Dieser ist immer eine Zahl zwischen 0 und 1. Je näher an 1, desto besser passt die Funktion, Werte >0,9 gelten als sehr gute Passung.

Lineares Modell:	$r = 0,9921$
Quadratisches Modell:	$r = 0,9981$
Exponentielles Modell:	$r = 0,991$

Alle drei Modelle passen ‚wirklich‘ gleich gut!

- Wann hat sich der CO₂-Gehalt – bzgl. 1980 – verdoppelt? Diese Werte gelten als gesundheitsgefährdend. Was sagen unsere drei Modelle dazu?



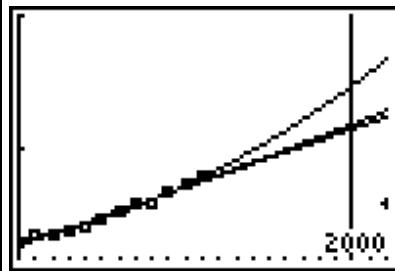
Verdopplung :

	x	in Jahren	Jahr
Linear	165	310	2290
Quadratisch	60	100	2080
Exponentiell	115	210	2190

Riesige Unterschiede in der Prognose!

Wieder: Wer warnen will, benutzt das quadratische Modell, wer herunterspielen will, wird das lineare Modell nehmen.

Da die Messreihe 1982 aufhört, können wir nach aktuellen Daten schauen. Welches Modell passt dann am besten? Welches hat sich bewährt? Oder entpuppen sich vielleicht alle drei Modelle als falsch?



Für das lineare und das exponentielle Modell erhält man für das Jahr 2000 ungefähr 359 ppm, für das quadratische Modell dagegen 374 ppm.

Die Realität wird also zwischen linear/exponentiell und quadratisch entscheiden oder sie entscheidet, dass alle drei Modelle nicht passen.

Was sagt die Realität?

Im Internet findet man z.B. :

2002	2003
376	379

Demnach passt das quadratische Modell am besten, das Modell mit der kürzesten Verdopplungszeit.

In der aktuellen Diskussion wird sogar von einer Verdopplungszeit von nur ca. 70 Jahren ausgegangen! Hier müssen also noch ganz andere Kriterien eine Rolle spielen, denn: Unabhängig von der Passung der Daten, sind alle drei Modelle natürlich eine hoffnungslose Vereinfachung, die Einflussfaktoren auf die CO₂ – Entwicklung sind sicher dermaßen komplex, dass sie sich nicht in eine einfache Gesetzmäßigkeit wie „Änderung ist proportional zum Bestand“ oder „Änderung der Änderung ist konstant“, zwingen lassen.

Zusammenfassung:

m&m-Experiment	Ein einfacher Wirkzusammenhang („immer ungefähr die Hälfte mehr“) entscheidet für die Exponentialfunktion.
Masse und Flügelfläche bei Vögeln	Der (fast) konstante Faktor und die grafische Darstellung lassen Proportionalität von Masse und Flügelfläche vermuten. Wir müssen die Biologen fragen, ob es einen Wirkzusammenhang („Naturgesetz“) dahinter gibt.
Korbwurf	Die grafische Darstellung macht eine Parabel stark plausibel. Geraden passen überhaupt nicht, aber kubische Funktionen passen auch gut. Welche Gesetze gibt es beim Werfen? Wir müssen die Physiker fragen.
CO ₂	Der Datensatz ist noch so uneinheitlich und diffus, so dass hier sehr viele Funktionstypen grafisch gut passen. Diese führen aber zu sehr stark voneinander abweichenden Prognosen. Einfache Wirkzusammenhänge, wie beim m&m-Experiment, gibt es hier sicher nicht. Die Biologen, Chemiker, Ökologen, Mathematiker suchen ...