„Hundekurven“ mit dem MMS der TI-Nspire™ CX II-T CAS Technologie zeichnen und untersuchen - Problemstellungen auch für den Unterricht

Wolfgang Häfner

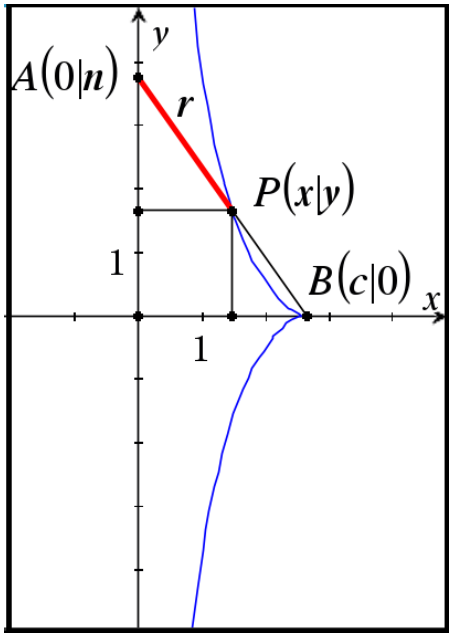
Dieser Beitrag beschäftigt sich mit sogenannten „Hundekurven“. Die Bewegung eines Hundes kann an einer Leine oder freilaufend und unterschiedlich motiviert sein.

Fall 1:
Der angeleinte Hund möchte beispielsweise unbedingt auf direktem Weg zu einem abseits des Weges befindlichen Baum, während der Hundeführer auf dem Weg weitergeht. Die Leine (konstanter Länge) ist dabei sicherlich stets gespannt.
Den Weg des Hundes beschreibt eine Kurve, eine Konchoide.
Fall 2:
Der angeleinte Hund hat kein konkretes Ziel und auch keine Lust zum Laufen, muss also von seinem genervten Hundeführer an der gestrafften Leine (konstanter Länge) gezogen werden. Setzt man voraus, dass anfangs die Leine und die Bewegungsrichtung des Herrchens orthogonal sind, so beschreibt eine Kurve namens Traktrix, den Weg des Hundes.
Fall 3:
Der freilaufende Hund könnte abseits des Weges seines Hundeführers die direkte Verfolgung desselben aufnehmen, je nach Motivation mit größerer oder geringerer Geschwindigkeit.
Den Weg des Hundes beschreibt hierbei eine Radiodrome.

Falls man die SuS nicht theoretisch überfordert, ist vielleicht eine geeignete mathematische Bearbeitung und Veranschaulichung der oben erläuterten Fälle eine abwechslungsreiche Ergänzung des Unterrichtsstoffs. Dabei bietet sich auch eine Aufteilung in Teilprobleme an. So ist Fall 1 bereits vor der Einführung der Infinitesimalrechnung behandelbar.

Beginnen wir mit Fall 1.
Der Hundeführer bewegt sich auf der y-Achse in positiver Richtung.
Seine Koordinaten sind also stets $\mathrm{A}(0,\mathrm{n})$. Die Koordinaten des Baumstandortes sind $\mathrm{B}(\mathrm{c},0), \mathrm{c} > 0$.
Die konstante Länge der Leine sei r. Die Koordinaten des Hundes sind $\mathrm{P}(\mathrm{x},\mathrm{y})$.

Damit ergibt sich folgendes Bild:



Herleitung der Gleichung:
Da der Hund dem Baum zustreben will, befindet er sich stets auf der Strecke $\overline{AB}$.

$$\frac{n}{y} = \frac{c}{c-x} \quad (2.\ Strahlensatz) \qquad n = \frac{c \cdot y}{c-x}$$

$$x^2 + (n-y)^2 = r^2 \quad (Satz\ des\ Pythagoras\ oder\ Kreisgleichung)$$

$$x^2 + \left(\frac{c \cdot y}{c-x} - y\right)^2 = r^2$$

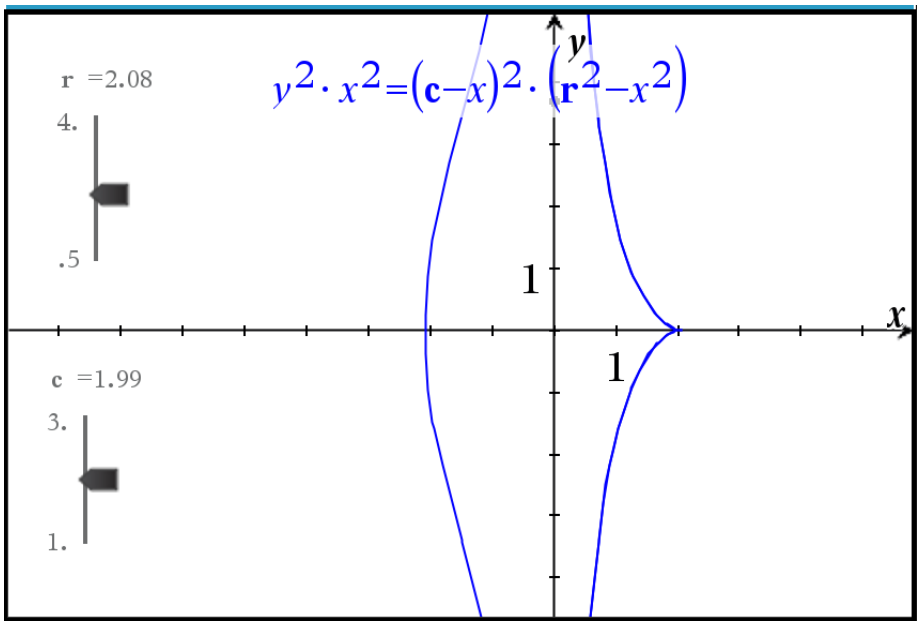
$$\text{solve}\left(x^2 + \left(\frac{c \cdot y}{c-x} - y\right)^2 = r^2, y\right)$$

$$y = \frac{-\sqrt{r^2 - x^2} \cdot (x-c)}{x} \text{ and } \frac{(r^2 - x^2) \cdot (x-c)^2}{x^2} \geq 0 \text{ or } y = \frac{\sqrt{r^2 - x^2} \cdot (x-c)}{x} \text{ and } \frac{(r^2 - x^2) \cdot (x-c)^2}{x^2} \geq 0$$

$$y^2 = \frac{(c-x)^2 \cdot (r^2 - x^2)}{x^2}$$

oder

$y^2 x^2 = (c-x)^2 \cdot (r^2 - x^2)$ (Eingabe als Relation)

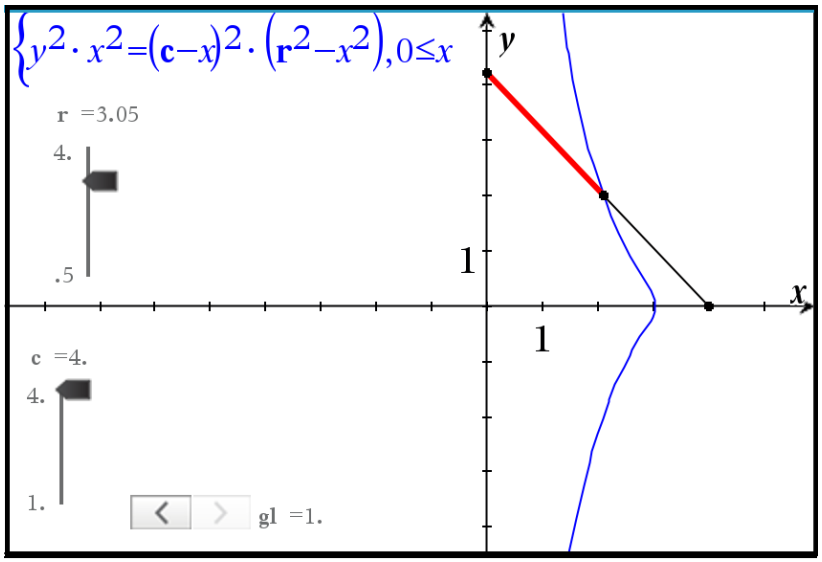


Konchoide des Nikomedes; konchos (altgriechisch) - Muschel

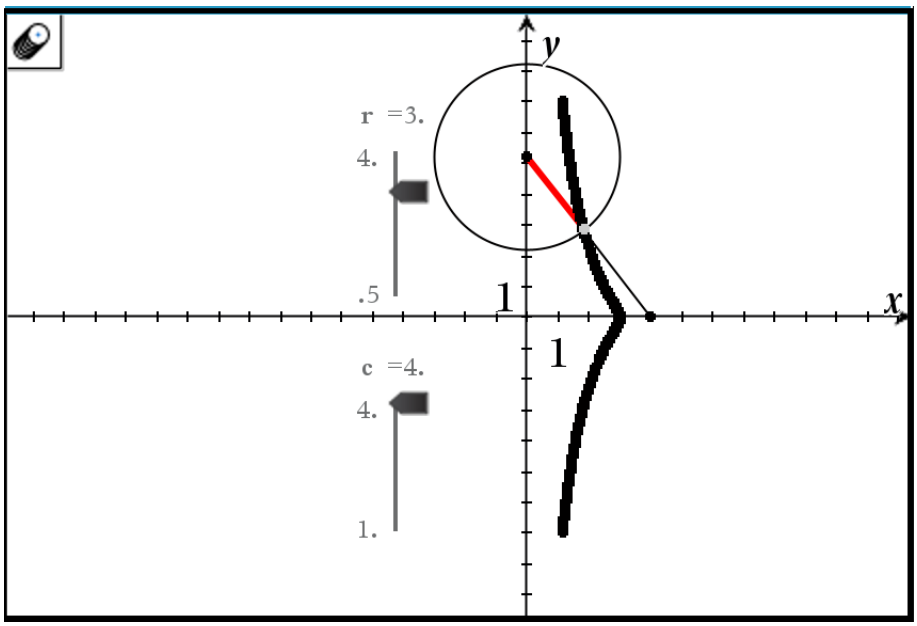
Da die x-Koordinate c des Baumstandortes positiv ist, ist der linke Teil der Kurve nicht relevant.
Die Position P des Hundes ist jeweils der Schnittpunkt der Strecke $\overline{AB}$ mit der Konchoide.
Der Punkt A kann auf der y-Achse bewegt werden.
Die Werte für r und c lassen sich über Schieberegler verstellen.
Dadurch ist man in der Lage unterschiedliche Fälle zu untersuchen:

- Die Hundeleine ist kürzer als der Abstand des Baums vom Koordinatenursprung. Im nächsten Bild ist dieser Fall dargestellt.
- Die Hundeleine hat die gleiche Länge wie der Abstand des Baums vom Koordinatenursprung.
- Die Hundeleine ist länger als der Abstand des Baums vom Koordinatenursprung.

Durch unterschiedliche Einstellungen der Schieberegler kann man diese Fälle ausprobieren.

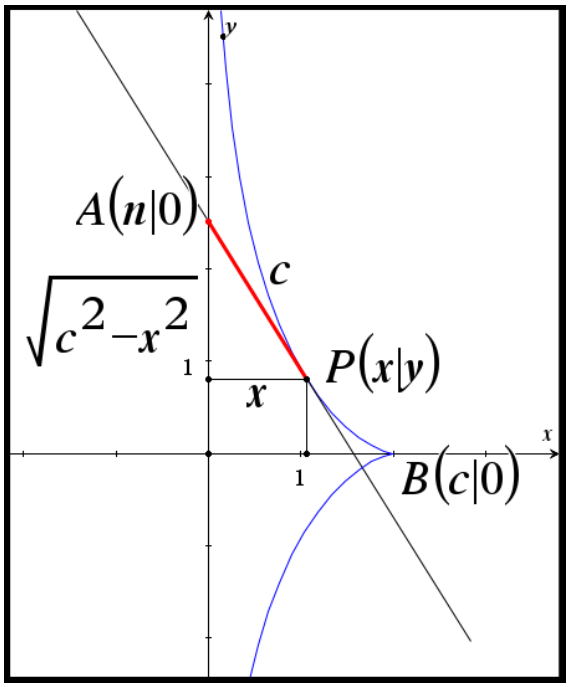


Die Position des Hundes lässt sich auch ohne Konchoide konstruieren.
P ist jeweils der Schnittpunkt der Strecke $\overline{AB}$ mit dem Kreis um den Mittelpunkt A mit dem Radius r.
Damit lässt sich die Hundekurve als Geometriespur oder als geometrischer Ort der Schnittpunkte von $\overline{AB}$ mit den Kreisen um A darstellen. Damit ist das Problem dann auch ohne die Gleichung der Konchoide rein grafisch lösbar.



Fall 2:
Der Hundeführer bewegt sich auf der y-Achse in positiver Richtung. Seine Koordinaten sind also wiederum stets $\mathrm{A}(0, \mathrm{n})$.
Wir gehen davon aus, dass anfangs der Hundeführer die Koordinaten $A(0|0)$ hat und der Hundestandort $\mathrm{B}(\mathrm{c}, 0)$ $(\mathrm{c} > 0)$ ist. Die konstante Länge der Leine ist deshalb ebenfalls c. Die Koordinaten des Hundes sind $\mathrm{P}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$.
Die Hundeleine (rot) liegt auf der Tangente der Hundekurve durch P

Damit ergibt sich folgendes Bild:



Aus dem Steigungsdreieck erhält man jeweils den Anstieg der Tangente und damit auch die Ableitung der Funktionsgleichung der Traktrix an der Stelle x.

$m = f_c'(x) = -\frac{\sqrt{c^2 - x^2}}{x}; \;\; 0 < x \leq c$

Außerdem gilt $f_c(c) = 0$.

Durch Integration mit Hilfe des CAS erhält man:

$$f_c(x) = -\,\boldsymbol{c \cdot \ln\left(\sqrt{c^2 - x^2} - c\right) + c \cdot ln(x) + c \cdot ln(-1) - \sqrt{c^2 - x^2}}$$

$$\text{factor}\left(\int_c^x \frac{-\sqrt{c^2-t^2}}{t}\,dt \,\middle|\, 0<x\leq c, x\right) \qquad -c\cdot\ln\left(-\left(c-\sqrt{c^2-x^2}\right)\right)+c\cdot\ln(x)-\sqrt{c^2-x^2}+c\cdot\left(\ln(-c)-\ln(c)\right)$$

Offensichtlich müssen wir noch mit Hilfe der Logarithmengesetze einen Funktionsterm entwickeln, der auch Berechnungen zulässt.

$$f_c(x) = c \cdot \ln\left(\frac{-x}{\sqrt{c^2 - x^2} - c}\right) - \sqrt{c^2 - x^2} = c \cdot \ln\left(\frac{x}{c - \sqrt{c^2 - x^2}}\right) - \sqrt{c^2 - x^2}$$

Die nächsten Schritte könnte man auch weglassen.

$$f_c(x) = c \cdot \ln\left(\frac{x}{c-\sqrt{c^2-x^2}} \cdot \frac{c+\sqrt{c^2-x^2}}{c+\sqrt{c^2-x^2}}\right) - \sqrt{c^2-x^2}$$

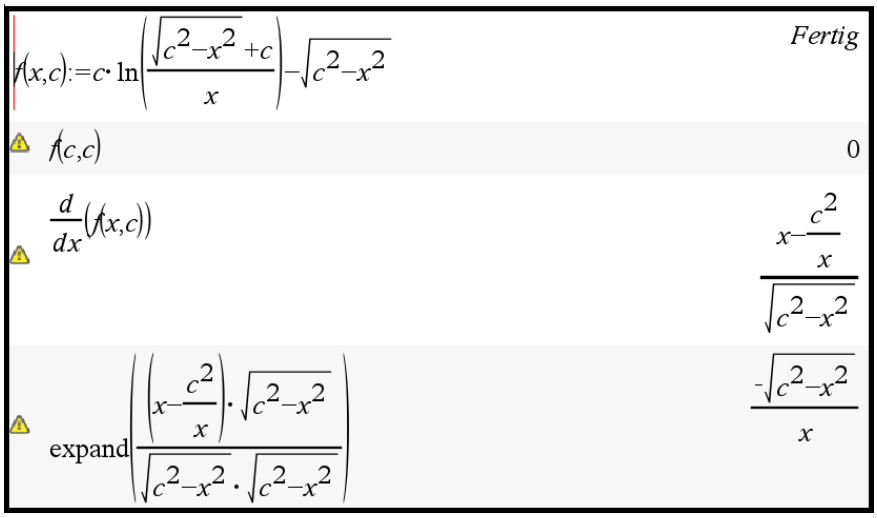
$$f_c(x) = c \cdot \ln\left(\frac{x \cdot \left(\sqrt{c^2-x^2}+c\right)}{x^2}\right) - \sqrt{c^2-x^2}$$

$$f_c(x) = c \cdot \ln\left(\frac{\sqrt{c^2-x^2}+c}{x}\right) - \sqrt{c^2-x^2}$$

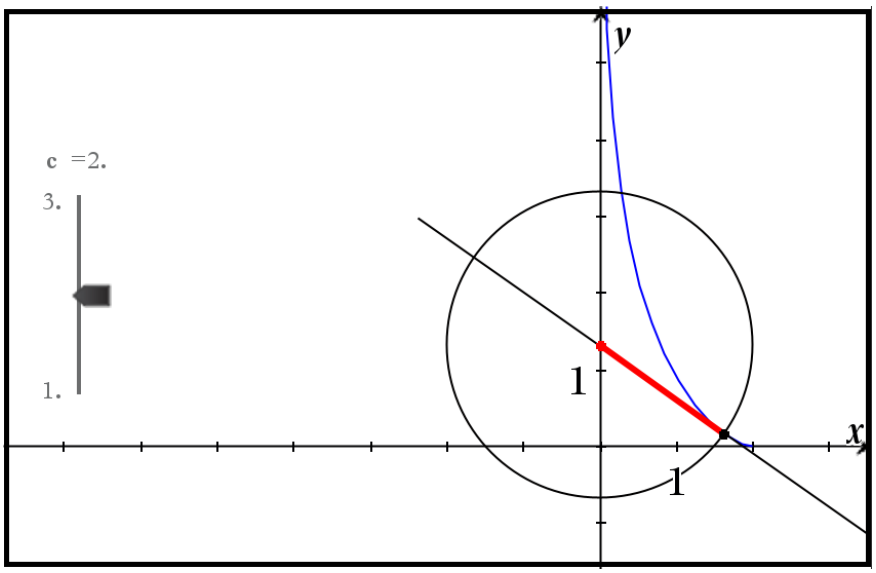
Weil das alles aber nicht so richtig trivial ist, sollte man das Ergebnis vielleicht auch einfach vorgeben, dabei aber auf eine Überprüfung nicht verzichten. Die Probe kann mit dem TI Nspire erfolgen.

Man erhält

$$\frac{d\, f_c(x)}{dx} = -\frac{\sqrt{c^2-x^2}}{x} \quad und \; f_c(c) = 0$$



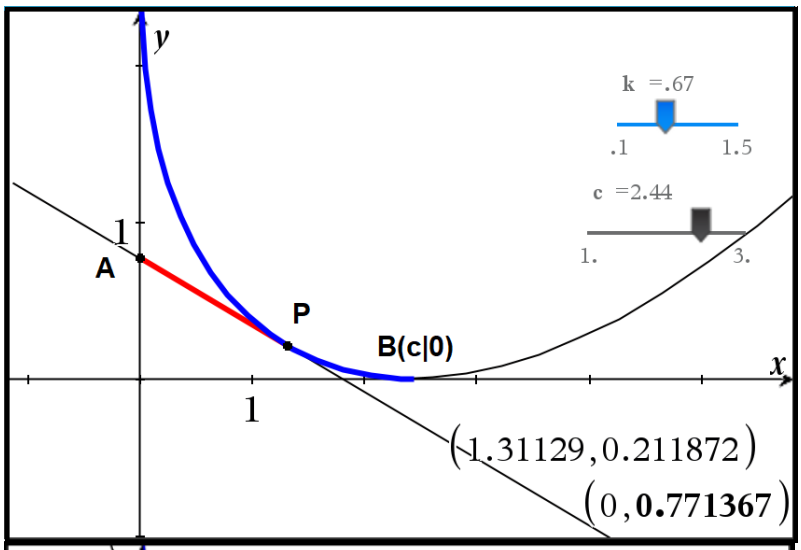
Die Position des Hundes erhält man am einfachsten, wenn man jeweils den Schnittpunkt von Traktrix und Kreis um den Mittelpunkt A mit dem Radius c konstruiert.

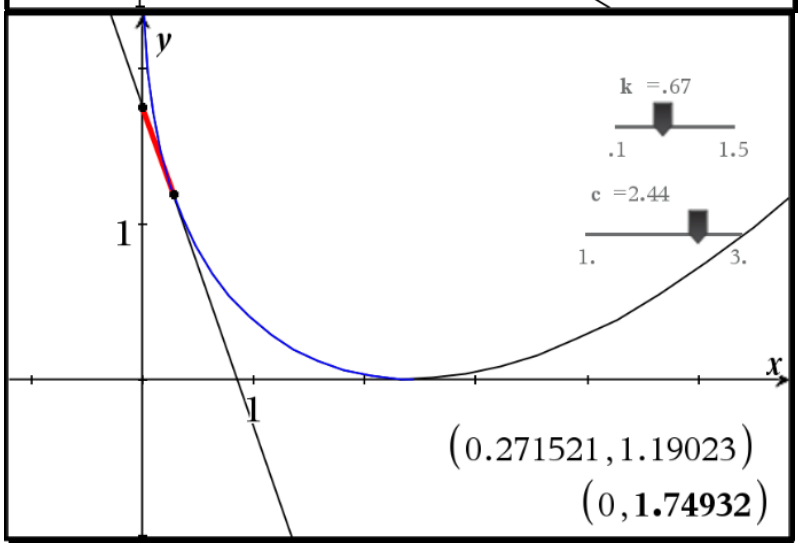


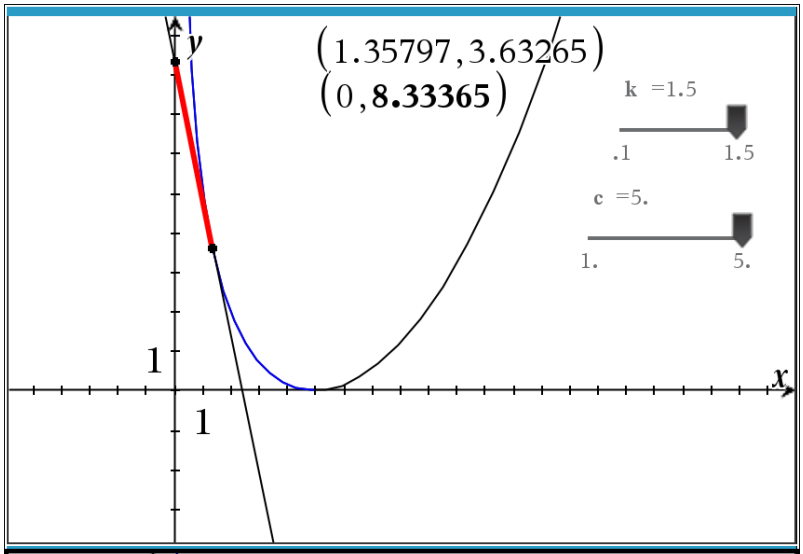
Da der Hundeführer selbstverständlich auch in negative y-Richtung gehen kann, gibt es auch einen nach unten verlaufenden Bogen mit der Funktionsgleichung $g_c(x) = -f_c(x)$.

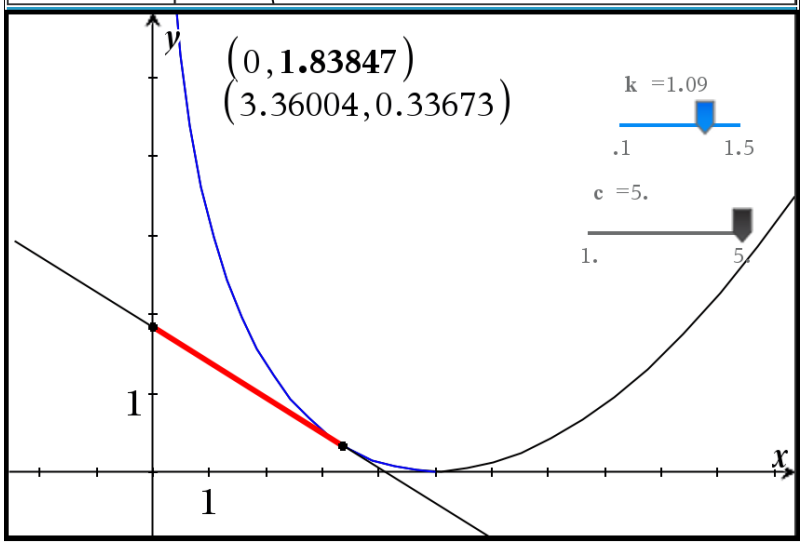
Fall 3:
Der Hundeführer bewegt sich auf der y-Achse in positiver Richtung.
Wir gehen davon aus, dass sich der Hundeführer anfangs im Koordinatenursprung befindet und der Hundestandort die Koordinaten $\mathrm{B}(\mathrm{c},0)$ $(\mathrm{c} > 0)$ hat.
Die Koordinaten des Hundes sind $\mathrm{P}(\mathrm{x},\mathrm{y})$, die des Hundeführers $A(0|n)$.
Die Geschwindigkeiten v_A des Hundeführers und die des Hundes (v_P) seien konstant und ihr Verhältnis $k = \frac{v_A}{v_P}$.
Die Herleitung der Gleichung der zugehörigen Hundekurve ist nicht trivial. Ich verweise hier auf das Literaturverzeichnis. Den SuS sollte man (in der Regel) die Gleichungen ebenfalls nur mitteilen.

Falls $k \neq 1$ erhält man beispielsweise folgende Bilder:









Da sich der Hundeführer auf einer Geraden bewegt, ist der Graph eine gerade Radiodrome. (lat. radius „Strahl“; griech. dromos „Lauf, Rennen“)

Funktionsgleichung:

$$f_{k;c}(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{c - c^k \cdot x^{1-k}}{1-k} - \frac{c - c^{-k} \cdot x^{1+k}}{1+k} \right) \; ; k = \frac{v_A}{v_P} \neq 1; \; c > 0$$

Für $k = 1$ lautet die Gleichung:

$$f_c(x) = \frac{1}{2} \left(c \cdot \ln \frac{c}{x} + \frac{x^2 - c^2}{2c} \right)$$

$$f(x,k,c):=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{c-c^{k}\cdot x^{1-k}}{1-k}-\frac{c-c^{-k}\cdot x^{1+k}}{1+k}\right)$$

▸ *Fertig*

$$af(x,k,c):=\frac{d}{dx}(f(x,k,c))$$

$$xp:=right(solve(f(xp,k,c)=af(xp,k,c)\cdot xp+n,xp)|xp>0)$$

▸ 0.539346

$$f(x,c):=\frac{1}{2}\cdot\left(c\cdot\ln\left(\frac{c}{x}\right)+\frac{x^{2}-c^{2}}{2\cdot c}\right)$$ ▸ *Fertig*

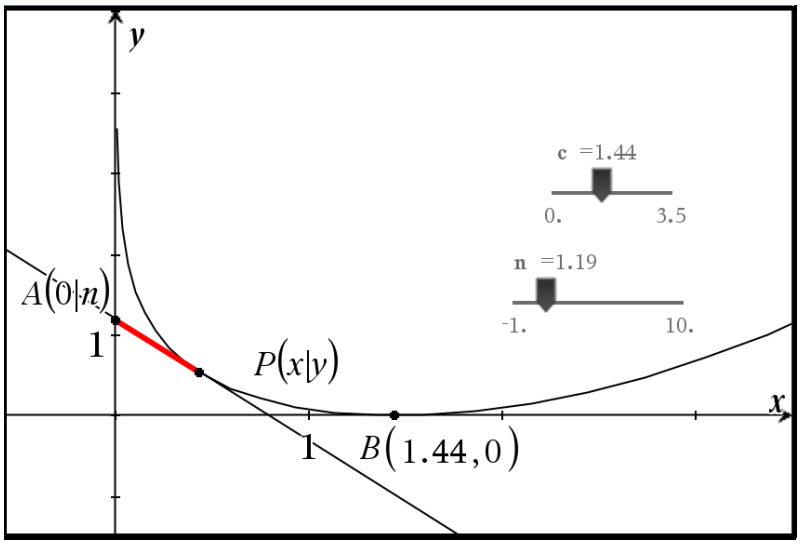
$$af(x,c):=\frac{d}{dx}(f(x,c))$$ ▸ *Fertig*

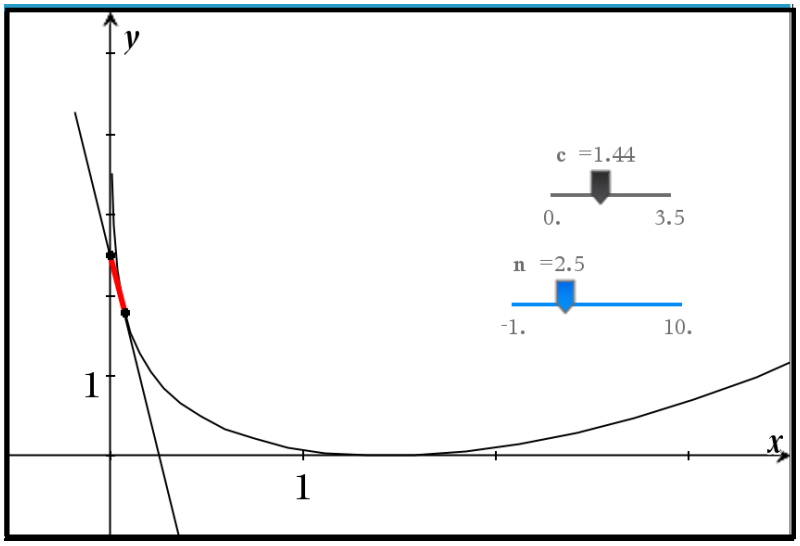
$$xp:=right(solve(f(xp,c)=af(xp,c)\cdot xp+n,xp))|xp>0$$

▸ 0.257391⚠

Die x-Koordinate von P erhält man als Lösung der Gleichung
$f_{k;c}(x_p) = f_{k;c}{}'(x_p)\cdot x_p + n$ bzw. $f_c(x_p) = f_c{}'(x_p)\cdot x_p + n$.
Die Koordinaten von A ermittelt man in der Applikation ‚Geometry' über das zugehörige Kontextmenü und ‚Koordinaten/Gleichungen'. Die y-Koordinate muss man als Variable n speichern oder falls man bereits einen Schieberegler für n erstellt hat mit n verknüpfen.
Mit ‚Geometry', ‚Punkte & Geraden' und ‚Punkte nach Koordinaten' zeichnet man den Punkt $P(xp, f(xp,k,c))$ bzw. $P(xp, f(xp,c)$ ein, danach die Gerade AP und die Stecke $\overline{AP}$.

Für den Fall $k = 1$ erhält man z.B. folgende Bilder:



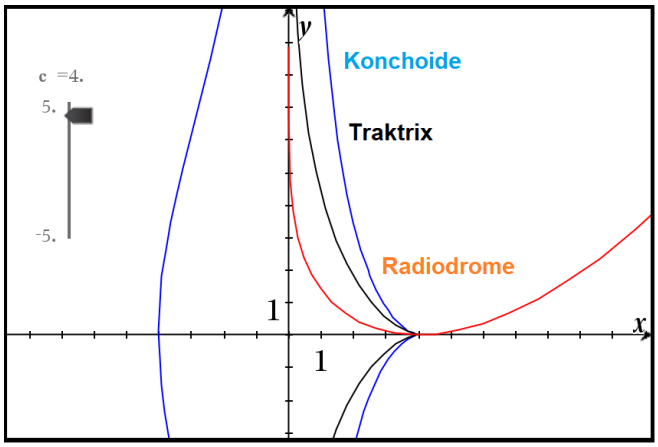


Mit der dynamischen Geometriesoftware kann man nun experimentieren und kommt zu folgenden Erkenntnissen:

- Für k>1 ist der Hundeführer schneller als der Hund (wohl der am wenigsten wahrscheinliche Fall). Die Kurve nähert sich asymptotisch der y-Achse. Der Hund holt den Hundeführer nicht ein.
- Für k<1 ist der Hund schneller als der Hundeführer und die Kurve endet in einem Punkt auf der y-Achse. Dort holt der Hund den Hundeführer ein.
- Für k=1 verringert sich der Abstand von Hund und Hundeführer und nähert sich offensichtlich einem konstanten Wert kleiner c. Den kann man auch ausrechnen!
- Der Fall k=0 ist einfach. Der Hundeführer bewegt sich nicht $(v_A = 0)$ und der Hund erreicht damit den Hundeführer auf geradem Weg.

Vergleich der Kurven

Vorausgesetzt wird in Anlehnung an die bisherigen Ausführungen:
Wenn $A(0|0)$ ist, so ist $P(0|c)$. Für Fall 1 sei außerdem r=c.



Quellen:
https://de.wikipedia.org/wiki/Hundekurve
https://de.wikipedia.org/wiki/Konchoide
https://mathe.web.leuphana.de/kurven/kurvenheft/007a-hundekurve.pdf
https://mathepedia.de/Die_Traktrix.html
https://de.wikipedia.org/wiki/Radiodrome