Heinz Klaus Strick

Arbeitsblätter für den TI-30X Pro MathPrint™

- Für Sekundarstufe I und Sekundarstufe II
- Arithmetik und Algebra
- Analysis
- Stochastik
- Analytische Geometrie

Texas Instruments

Dieses und weiteres Material steht Ihnen auf der TI Materialdatenbank zum Download bereit:
www.ti-unterrichtsmaterialien.net

Einführung

Diese Sammlung von Arbeitsblättern für den Mathematikunterricht soll dazu anregen, den Schulrechner **TI-30X Pro MathPrint™** von Texas Instruments und die Möglichkeiten seines Einsatzes kennenzulernen. Die Auswahl der Blätter erfolgte nach dem Gesichtspunkt, möglichst viele verschiedene Themen des Mathematikunterrichts – vor allem aus Sekundarstufe II – anzusprechen, bei denen Rechnungen erforderlich sind, die über die bloße Anwendung der Grundrechenarten oder die Berechnung von Funktionswerten der verschiedenen Funktionstypen hinausgehen.

Zu den besonderen Möglichkeiten des TI-30X Pro MathPrint™ gehören

- das Erstellen von Wertetabellen gleichzeitig zu zwei Funktionen (die zweite Funktion kann beispielsweise die Ableitungsfunktion sein),
- die Möglichkeit, Listen zu erstellen und mit den Werten aus diesen Listen neue Listen zu erstellen,
- die drei Gleichungslöser (für die exakte Lösung von Gleichungen 2. und 3. Grades, für die numerische Lösung beliebiger Gleichungen, für die Lösung von Gleichungssystemen 2. und 3. Ordnung (auch von unterbestimmten Systemen),
- die Berechnung der numerischen Ableitung und der numerischen Integration,
- die Optionen zur Bildung von Summen- und Produkttermen,
- die Rechenoperationen mit Matrizen und Vektoren,
- die enthaltenen Wahrscheinlichkeitsfunktionen (Binomial-, Normal-, Poissonverteilung),
- die Statistikoptionen (z. B. Quartile, mehrere Regressionsmodelle, Korrelation).

Durch die getroffene Auswahl der Beispiele werden die Stärken dieses Rechnertyps sichtbar; allerdings werden auch die Grenzen deutlich – insbesondere hinsichtlich der Frage der grafischen Darstellung von Ergebnissen. Aus diesem Grunde sind auf den entsprechenden Arbeitsblättern verschiedene Grafiken zu sehen, die mit dem TI-Nspire™ erstellt werden mussten.

Die Arbeitsblätter können die Verwendung von Schulbüchern nicht ersetzen, da auf die Theorie zu den angewandten Algorithmen nur teilweise und sicherlich nicht umfassend genug eingegangen werden kann; aus Gründen des Umfangs musste auch eine Auswahl an Fragestellungen getroffen werden, die nicht alle in den Lehrplänen enthaltenen Anforderungen abdeckt. Da sehr viele Themen des Mathematikunterrichts angesprochen werden, werden durch die Vielfalt der Beispiele Anregungen für weitere Einsatzmöglichkeiten des Schulrechners gegeben.

Es wurde darauf verzichtet, das Eintippen von Tastenfolgen darzustellen (die notwendigen Informationen entnehme man dem Handbuch); andererseits werden durch die absichtlich große Anzahl von abgebildeten Screenshots die erforderlichen Einzelschritte zur Lösung eines Problems deutlich gemacht. Insofern können die Arbeitsblätter auch dazu dienen, bestimmte Funktionen des Schulrechners kennenzulernen. Screenshots ersetzen an vielen Stellen auch Erklärungen von Rechenvorgängen, da diese aus den Abbildungen entnommen werden können.

Die Arbeitsblätter sind so aufgebaut, dass zunächst ein Problem (Beispiel-Aufgabe) gestellt wird, dessen Lösung anschließend mithilfe des TI-30X Pro MathPrint™ erfolgt. Am Ende eines Arbeitsblatts sind weitere Übungsaufgaben aufgeführt, die ähnlich wie die ausgeführte Lösung bearbeitet werden sollen. Die Lösungen sind in der Regel so ausführlich, dass die Arbeitsblätter auch zum selbstständigen Lernen eingesetzt werden können; durch die Übungsaufgaben ist eine Kontrolle des Gelernten möglich. Bei einigen Themen wurden Doppelseiten angelegt, insbesondere dann, wenn alternative Lösungswege möglich sind.

Viel Freude bei der Arbeit mit dem TI-30X Pro MathPrint™ !

Leverkusen, im September 2018

Heinz Klaus Strick

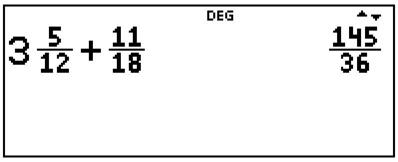
Inhaltsverzeichnis

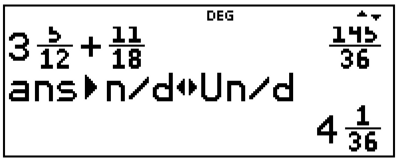
Gebiet: Arithmetik	Einsatz ab Stufe 5 (auch zur Wiederholung geeignet)

Addieren und Subtrahieren von Brüchen

Beispiel-Aufgabe:

Notiere die Zwischenschritte, die vom TR bei der folgenden Rechenaufgabe intern vorgenommen werden.





Hinweise: Eingabe einer gemischten Zahl mithilfe von [□□/□], eines Bruchs mithilfe von [□/□]

Umwandeln einer gemischten Zahl in einen unechten Bruch und umgekehrt mithilfe von Option 1 im [math]-Menü

Gemischte Zahlen, die als zweiter Summand bzw. als Subtrahend auftreten, werden vom TR automatisch in Klammern gesetzt.

Erläuterung der Lösung:

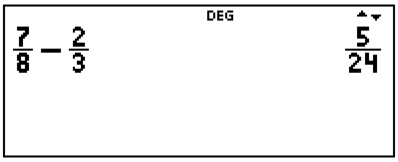
Gleichnamige Brüche werden addiert (subtrahiert), indem man die Zähler addiert (subtrahiert). Daher müssen zunächst die Brüche gleichnamig gemacht werden.

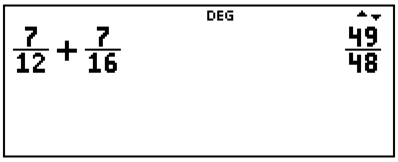
$$3\frac{5}{12}+\frac{11}{18}=3+\frac{15}{36}+\frac{22}{36}=3+\frac{37}{36}=4\frac{1}{36}=\frac{145}{36}$$

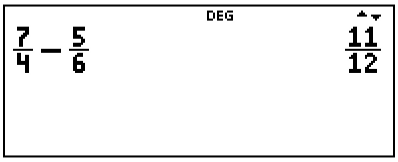
$$3\frac{5}{12}+\frac{11}{18}=\frac{41}{12}+\frac{11}{18}=\frac{123}{36}+\frac{22}{36}=\frac{145}{36}=4\frac{1}{36}$$

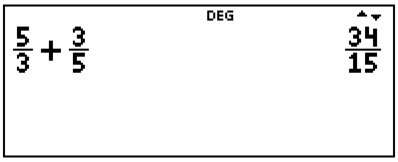
Übungsaufgaben

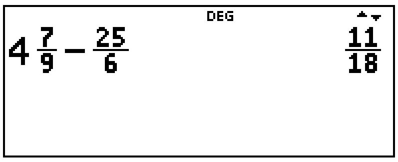
Welche Umformungen wurden vorgenommen? Notiere die fehlenden Zwischenschritte.
Wenn das Ergebnis ein unechter Bruch ist, notiere es auch als gemischte Zahl.

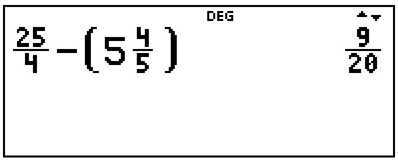


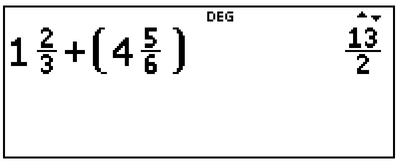


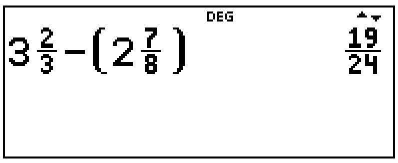












Gebiet: Arithmetik	Einsatz ab Stufe 5 (auch zur Wiederholung geeignet)

Multiplizieren und Dividieren von Brüchen

Beispiel-Aufgabe

Notiere die fehlenden Zwischenschritte.

DEG

$\frac{5}{12}*\frac{8}{15}$ $\frac{2}{9}$

Verwendete Optionen des TI-30X Pro MathPrint™:

- Eingabe der gemischten Zahl mithilfe von $[\square\frac{\square}{\square}]$, eines Bruchs mithilfe von $\boxed{\frac{\square}{\square}}$
- Umwandeln einer gemischten Zahl in einen unechten Bruch und umgekehrt ($\boxed{\text{math}}$-Menü)

Hinweis: Gemischte Zahlen, die als zweiter Faktor auftreten, werden vom TR automatisch in Klammern gesetzt.

Erläuterung der Lösung: Brüche werden miteinander multipliziert, indem man die Zähler multipliziert und durch das Produkt der Nenner teilt. Vor dem Ausmultiplizieren ist nach Möglichkeit zu kürzen.

$$\frac{5}{12}\cdot\frac{8}{15}=\frac{5\cdot 8}{12\cdot 15}=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$$

Übungsaufgaben

Welche Umformungen wurden vorgenommen? Notiere die fehlenden Zwischenschritte.
Wenn das Ergebnis ein unechter Bruch ist, notiere es auch als gemischte Zahl.

DEG $7*\frac{3}{4}$ $\frac{21}{4}$	DEG $12*\frac{5}{9}$ $\frac{20}{3}$
DEG $\frac{5}{9}*\frac{3}{20}$ $\frac{1}{12}$	DEG $\frac{8}{9}*\frac{3}{5}*\frac{7}{12}$ $\frac{14}{45}$
DEG $4\frac{3}{5}*(2\frac{1}{4})$ $\frac{207}{20}$	DEG $3\frac{2}{3}*\frac{9}{11}$ 3
DEG $\frac{\frac{1}{5}}{6}$ $\frac{1}{30}$	DEG $\frac{1}{\frac{5}{6}}$ $\frac{6}{5}$
DEG $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}}$ $\frac{2}{3}$	DEG $\frac{1\frac{2}{3}}{2\frac{3}{4}}$ $\frac{20}{33}$

Gebiet: Arithmetik	Einsatz ab Stufe 5	
Kennenlernen der Rechner-Optionen - Befehle im math-Menü		
DEG ans▸n/d◂▸Un/d	n/d = *numerator/denominator* = *Zähler/Nenner* U = *unit = ganze Zahl*	DEG $3\frac{2}{3}$▸n/d◂▸Un/d $\frac{11}{3}$ $\frac{15}{4}$▸n/d◂▸Un/d $3\frac{3}{4}$
DEG lcm(	lcm = *kgV* = *least common multiple* = *kleinstes gemeinsames Vielfaches*	DEG lcm(4,6) 12 lcm(8,10 40 lcm(12,15) 60
DEG gcd(	gcd = ggT = *greatest common divisor* = *größter gemeinsamer Teiler*	DEG gcd(42,48) 6 gcd(35,48 1 gcd(28,36 4
DEG ans▸Pfactor	Pfactor = *prime factorization* = *Primfaktorzerlegung*	DEG 72▸Pfactor 2^3*3^2

Der erste und der vierte Befehl verlangt die Eingabe einer Zahl (deshalb steht dort „ans“). Der zweite und dritte Befehl erwartet die Angabe von zwei natürlichen Zahlen, die durch ein Komma [,] voneinander getrennt werden. Auf die abschließende Klammer kann verzichtet werden.

Übungsaufgaben		
Bestimme die Lösung zunächst im Kopf!	DEG lcm(30,24)	DEG gcd(30,24)
Bestimme die Lösung zunächst im Kopf!	DEG lcm(42,45)	DEG lcm(42,45)
Was hat das mit den vorangehenden Aufgaben zu tun?	DEG 30▸Pfactor 2*3*5 24▸Pfactor 2^3*3	DEG 42▸Pfactor 2*3*7 45▸Pfactor 3^2*5
Welche Gesetzmäßigkeit steckt dahinter? Probiere zunächst mit kleineren Zahlen aus.	DEG lcm(9,15) 45 ans*gcd(9,15) 135	DEG gcd(18,24) 6 ans*lcm(18,24) 432

Gebiet: Arithmetik	Einsatz ab Stufe 6	
Kennenlernen der Rechner-Optionen - Befehle im math-Menü		
round = runden Wichtig ist die Angabe, auf wie viele Dezimalstellen gerundet werden soll.	round$(\frac{5}{7}$,2) 0.71	round$(\frac{5}{7}$,3) 0.714
iPart = integer part = ganzzahliger Anteil fPart = fraction part = Bruch Anteil (nach Abzug des ganzzahligen Anteils)	iPart(4.36) 4 fPart(4.36) 0.36	iPart$(\frac{8}{5})$ 1 fPart$(\frac{8}{5})$ $\frac{3}{5}$
min = Minimum max = Maximum (jeweils von zwei Zahlen)	min$(5\frac{1}{7}$,5.1) 5.1	max$(\frac{8}{13}$,0.6) 0.615384615
	Umwandeln eines Bruchs in eine Dezimalzahl durch die ◂▸≈-Taste	$\frac{8}{13}$ ◂▸ 0.615384615
int = ganzzahliges Ergebnis mod = Rest bei einer Division	int(23/4) 5 mod(23,4) 3	mod(18,3) 0 mod(18,4) 2 mod(18,5) 3
Übungsaufgaben		
Bestimme die Lösung zunächst im Kopf!	round(4.321,2)	round$(\frac{5}{13}$,3)
Bestimme die Lösung zunächst im Kopf!	iPart$(\frac{73}{17})$	fPart$(\frac{8}{3})$
Bestimme die Lösung zunächst im Kopf!	min$(\frac{23}{7}$,$3\frac{1}{3})$	max$(5\frac{1}{3}$,5.3)
Bestimme die Lösung zunächst im Kopf!	mod(17,3)	mod(17,4)

Gebiet: Stochastik	Einsatz ab Stufe 5

Wie groß ist die Anzahl der Primteiler? (Spiel)

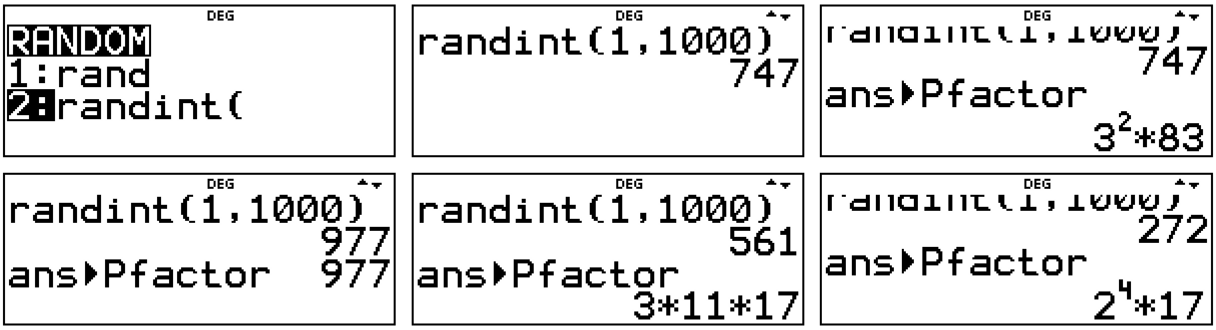
Beispiel-Aufgabe

Mithilfe des Zufallszahlengenerators des TI-Schulrechners werde eine natürliche Zahl aus der Menge {1, 2, …, 1000} gewählt. Wie viele Primteiler enthält diese Zahl?

Erläuterung der Lösung

Eine solche ganzzahlige Zufallszahl erzeugt der Taschenrechner mithilfe des randint-Befehls im [random]-Menü; dabei wird durch die erste Eingabe (1) die kleinst-mögliche der zu erzeugenden Zahlen festgelegt, durch die zweite Eingabe (1000) die größt-mögliche natürliche Zahl.

Durch den Pfactor-Befehl im [math]-Menü wird die Zerlegung der Zahl in Primfaktoren veranlasst; dabei weist „ans“ (= answer) darauf hin, dass der Pfactor-Befehl das Ergebnis des vorangehenden Befehls verarbeitet.



An den Antworten lesen wir ab, dass die Zahl 977 eine Primzahl ist, die Zahl 561 drei Primteiler besitzt und die Zahl 272 nur zwei Primteiler, nämlich die beiden Primzahlen 2 und 17.

Übungsaufgaben

1. Mache ein Spiel mit einem Partner: Jeder von euch erzeugt eine Zufallszahl und bestimmt mit dem TI-Schulrechner die Anzahl der Primfaktoren. Gewonnen hat, wer die größere [kleinere] Anzahl von Primteilern hat. Wenn die Anzahl gleich ist, muss die Spielrunde wiederholt werden.

➢ Welche der beiden Spielregeln ist günstiger?

➢ Protokolliere, wie oft die Anzahl der Primfaktoren 1, 2, 3, 4 beträgt. (Warum kann die Anzahl der Primteiler nicht größer als 4 sein?)

Anzahl Primfaktoren	1	2	3	4	
absolute Häufigkeit					← Eintragung der Strichliste

2. Der TI-Schulrechner kann natürliche Zahlen bis 999999 in Primfaktoren zerlegen. Führt in der Klasse den o. a. Zufallsversuch mit dem Befehl randInt(1,999999) oft durch und protokolliert, wie oft welcher Fall auftritt. (Warum kann die Anzahl der Primteiler nicht größer als 7 sein?)

Anzahl Primfaktoren	1	2	3	4	5	6	7
absolute Häufigkeit							

Gebiet: Stochastik	Einsatz ab Stufe 5

Was ist der ggT von zwei gewürfelten Augenzahlen? (Spiel)

Beispiel-Aufgabe

Mithilfe des Zufallszahlengenerators des TI-Schulrechners werden zwei natürliche Zahlen aus der Menge {1, 2, …, 6} erzeugt – das sind die beiden Augenzahlen.

Von diesen beiden Augenzahlen muss dann schnell der größte gemeinsame Teiler bestimmt werden. Das geht im Kopf, kann aber auch vom TI-Schulrechner erledigt werden.

Erläuterung der Lösung

Mithilfe des Zufallszahlengenerators im [random]-Menü des TI-Schulrechners kann das Würfeln simuliert werden.

Durch Wiederholung des Befehls sind im Beispiel rechts nacheinander die Augenzahlen 4 und 3 gewürfelt worden.

Der ggT-Befehl im [math]-Menü erwartet die Eingabe von zwei natürlichen Zahlen. Um zwei Zufallszahlen einzugeben, muss man also den randInt-Befehl zweifach eintippen.

Durch Drücken der [enter]-Taste wird der Befehl *gcd(randint(1,6),randint(1,6))* wiederholt, sodass man sehr schnell viele Spielrunden durchführen kann.

Übungsaufgaben

(1) Führe das Spiel sehr oft durch und fertige eine Strichliste an.

ggT der Augenzahlen	1	2	3	4	5	6	
absolute Häufigkeit							

(2) Der TI-Schulrechner zeigt die beiden Augenzahlen nicht an, sondern bestimmt direkt den ggT der beiden Augenzahlen und zeigt *diesen* Wert an.

Bei welchen Werten des ggT kann man darauf zurückschließen, welche beiden Zahlen der TI-Schulrechner erzeugt hatte?

(3) Man kann das Spiel auch als Wettspiel durchführen. Abwechselnd werden die Ergebnisse als Punktwerte für die beiden Spieler eingetragen. Wer hat nach 10 Runden die größere Gesamtpunktzahl erreicht?

ggT der Augenzahlen	1	2	3	4	5	6	ges.
Spieler 1							
Spieler 2							

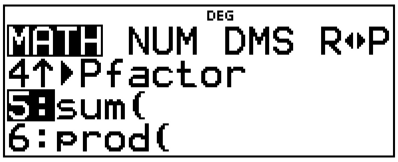
Gebiet: Arithmetik	Einsatz ab Stufe 7

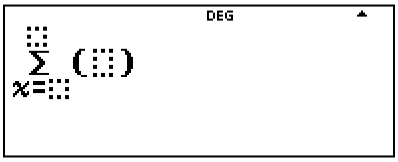
Terme aufstellen – Berechnen von Summen

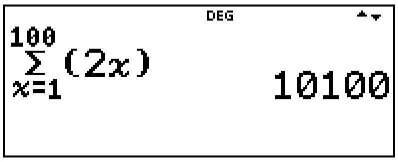
Beispiel-Aufgabe

Die Zahlen der Folge 2, 4, 6, 8, … von natürlichen Zahlen lassen sich mithilfe eines einfachen Terms beschreiben: a(x) = 2 · x, also a(1) = 2 · 1 = 2, a(2) = 2 · 2 = 4, …, a(100) = 200

Auftrag: Berechne die Summe der ersten 100 Glieder dieser Folge, also 2 + 4 + 6 + … + 200





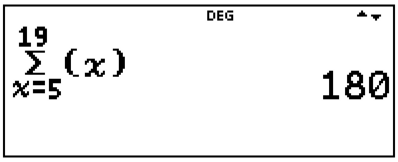


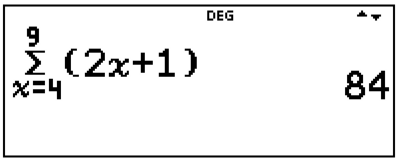
Verwendete Optionen des TI-30X Pro MathPrint™:

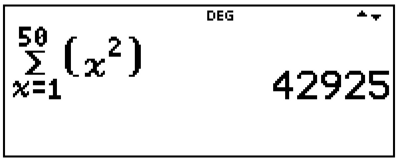
Die Berechnung von Summen von Zahlenfolgen kann mithilfe des sum-Befehls im math-Menü erfolgen. In die Leerstelle in runden Klammern muss der Term eingesetzt werden; die Variable x (oder auch y, z, t, a, b, c, d) gibt man über die x^{yzt}_{abcd}-Taste ein. Unter bzw. über das Summenzeichen (∑) wird die *Nummer* des kleinsten und des größten Folgenglieds eingegeben.

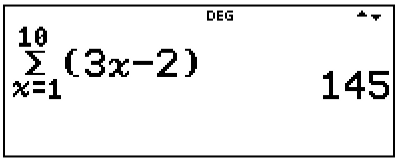
Übungsaufgaben

Welche Summe hat der TR berechnet? Welche Zahlen wurden addiert? Notiere jeweils die ersten drei und die letzten beiden Summanden dieser Summe.









(1) Gib einen Term für die Glieder der Zahlenfolge an mit a(1) = 5, a(2) = 10, a(3) = 15, …
Berechne die Summe der ersten 20 Glieder dieser Folge.

(2) Gib einen Term für die Glieder der Zahlenfolge an mit a(1) = 1, a(2) = 5, a(3) = 9, …
Berechne die Summe der ersten 25 Glieder dieser Folge.

(3) Gib einen Term für die Glieder der Zahlenfolge an mit a(1) = 2, a(2) = 5, a(3) = 8, …
Berechne die Summe der ersten 40 Glieder dieser Folge.

(4) Welche Summe ist größer: die Summe der ersten 20 Quadratzahlen von natürlichen Zahlen oder die Summe der ersten 75 natürlichen Zahlen?

Gebiet: Beschreibende Statistik	Einsatz ab Stufe 6

Vergleich von statistischen Daten mithilfe des Medians und der Quartile

Beispiel-Aufgabe

Um einen Leistungsvergleich herzustellen, wurde in zwei Parallelklassen (a und b) ein Test durchgeführt. Dabei ergab sich bei den erreichten Punktzahlen folgende Häufigkeitsverteilung.

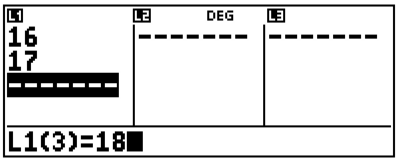
Vergleiche die beiden Verteilungen. Bestimme dazu den Median und die Quartile.

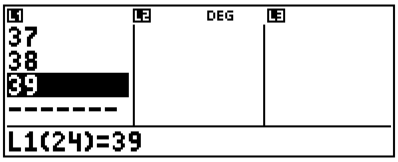
	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
a	1	0	0	2	1	1	1	0	1	1	0	2	4	0	0	2	3	2	2	1	2	0	1	1
b	0	0	0	0	0	1	1	0	3	1	6	0	5	3	2	2	1	1	0	0	0	0	1	0

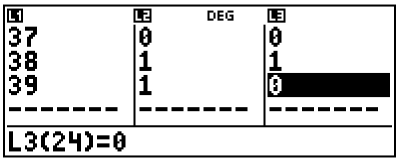
Erläuterung der Lösung

Die Daten werden mithilfe des [data]-Befehls in die zur Verfügung stehenden Listen L1, L2 und L3 eingegeben: in Liste L1 die von den Schülern/innen erreichten Punktzahlen von 16 bis 39 (einschl.) sowie in Liste L2 bzw. Liste L3 die Häufigkeiten, mit denen diese Punktzahlen in den beiden Klassen vorkamen.

Hinweis: Die Eingabe erfolgt am besten listenweise, d. h., nacheinander die Daten von L1, L2 und dann L3, weil nach Drücken der [enter]-Taste der Cursor jeweils ins nächst-untere und nicht in das nebenstehende Feld springt.

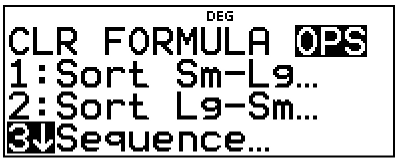


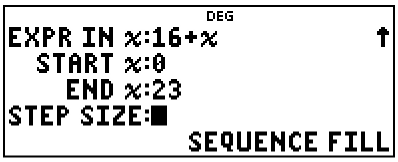




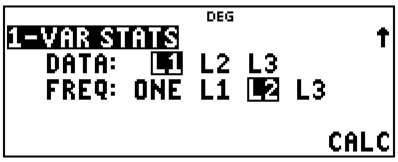
Die Eingabe der Daten in Liste L1 kann einfacher mithilfe der Option „Sequence" (= Zahlenfolge) erfolgen, weil es sich hier um die Folge der natürlichen Zahlen von 16 bis 39 handelt.

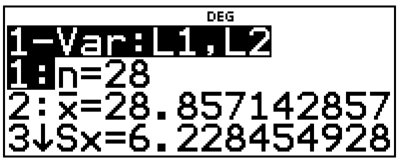
Setzt man in den Term 16 + x nacheinander die natürlichen Zahlen 0 bis 23 ein, so ergeben sich die gewünschten Eintragungen 16, 17, …, 39 in Liste L1.

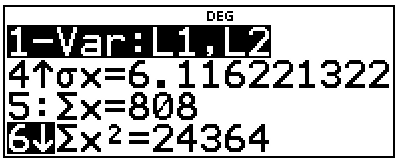


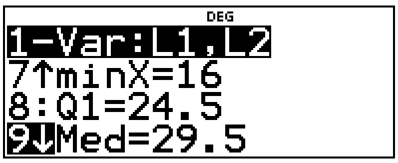


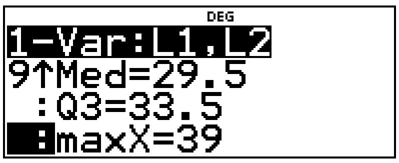
Wählt man dann die 1-Variablen-Statistik im [stat-reg/distr]-Menü, dann fragt der Rechner noch ab, welche Listen ausgewertet werden sollen. Um die Leistungen der Klasse a zu bewerten, müssen die Daten aus Liste L1 (= Punktzahlen) mit den Häufigkeiten (FRQ = frequency) aus Liste L2 untersucht werden











Gebiet: Beschreibende Statistik	Einsatz ab Stufe 6

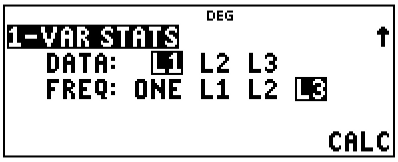
Vergleich von statistischen Daten mithilfe des Medians und der Quartile (Forts.)

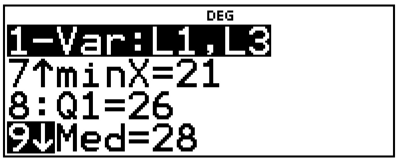
Gemäß Aufgabenstellung werden die folgenden Daten benötigt:

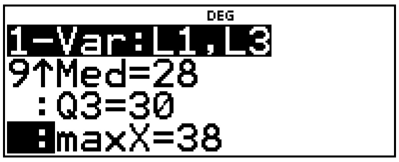
Minimum = 16 ; unteres Quartil Q_1 = 24,5 ; Median = 29,5 ; oberes Quartil 33,5 ; Maximum = 39

Entsprechend untersucht man die Daten aus Klasse b. Hier ergibt sich:

Minimum = 21 ; unteres Quartil Q_1 = 26 ; Median = 28 ; oberes Quartil 30 ; Maximum = 38







Der Vergleich der beiden Klassen zeigt:

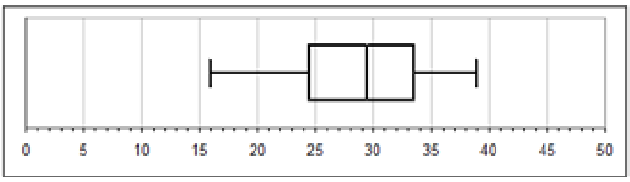
Der Median liegt in Klasse a oberhalb des Medians von Klasse b.

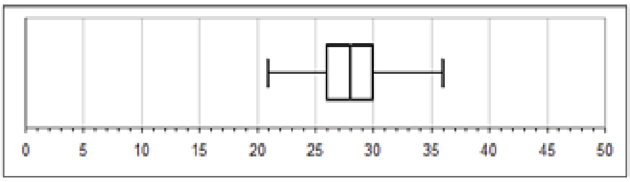
Die Daten der Klasse a streuen jedoch stärker als die von Klasse b, wie man an den Quartilen ablesen kann:

50% der Punktwerte liegen in Klasse a zwischen 24,5 und 33,5, in Klasse b zwischen 26 und 30.

Außerdem liegen Maximum und Minimum in Klasse a weiter vom Median entfernt als in Klasse b.

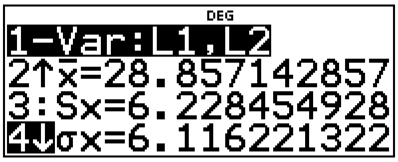
Mithilfe der Daten kann man Boxplots zeichnen, durch die die Eigenschaften noch deutlicher werden:

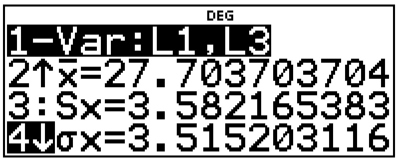




Hinweis: Auch der Vergleich der Mittelwerte $\bar{x}$ (= arithmetisches Mittel) zeigt:
Der Mittelwert der Leistungen in Klasse a ist höher als in Klasse b.

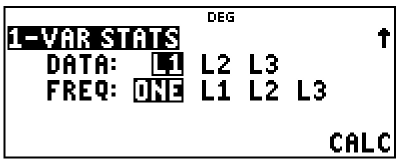
Das Streuverhalten um den Mittelwert kann man ebenfalls aus der 1-Variablen-Statistik ablesen: Die sog. mittlere quadratische Abweichung σ_X ist in Klasse b deutlich kleiner als in Klasse a.





Hinweis: Eine 1-Variablen-Statistik kann vom TI-Schulrechner auch für den Fall ermittelt werden, wenn die Daten als ungeordnete Liste eingegeben werden (also die Punktwerte der einzelnen Schüler/innen in beliebiger Reihenfolge).

Für die Auswertung muss dann als Häufigkeit 1 gewählt werden (also Frequenz ONE).



Übungsaufgabe

Vergleiche die erreichten Punktzahlen der Klasse c mit denen aus Klasse a und b.

	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
c	0	1	0	1	1	2	1	0	1	1	3	1	3	2	3	2	1	3	1	1	0	0	0	1

Gebiet: Algebra	Einsatz ab Stufe 8

Lösen eines linearen Gleichungssystems mit 2 Gleichungen und 2 Variablen

Beispiel-Aufgabe

Gesucht sind zwei Zahlen x und y, für die gilt:

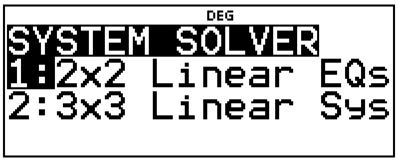
- Addiert man das Doppelte von x zum Dreifachen von y, so erhält man -5. Subtrahiert man das Doppelte von y vom Dreifachen von x, so erhält man 12.

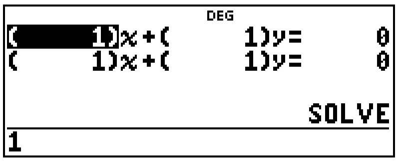
Zu lösen ist also das Gleichungssystem: 2x + 3y = -5 und 3x – 2y = 12

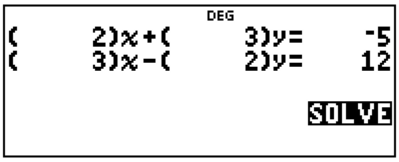
Erläuterung der Lösung

Die [sys-solv]-Option „2x2 LIN EQs“ (*linear equations*) des TI-Schulrechners erwartet zunächst die Eingabe der in den beiden Gleichungen auftretenden Zahlen (die sog. Koeffizienten), außerdem das Rechenzeichen zwischen dem ersten und zweiten Summanden der linken Seite der Gleichung (das Rechenzeichen + muss ggf. noch in – abgeändert werden).

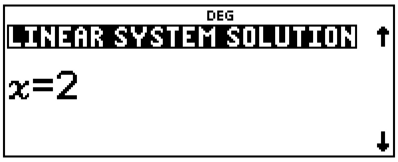
Diese gibt man nacheinander ein; nach Drücken der [enter]-Taste springt der Cursor jeweils zum nächsten einzugebenden Zeichen.

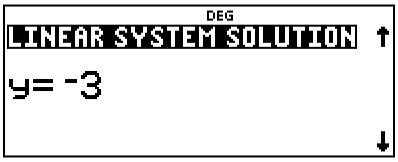






Hat man alle Koeffizienten und das Rechenzeichens eingegeben, erhält man nach Drücken der [enter]-Taste die Lösung des Gleichungssystems, das ist ein Paar von Zahlen, die gemeinsam die beiden Gleichungen erfüllen. In der Beispielaufgabe ergibt sich (2 I -3) als Lösung.





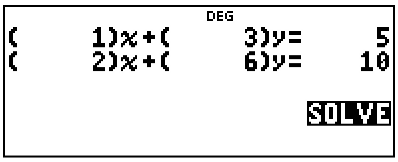
Übungsaufgaben

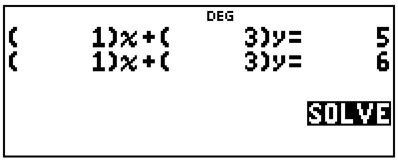
(1) Löse mithilfe des TI-30X Pro MathPrint™ das Gleichungssystem

(a) $\left| \begin{matrix} 2x - 5y = 7 \\ 3x + 1y = 5 \end{matrix} \right|$ (c) $\left| \begin{matrix} 0{,}3x - 0{,}7y = -0{,}9 \\ -0{,}1x + 0{,}9y = 2{,}3 \end{matrix} \right|$

(b) $\left| \begin{matrix} -1x + 6y = 1 \\ 5x - 2y = 2 \end{matrix} \right|$ (d) $\left| \begin{matrix} \frac{2}{3}x - \frac{1}{6}y = \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}y = -\frac{3}{4} \end{matrix} \right|$

(2) Gib auch die nachfolgenden beiden Gleichungssysteme ein. Überlege, was die Rückmeldung des Rechners bedeutet, und gib eine Begründung hierfür an:





Gebiet: Funktionen	Einsatz ab Stufe 8

Kontrolle der Gleichung einer Geraden durch zwei gegebene Punkte

Beispiel-Aufgabe

Zeige: Die Gerade durch die beiden Punkte P (2 I 4) und Q (7 I 6) lässt sich mithilfe der Gleichung $y = \frac{2}{5}x + \frac{16}{5}$ beschreiben.

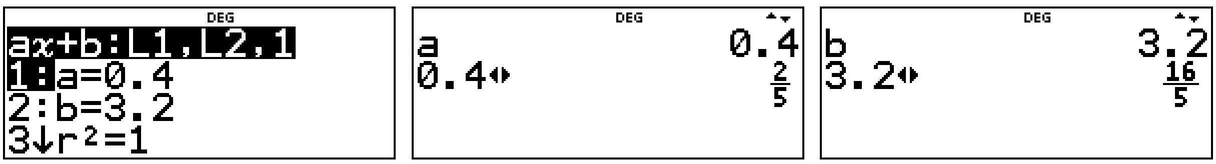
Kontrolliere das Ergebnis der Rechnung mithilfe einer linearen Regression.

Erläuterung der Lösung

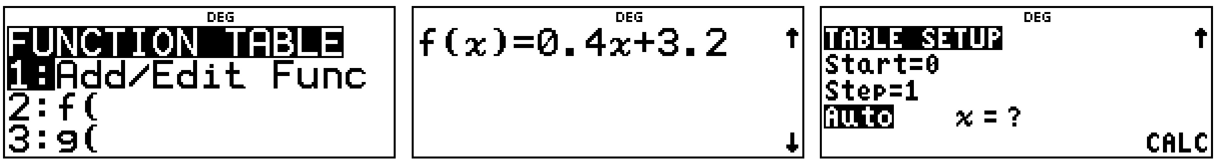
Mithilfe der Methode der linearen Regression, über die der Schulrechner als Option 4 (LinReg) im [stat-reg/distr]-Menü verfügt, findet man eine Gerade, die am besten zu einer Messreihe von Punkten passt. Wenn die Messreihe nur aus zwei Punkten besteht, verläuft die Regressionsgerade *genau* durch die beiden Punkte.

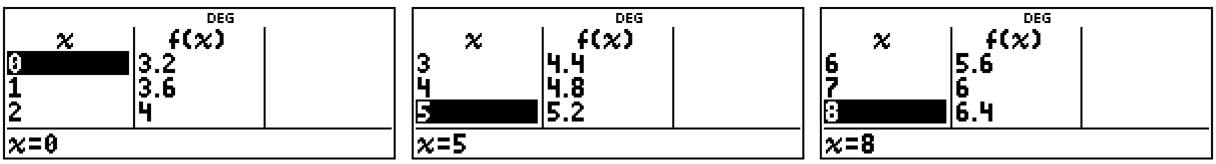
Man gibt also die Koordinaten der beiden Punkte als Liste L1 (x-Koordinaten der Punkte) und L2 (y-Koordinaten) über das [data]-Menü ein und ruft über das [stat-reg/distr]-Menü die Option „LinReg“ auf. Der Schulrechner fragt noch einmal ab, ob die x-Koordinaten tatsächlich in L1 abgespeichert sind und die y-Koordinaten in L2 und ob diese Punkte *einfach gewichtet* werden (ONE). Dann wird unter der Option RegEQ die Möglichkeit angeboten, die Gleichung der Geraden als Funktionsgleichung unter f(x) abzuspeichern.

Im nächsten Schritt wird dann angezeigt, welche Werte die beiden Koeffizienten a und b in der linearen Gleichung y = ax + b haben. (Die Angabe $r^2 = 1$ bestätigt, dass die Gerade tatsächlich durch die beiden Punkte verläuft: „100 % richtig“.) Die Koeffizienten a und b werden als Dezimalzahlen angezeigt. Da die Werte automatisch unter „a“ und „b“ abgespeichert werden, kann man diese über [x yzt abcd] aufrufen und mithilfe des [◂▸≈]-Befehls als Bruch darstellen.



Um weitere Punkte auf der Geraden zu bestimmen, ruft man die im [table]-Menü abgespeicherte Funktion f(x) auf (freie Wahl der Schrittweite Δx im TABLE SETUP).





Übungsaufgaben

Kontrolliere weitere selbst berechnete Geradengleichungen mithilfe der vorgestellten Methode.

Gebiet: Funktionen	Einsatz ab Stufe 8

Bestimmen einer Geradengleichung zu gegebenen Punkten

Beispiel-Aufgabe

Gegeben sind die Punkte P (2 I 4) und Q (7 I 6). Bestimme die Gleichung y = m · x + b der Geraden, die durch die beiden Punkte verläuft, und bestimme weitere Punkte auf der Geraden,

Dies kann mithilfe eines Gleichungssystems mit zwei Gleichungen und zwei Variablen erfolgen.

Erläuterung der Lösung

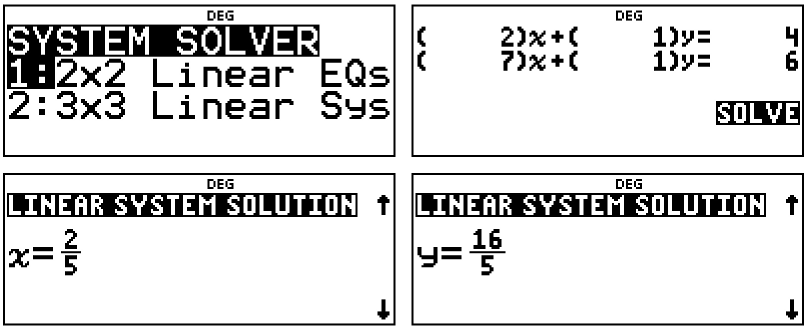
Liegt ein Punkt auf einer Geraden, dann erfüllen seine Koordinaten die Geradengleichung

y = m · x + b, hier also: 4 = m · 2 + b und 6 = m · 7 + b.

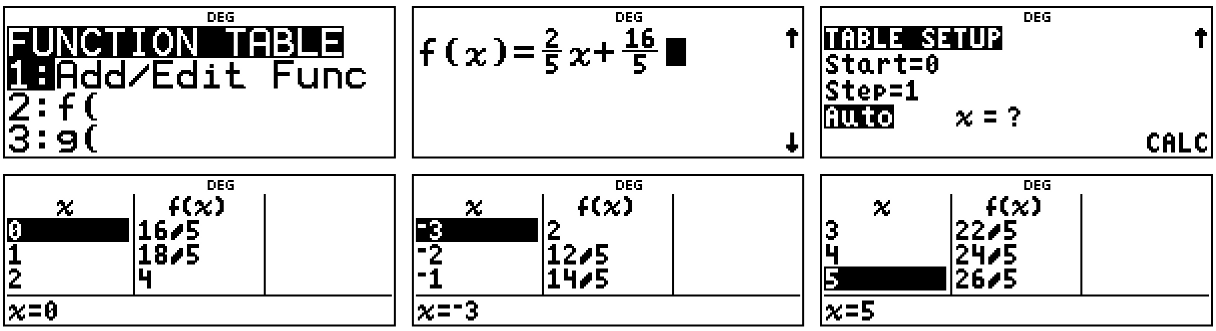
Dies ist ein lineares Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und zwei Variablen, das wir üblicherweise wie folgt notieren: $\left| \begin{array}{l} 2m + 1b = 4 \\ 7m + 1b = 6 \end{array} \right|$.

Ein solches Gleichungssystem kann man mithilfe der [sys-solv]-Option des TI-30X Pro MathPrint™ lösen - beachte: Die Variablen im Schulrechner heißen aber grundsätzlich x und y (und nicht m und b). Daher lautet auch die „Lösung“:

Die Gleichung der Geraden durch die Punkte P und Q ist: $y = \frac{2}{5}x + \frac{16}{5}$.



Um weitere Punkte auf der Geraden zu bestimmen, muss man den Funktionsterm für die Gerade erst noch in [table] eingeben.



Übungsaufgaben

Bestimme die Gleichung der Geraden y = mx + b durch die Punkte P und Q

(a) P (3 I 5) ; Q (-2 I 4)

(b) P (1 I -3) ; Q (5 I 5)

(c) P (-2 I 1) ; Q (4 I 1)

(d) P (3 I 0) ; Q (7 I -3)

(e) P (6 I 1) ; Q (-4 I -1)

(f) P (-1 I -1) ; Q (5 I -2)

Gebiet: Algebra	Einsatz ab Stufe 8 (auch zur Wiederholung geeignet)

Umformung von Wurzeltermen

Beispiel-Aufgabe

Der TI-30X Pro MathPrint™ kann einfache algebraische Umformungen von Wurzeltermen vornehmen.

Notiere die fehlenden Zwischenschritte.

DEG

$(1+\sqrt{2})^2 \qquad 3+2\sqrt{2}$

Erläuterung der Lösung

$\left(1+\sqrt{2}\right)^2 = 1^2 + 2\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 = 1 + 2\sqrt{2} + 2 = 2\sqrt{2} + 3$ (Anwendung einer binomischen Formel)

Übungsaufgaben

Welche Umformungen wurden vorgenommen? Notiere die fehlenden Zwischenschritte.

DEG $\sqrt{27} \qquad 3\sqrt{3}$	DEG $\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \frac{\sqrt{2}}{2}$
DEG $\sqrt{50}-\sqrt{18} \qquad 2\sqrt{2}$	DEG $\frac{3}{\sqrt{6}} \qquad \frac{\sqrt{6}}{2}$
DEG $(1+\sqrt{2})*(3-\sqrt{2}) \qquad 1+2\sqrt{2}$	DEG $(\sqrt{75}-\sqrt{12})^2 \qquad 27$
DEG $\frac{2}{3-\sqrt{5}} \qquad \frac{3+\sqrt{5}}{2}$	DEG $\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} \qquad \frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{2}$
DEG $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} \qquad 2-\sqrt{3}$	DEG $\frac{3-\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}} \qquad -11+5\sqrt{5}$

Beim Umformen des Bruchterms $\frac{3-\sqrt{5}}{2+\sqrt{3}}$ gibt der Schulrechner nur eine Dezimalzahl als Näherungswert an, vgl. rechts. Den Schulrechner kannst du trotzdem nutzen, um einen Term ohne Nenner zu notieren.

DEG

$\frac{3-\sqrt{5}}{2+\sqrt{3}} \qquad 0.204694969$

Gebiet: Funktionen	Einsatz ab Stufe 8

Erstellen von Wertetabellen für quadratische Funktionen

Beispiel-Aufgabe

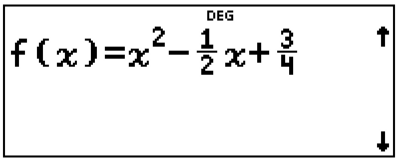
Gegeben sind die Funktionsgleichungen $f(x) = x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$ und $g(x) = x^2 + 2x - 3$.

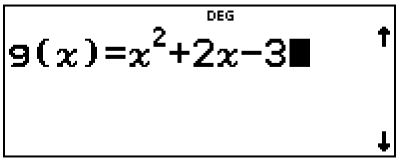
Zeichne die beiden Normalparabeln mithilfe der zugehörigen Wertetabellen.

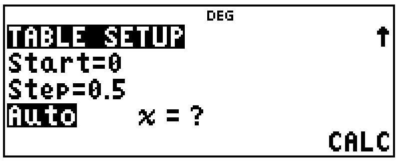
Erläuterung der Lösung

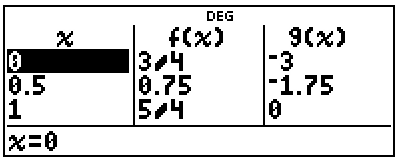
Man gibt die beiden Funktionsterme über das [data]-Menü ein. Um die beiden Wertetabellen aufzustellen, legt man den Startwert fest (hier: x = 0) und wählt eine Schrittweite (hier: Step = 0.5).

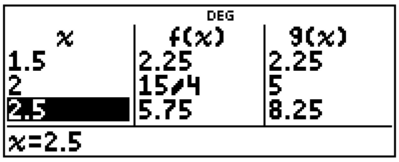
In der Wertetabelle kann man mithilfe der Pfeiltasten nach oben/unten oder rechts/links laufen.





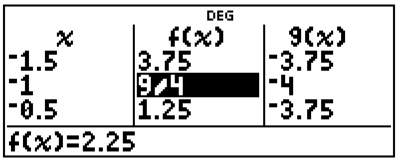


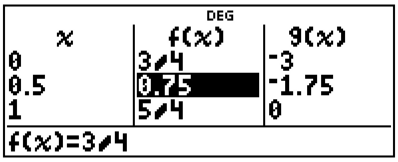


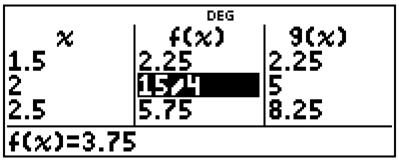


In der Wertetabelle fällt auf, dass einige Werte als Dezimalzahlen, andere als Brüche notiert sind. Dies ist eine Besonderheit des Schulrechners im MathPrint-Mode. Bei Funktionstermen, in denen Brüche (in Bruchschreibweise) auftreten, werden die Funktionswerte bei ganzzahligen x-Werten auch als Brüche angegeben, bei anderen x-Werten als Dezimalzahlen.

x-Werte und Funktionswerte können i. A. wahlweise als Brüche oder als Dezimalzahlen angezeigt werden; man muss diese Zahlen markieren und dann die [◂▸≈]-Taste drücken. Im Display erscheint dann in der Zeile *unter der Tabelle* jeweils der Bruch (0.75 = 3/4) oder umgekehrt, dann erscheint unten die Dezimaldarstellung einer Bruchzahl (15/4 = 3.75).

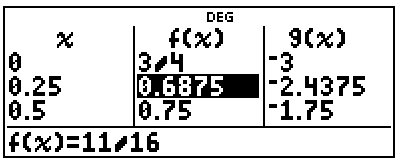


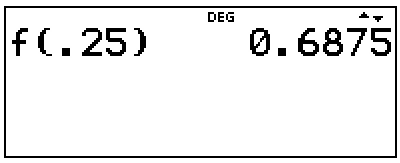




An der Wertetabelle von f(x) kann man ablesen, dass die zu f(x) gehörende Parabel achsensymmetrisch ist zu x = 0,25, denn links und rechts davon treten genau die gleichen Funktionswerte auf.

Den Scheitelpunkt S (0,25 I 0,6825) dieser Parabel ermittelt man durch Verringerung der Schrittweite auf $\Delta x = 0{,}25$, oder indem man – nach Rückkehr auf die Rechenebene ([quit]) – den Funktionswert f(0,25) mithilfe von Option 2 des [table]-Menüs berechnet.





Übungsaufgaben

Bestimme den Scheitelpunkt der zu g(x) gehörenden Parabel mithilfe einer Wertetabelle.

Gebiet: Funktionen	Einsatz ab Stufe 8

Kontrolle der Gleichung einer Parabel durch drei gegebene Punkte

Beispiel-Aufgabe

Zeige: Die Normalparabel durch die drei Punkte P (-1 | 2), Q (2 | 4) und R (5 | 24) lässt sich mithilfe der Gleichung $y = x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ beschreiben.

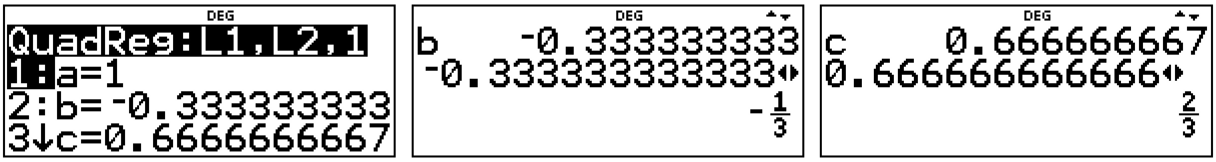
Kontrolliere das Ergebnis der Rechnung mithilfe einer quadratischen Regression.

Erläuterung der Lösung

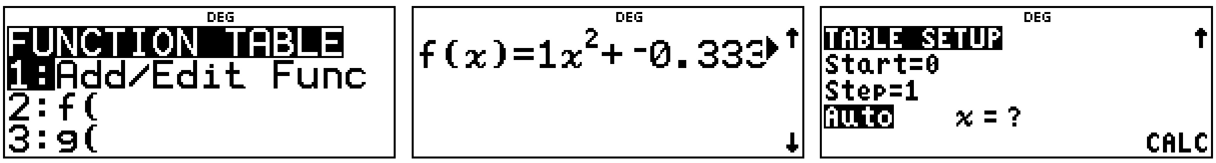
Mithilfe der Methode der quadratischen Regression, über die der Schulrechner als Option 7 (QuadraticReg) im [stat-reg/distr]-Menü verfügt, findet man eine Parabel, die am besten zu einer Messreihe von Punkten passt. Wenn die Messreihe nur aus drei Punkten besteht, verläuft die Regressionskurve *genau* durch die drei Punkte.

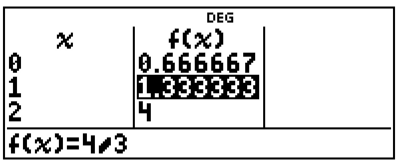
Man gibt also die Koordinaten der drei Punkte als Liste L1 (x-Koordinaten der Punkte) und L2 (y-Koordinaten) über das [data]-Menü ein und ruft über das [stat-reg/distr]-Menü die Option 7 auf. Der Schulrechner hat die Voreinstellung, bei der die x-Koordinaten in L1 abgespeichert sind und die y-Koordinaten in L2 und dass diese Punkte *einfach gewichtet* werden (ONE); dies wird durch [enter] bestätigt. Schließlich wird noch die Möglichkeit angeboten, die Gleichung der Geraden als Funktionsgleichung unter f(x) abzuspeichern.

Im nächsten Schritt wird angezeigt, welche Werte die drei Koeffizienten a, b und c in der quadratischen Gleichung y = ax² + bx + c haben. (Die Angabe r² = 1 = 100 % bestätigt, dass die Kurve tatsächlich durch die drei Punkte verläuft.) Die Koeffizienten a, b und c werden als Dezimalzahlen angezeigt. Da die Werte automatisch unter „a", „b" und „c" abgespeichert werden, kann man diese über [x yzt abcd] aufrufen und mithilfe des [◂▸≈]-Befehls als Bruch darstellen.



Um weitere Punkte auf der Parabel zu bestimmen, ruft man die im [table]-Menü abgespeicherte Funktion f(x) auf (freie Wahl der Schrittweite Δx im TABLE SETUP).





Wenn die Werte in der Wertetabelle nicht ganzzahlig sind, kann man diese i. A. durch Drücken der [◂▸≈]-Taste in einen Bruch verwandeln, vgl. Beispiel links.

Übungsaufgaben

Kontrolliere weitere selbst berechnete Parabelgleichungen mithilfe der vorgestellten Methode.

Gebiet: Funktionen	Einsatz ab Stufe 8

Bestimmen der Nullstellen / des Scheitelpunkts einer quadratischen Funktion

Beispiel-Aufgabe

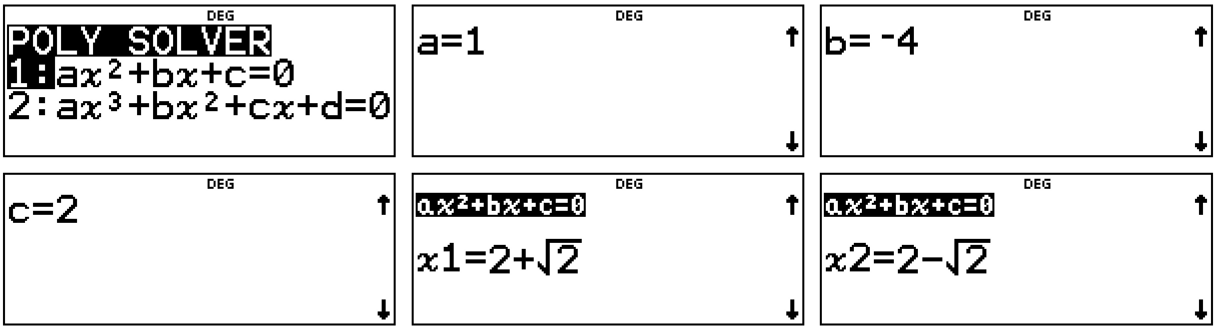
Gegeben ist die quadratische Funktion f mit $f(x) = x^2 - 4x + 2$.

a) Bestimme die beiden Nullstellen von f, d. h. löse die quadratische Gleichung $x^2 - 4x + 2 = 0$.

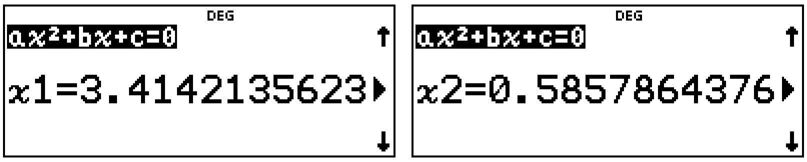
b) Bestimme den Scheitelpunkt der quadratischen Funktion.

Erläuterung der Lösung

Wählt man die Option [poly-solv] des TI-30X Pro MathPrint™, dann erwartet der Rechner zunächst die Eingabe der Koeffizienten a, b und c. Dann werden die Lösungen exakt (also gemäß der Lösungsformel) bestimmt.

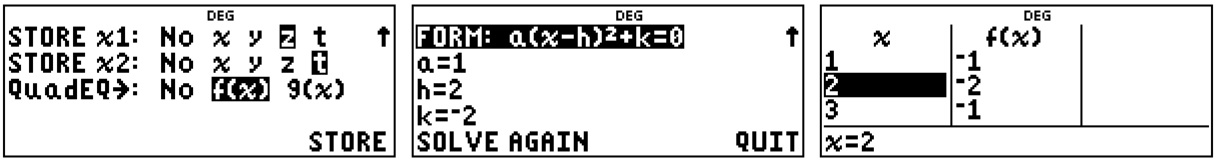


Um die Lösungen als Dezimalzahlen auszugeben, muss die [◂▸≈]-Taste getippt werden. Mit dem Pfeil ▸ werden weitere zwei Dezimalstellen angezeigt.



Man kann sowohl die Lösungen als auch den Funktionsterm unter f(x) oder unter g(x) speichern (QuadEG → f(x) oder g(x)). Mit diesem Speicherbefehl wird gleichzeitig die algebraische Umformung des Funktionsterms vorgenommen und der Rechner bestimmt die Scheitelpunktsform der Funktionsgleichung – hier: $f(x) = a\cdot(x - h)^2 + k$ mit $a = 1$, $h = 2$ und $k = -2$.

An der Scheitelpunktsform lesen wir ab, dass die quadratische Funktion den Scheitelpunkt S (2 | -2) hat. Diesen Punkt kann man auch mithilfe der Wertetabelle ([table]-Option) finden.



Übungsaufgaben

(1) Bestimme Nullstellen und Scheitelpunkt der quadratischen Funktion f mit

(a) $f(x) = x^2 - 5x + 1$ (b) $f(x) = -x^2 - 4x + 7$ (c) $f(x) = -3x^2 + 2x + 5$

(2) Die folgende quadratische Funktion f hat keine reellen Nullstellen. Welche Lösungen gibt der TI-30X Pro MathPrint™ an? Welchen Scheitelpunkt hat die quadratische Parabel?

(a) $f(x) = x^2 + 3x + 3$ (b) $f(x) = -x^2 + 4x - 6$ (c) $f(x) = 2x^2 - 5x + 4$

Gebiet: Funktionen	Einsatz ab Stufe 8

Numerische Bestimmung der Nullstellen einer quadratischen Funktion

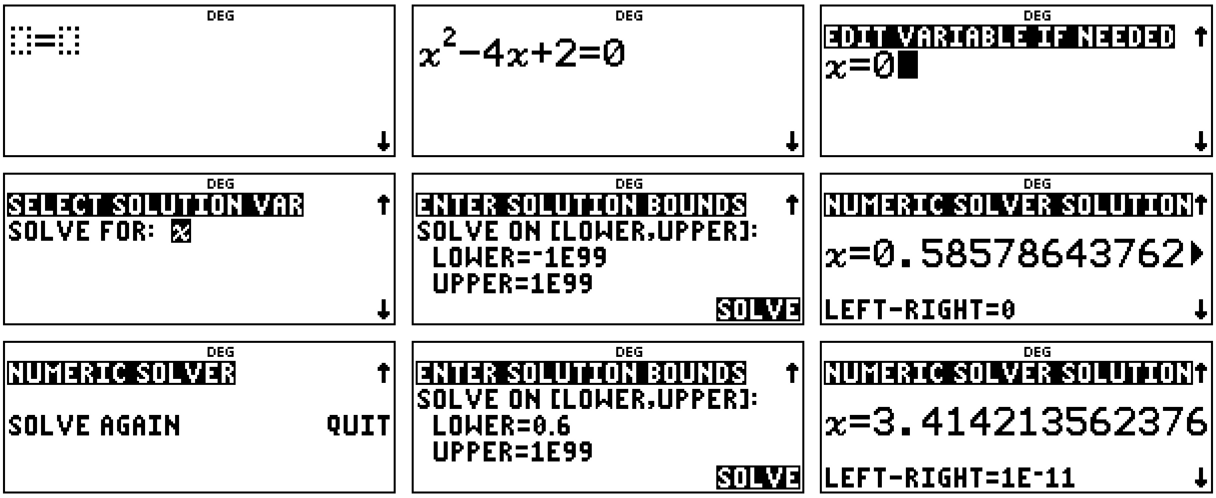
Beispiel-Aufgabe

Gegeben ist die quadratische Funktion f mit $f(x) = x^2 – 4x + 2$.

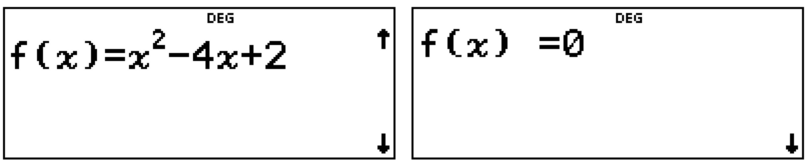
Bestimme die beiden Nullstellen von f, d. h., löse die quadratische Gleichung $x^2 – 4x + 2 = 0$.

Erläuterung der Lösung

Um eine Gleichung *numerisch* zu lösen, benutzt man die Option [num-solv]. Nach Eingabe der Gleichung wird auf dem Display der aktuelle Wert der Variablen x angezeigt. (Hat man vorher den Speicherinhalt mithilfe des Befehls [clear var] gelöscht, dann hat die Variable den Wert 0.) Man kann den Bereich einschränken, in dem der Schulrechner eine Lösung finden soll, ansonsten wird im Intervall zwischen -10^{99} und $+10^{99}$ gesucht. Der Rechner findet zunächst die kleinere der beiden Lösungen $x \approx 0{,}586$; für diese gilt: *left = right* (die linke Seite der Gleichung hat den gleichen Wert wie die rechte Seite). Nach Bestätigen des *solve again*-Befehls muss man den Suchbereich einschränken, damit auch die zweite Nullstelle gefunden werden kann.



Alternative Vorgehensweise: Statt die Gleichung $x^2 – 4x + 2 = 0$ direkt einzugeben, kann man zunächst den Funktionsterm f(x) über das [table]-Menü definieren und dann im [num-solv]-Menü die Gleichung $f(x) = 0$. Diese Möglichkeit ist zu bevorzugen, wenn man dann auch auf die Wertetabelle der Funktion zurückgreifen kann. (Es bestände dann auch die Möglichkeit nachzuschauen, wo die Funktion einen Vorzeichenwechsel hat.)



Übungsaufgaben

(1) Welche Rückmeldung erfolgt durch den Schulrechner, wenn ein Such-Intervall angegeben wird, in dem keine Lösung liegt? (z. B. lower = 4)

(2) Bestimme numerisch die Nullstellen der quadratischen Funktion f mit

(a) $f(x) = x^2 – 6x + 1$ (b) $f(x) = 2x^2 + 5x – 2$ (c) $f(x) = -x^2 – 3x + 8$

(3) Die folgende quadratische Funktion f mit $f(x) = x^2 + 4x + 5$ hat keine reellen Nullstellen. Was gibt der TI-30X Pro MathPrint™ an?

Gebiet: Algebra	Einsatz ab Stufe 8

Bestimmen der Lösung einer quadratischen Gleichung (mit Wurzeltermen)

Beispiel-Aufgabe

Gegeben ist die quadratische Gleichung $x^2 + bx + c = 0$.

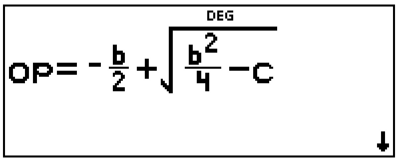
Bestimmt werden soll ein Term für die allgemeine Lösung, sodass bei Einsetzen der Koeffizienten die Lösungen – sofern sie existieren – als Wurzelterme ausgegeben werden.

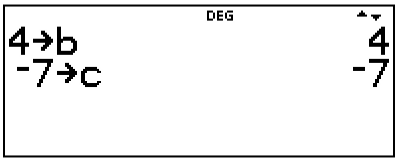
Löse hiermit dann die Gleichungen (1) $x^2 + 4x - 7 = 0$ (2) $x^2 + 4x + 7 = 0$.

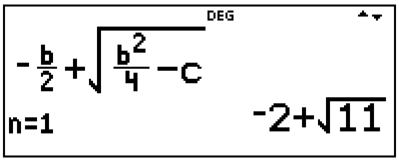
Erläuterung der Lösung

Der TI-30X Pro MathPrint™ verfügt über die Option, eine bestimmte Abfolge von Operationen abzuspeichern; dabei können unterschiedliche Variablen verwendet werden.
Einen solchen allgemeinen Term kennt man beispielsweise vom Lösungsverfahren für quadratische Gleichungen: $x = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - c}$.

Hier geht es nun darum, einen solchen Lösungsterm auf dem Schulrechner einzugeben. Dies ist allerdings nur für *einen* Term möglich, beispielsweise für die erste Lösung einer quadratischen Gleichung; für die zweite Lösung muss entsprechend das Vorzeichen im allgemeinen Term geändert werden.
Die Eingabe der Operation erfolgt mithilfe des [set op]-Befehls, bei dem man auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens den Term eingibt. Dann speichert man mithilfe des [sto→]-Befehls die Werte für die Variablen. Wenn man dann auf die [op]-Taste drückt, erscheint sofort der Wert dieses Terms, also für die Variablenwerte b = 4 und c = -7 der Term-Wert $-2 + \sqrt{11}$.

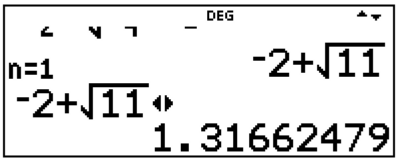




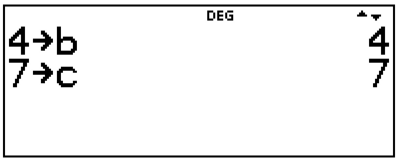


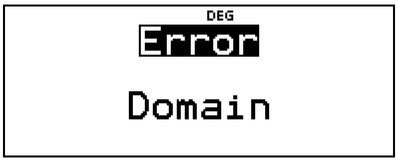
Durch Drücken der [◄►≈]-Taste erhält man eine Dezimalzahl als Näherungswert.

Die Lösungen der Gleichung $x^2 + 4x - 7 = 0$ sind $x_1 = -2 + \sqrt{11}$ und $x_2 = -2 - \sqrt{11}$



(2) Da die Gleichung $x^2 + 4x + 7 = 0$ keine reelle Lösung hat, erfolgt nach dem Betätigen der [op]-Taste die Fehlermeldung (Domain = Definitionsbereich).





Übungsaufgaben

(1) Erweitere die Lösungsformel für eine allgemeine quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$.

(2) Bestimme wie oben auch die Lösungen von

(a) $x^2 + 6x - 3 = 0$ (b) $3x^2 - 2x - 1 = 0$ (c) $x^2 + 4x + 3 = 0$

(d) $3x^2 - 12x + 8 = 0$ (e) $x^2 - 4x + 2 = 0$ (f) $2x^2 + 4x + 5 = 0$

Gebiet: Funktionen	Einsatz ab Stufe 8

Bestimmen eines Rechtecks mit möglichst großem Flächeninhalt

Beispiel-Aufgabe

Ein Tiergehege in rechteckiger Form soll längs einer vorhandenden Mauer angelegt werden. Zur Verfügung steht hierfür ein Maschendrahtzaun von insgesamt 20 m [18 m] Länge.

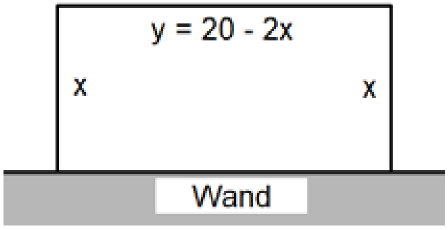
Wie können die Rechteckseiten gewählt werden, damit der Flächeninhalt möglichst groß ist?

Erläuterung der Lösung

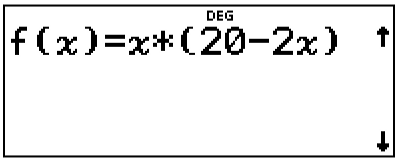
Bezeichnet man die Seitenlängen des Rechtecks mit x und y, dann gilt: $2x + y = 20$, also $y = 20 – 2x$.

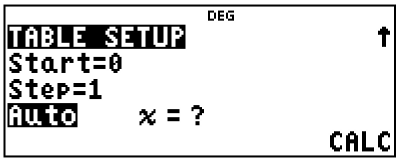
Der Flächeninhalt des Rechtecks berechnet sich also mithilfe des Terms einer quadratischen Funktion

$f(x) = x \cdot y = x \cdot (20 – 2x)$



Dieser Funktionsterm kann im [table]-Menü eingegeben werden. Der Schulrechner erstellt automatisch eine Wertetabelle.





x	f(x)
0	0
1	18
2	32

x=0

x	f(x)
3	42
4	48
5	50

x=5

x	f(x)
6	48
7	42
8	32

x=8

Der Tabelle kann man entnehmen, dass der Flächeninhalt für x = 5 m (also y = 10 m) am größten ist. Da die Funktionswerte symmetrisch zum Funktionswert bei x = 5 sind, liegt dort tatsächlich der größte Wert vor (d. h., wegen der Symmetrie kann ausgeschlossen werden, dass es links oder rechts von x = 5 einen größeren Funktionswert gibt).

Analog ergibt sich für die Zaunlänge von 18 m der Funktionsterm $f(x) = x \cdot (18 – 2x)$ mit

x	f(x)
0	0
1	17
2	30

x=0

x	f(x)
3	39
4	44
5	45

x=5

x	f(x)
6	42
7	35
8	24

x=8

Betrachtet man nur die *ganzzahligen* Werte, dann liegt ein maximaler Flächeninhalt bei x = 5 vor, aber die Funktionswerte links und rechts von dieser Stelle sind nicht symmetrisch gleich.

Eine Verfeinerung der Schrittweite in der Wertetabelle auf $\Delta x = 0{,}5$ ergibt eine Tabelle mit Funktionswerten, die symmetrisch zum Maximum bei x = 4,5 m liegen (also y = 9 m).

x	f(x)
2.5	32.5
3	36
3.5	38.5

x=2.5

x	f(x)
4	40
4.5	40.5
5	40

x=5

x	f(x)
5.5	38.5
6	36
6.5	32.5

x=6.5

Übungsaufgaben

Bestimmen Sie den maximalen Flächeninhalt für eine Zaunlänge von 19 m [19,5 m].

Gebiet: Funktionen	Einsatz ab Stufe 9

Bestimmen der Verdopplungszeit bei Wachstumsprozessen

Beispiel-Aufgabe

Ein Kapital von 1000 € werde mit einen jährlichen Zinssatz verzinst; die Zinsen werden jeweils zum Kapital hinzugefügt. Nach wie vielen Jahren hat sich das Kapital verdoppelt?

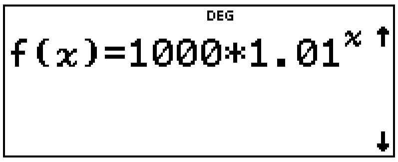
Der Zinssatz p beträgt (1) 1 % (2) 2 % (3) 2,5 % (4) 3 % .

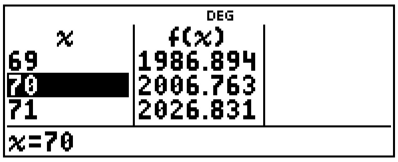
Durch die Rechenbeispiele ergibt sich eine einfache Merkregel: Zwischen dem Zinssatz p und der Verdopplungszeit d besteht ein einfacher Zusammenhang: $p \cdot d \approx 70$.

Erläuterung der Lösung

Zu lösen ist die Gleichung: $2000 = 1000 \cdot q^n$, wobei $q = 1 + p$ (p = Zinssatz).

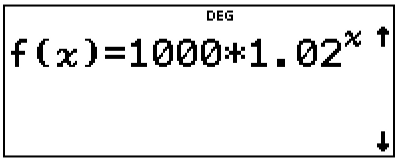
1. Lösungsweg: Suche in der Wertetabelle der Funktion f mit $f(x) = 1000 \cdot q^x$ nach demjenigen Wert von x, bei dem der Funktionswert 2000 überschritten wird.

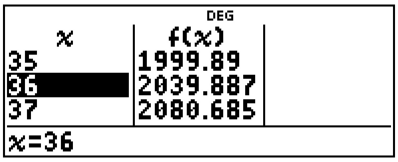




Das Kapital hat sich nach n ≈ 70 Jahren verdoppelt.

Es gilt $n \cdot p \approx 70 \cdot 1 = 70$.





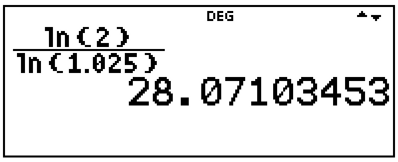
Das Kapital hat sich nach n ≈ 36 Jahren verdoppelt.

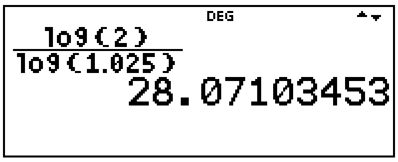
Es gilt $n \cdot p \approx 35 \cdot 2 = 70$.

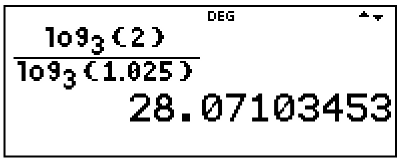
2. Lösungsweg: Das Problem lässt sich auch so formulieren: Gesucht sind die Lösungen der Gleichung $q^n = 2$. Durch Logarithmieren der beiden Seiten der Gleichung erhält man hieraus:

$n \cdot \log(q) = \log(2)$, also $n = \frac{\log(2)}{\log(q)}$ (*Hinweis*: Die Logarithmen-Basis spielt keine Rolle.)

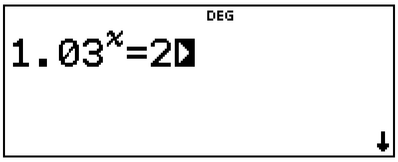
Im Teilaufgabe c), also p = 2,5 %, verdoppelt sich das Kapital nach n ≈ 28 Jahren. Auch hier gilt: $n \cdot p \approx 28 \cdot 2{,}5 = 70$.

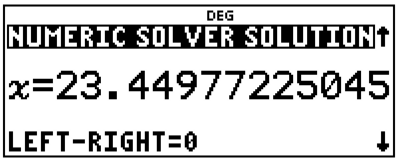






3. Lösungsweg: Numerische Lösung der Gleichung $q^n = 2$.





Im Fall p = 3 % verdoppelt sich das Kapital nach n ≈ 23,4 Jahren. Es gilt $n \cdot p \approx 23{,}4 \cdot 3 \approx 70$.

Übungsaufgaben

(1) Untersuche die Gültigkeit der $p \cdot d \approx 70$ -Regel auch für andere Prozentsätze.

(2) Suche auch eine Regel für die Verdreifachung eines Kapitals.

Gebiet: Funktionen	Einsatz ab Stufe 10

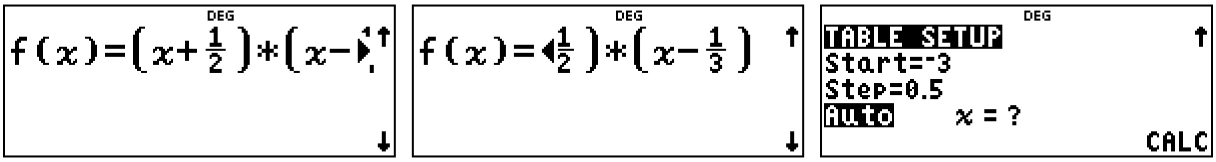
Berechnung einer Wertetabelle – Darstellung der auftretenden Zahlen

Beispiel-Aufgabe

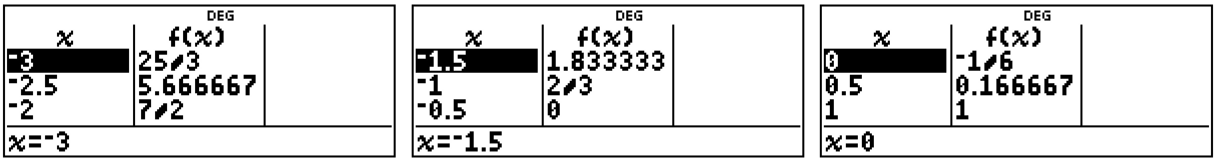
Untersuchen Sie den Graphen der Funktion $f(x) = \left(x+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(x-\frac{1}{3}\right)$

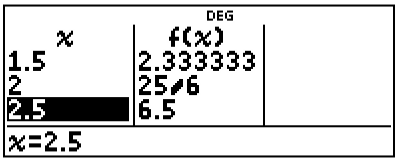
Erläuterung der Lösung

Der Funktionsterm kann (ohne auszumultiplizieren) im [table]-Menü eingegeben werden. Der Schulrechner erstellt automatisch eine Wertetabelle.



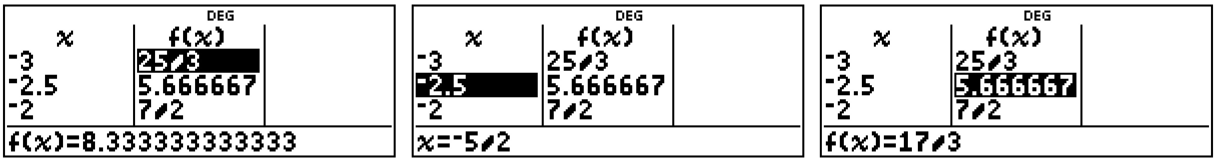
In der Wertetabelle fällt auf, dass einige Werte als Dezimalzahlen, andere als Brüche notiert sind. Dies ist eine Besonderheit des Schulrechners im MathPrint-Mode. Bei dem betrachteten Funktionsterm, in dem Brüche (in Bruchschreibweise) auftreten, werden die Funktionswerte bei ganzzahligen x-Werten auch als Brüche angegeben, bei anderen x-Werten als Dezimalzahlen.



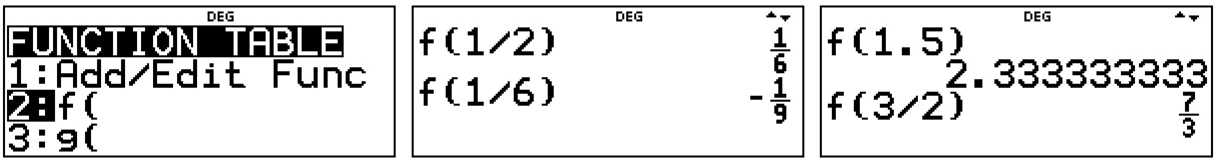


x-Werte und Funktionswerte können aber als Brüche angezeigt werden; man muss diese Zahlen markieren und dann die [◄►≈]-Taste drücken.

Im Display erscheint dann in der Zeile *unter der Tabelle* der Bruch (-2.5 = -5/2) oder im umgekehrten Fall erscheint unten die Dezimaldarstellung einer Bruchzahl (5.666667 = 17/3).



Wenn man mithilfe der Option 2 des [table]-Menüs Funktionswerte direkt abruft, dann kommt es darauf an, in welcher Form man den x-Wert eingibt:



Übungsaufgaben

Erstellen Sie eine Wertetabelle mit Schrittweite $\Delta x = 0{,}5$ für die Funktion f mit

(1) $f(x) = \left(x+\frac{5}{6}\right)\cdot\left(x-\frac{2}{3}\right)$ (2) $f(x) = \frac{2}{3}\cdot(x+1)\cdot(x-2)$

und wandeln Sie ggf. Brüche in Dezimalzahlen um und umgekehrt.

Gebiet: Analysis	Einsatz ab Stufe 10

Nullstellenbestimmung für ganzrationale Funktionen 3. Grades (exakte Methode)

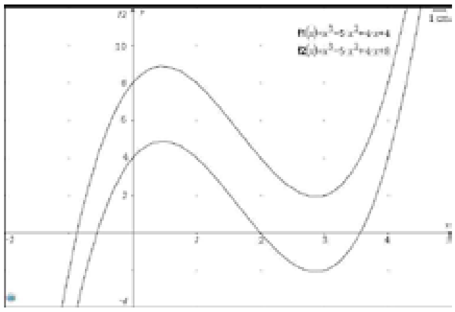
Beispiel-Aufgabe

Gegeben sind die ganzrationalen Funktionen f mit

(1) $f_1(x) = x^3 - 5x^2 + 4x + 4$

(2) $f_2(x) = x^3 - 5x^2 + 4x + 8$

Gesucht sind die Nullstellen der Funktionen.

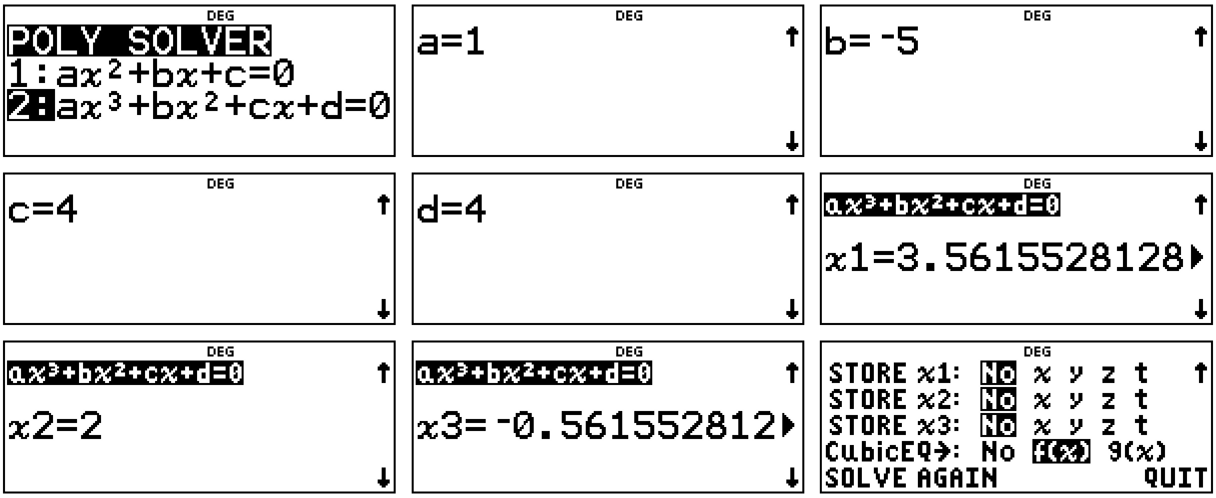


Die Grafik rechts wurde mithilfe eines TI Nspire™ erstellt.

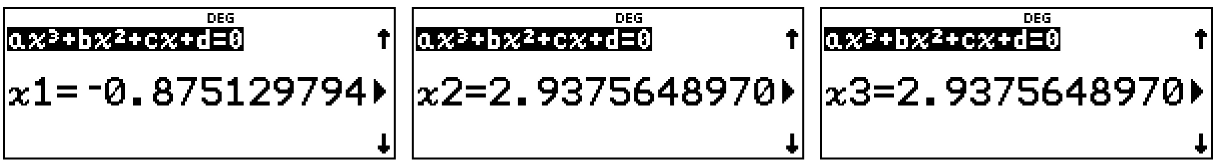
Erläuterung der Lösung

Für die Bestimmung von Nullstellen bei ganzrationalen Funktionen 3. Grades stehen im TI-30X Pro MathPrint™ die Optionen [poly-solv] (exakte algebraische Lösung) und [num-solv] (numerische Lösung) zur Verfügung. Hier soll die *exakte* Lösungsmethode angewandt werden.

Exakte Lösung: Nach Eingabe der Koeffizienten werden die Lösungen angegeben.
Die Funktion hat drei reelle Nullstellen: $x \approx +3{,}562$; $x = +2$; $x \approx -0{,}562$; das Polynom kann (anschließend) auch als Funktionsterm unter f(x) gespeichert werden.



(2) Die Funktion hat nur eine reelle Nullstelle: $x_1 \approx -0{,}875$, außerdem die beiden komplexen Nullstellen $x_2 \approx 2{,}938 - 0{,}716\,i$ sowie $x_3 \approx 2{,}938 + 0{,}716\,i$ (wie man durch Scrollen nach rechts sieht).



Übungsaufgaben

Bestimmen Sie die Nullstellen der ganzrat. Funktion 3. Grades. Skizzieren Sie den Graphen.

(1) $f(x) = 2x^3 - 8x^2 + 5x + 2$

(2) $f(x) = -2x^3 + 8x^2 - 6x + 1$

Gebiet: Analysis	Einsatz ab Stufe 10

Nullstellenbestimmung für ganzrationale Funktionen 3. Grades (numer. Methode)

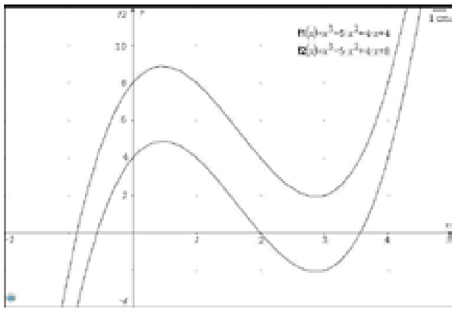
Beispiel-Aufgabe

Gegeben sind die ganzrationalen Funktionen f mit

(1) $f_1(x) = x^3 - 5x^2 + 4x + 4$

(2) $f_2(x) = x^3 - 5x^2 + 4x + 8$

Gesucht sind die Nullstellen der Funktionen.



Die Grafik rechts wurde mithilfe eines TI Nspire™ erstellt.

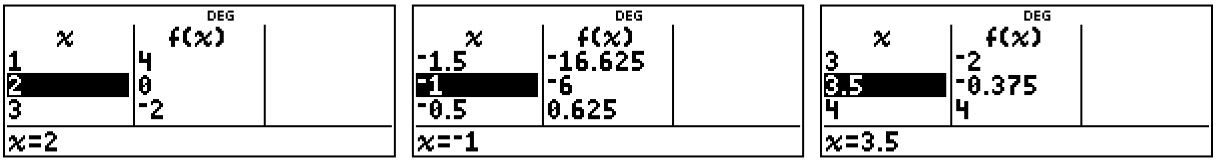
Erläuterung der Lösung

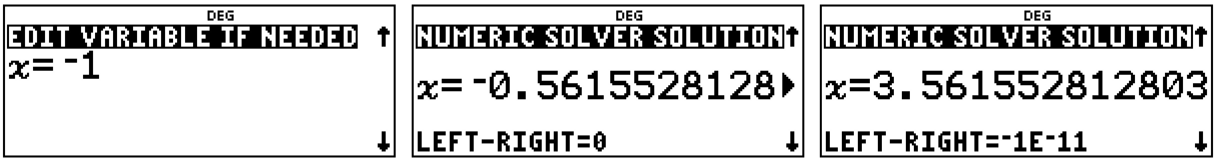
Für die Bestimmung von Nullstellen bei ganzrationalen Funktionen 3. Grades stehen im TI-30X Pro MathPrint™ die Optionen [poly-solv] (exakte algebraische Lösung) und [num-solv] (numerische Lösung) zur Verfügung. Hier soll die *numerische* Lösungsmethode angewandt werden.

Numerische Lösung: Durch die Eingabe des Funktionsterms über die [table]-Option wird eine Wertetabelle erzeugt; am Vorzeichenwechsel kann man erkennen, wo ungefähr die Nullstellen liegen. Man erkennt die ganzzahlige Nullstelle x = 2. Außerdem erkennt man einen Vorzeichenwechsel von f(x) zwischen -1 und -0,5 bzw. zwischen 3,5 und 4.

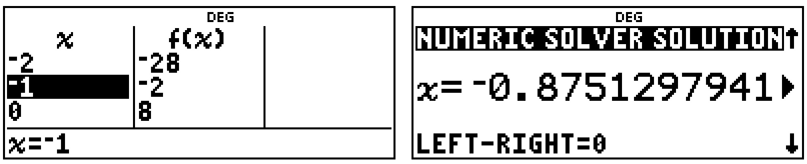
Für die [num-solv]-Option benötigt man links den Ausdruck „f(x)“ (Eingabe mithilfe der „f(“-Option von [table]) und rechts null. Die linke Intervallgrenze gibt man als Startwerte für den Suchalgorithmus ein, also beispielsweise -1 für die Suche nach der Nullstelle im Intervall] -1 ; -0,5 [.

(1) Die Funktion hat drei reelle Nullstellen: $x_1 \approx -0{,}562$; $x_2 = +2$; $x_3 \approx +3{,}562$.





(2) Man findet nur *einen* Vorzeichenwechsel - die Funktion scheint nur eine reelle Nullstelle zu haben: x ≈ - 0,875. Allerdings ist es kein Beweis, wenn man keinen weiteren Vorzeichenwechsel gefunden hat. Eine genauere Untersuchung des Graphenverlaufs ist notwendig.



Übungsaufgaben

Bestimmen Sie die Nullstellen der ganzrat. Funktion 3. Grades. Skizzieren Sie den Graphen.

(1) $f(x) = 2x^3 - 8x^2 + 5x + 2$

(2) $f(x) = - 2x^3 + 8x^2 - 6x + 1$

Gebiet: Analysis	Einsatz ab Stufe 10

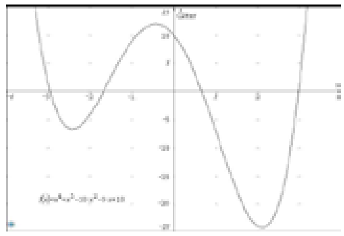
Nullstellenbestimmung für ganzrationale Funktionen 4. Grades

Beispiel-Aufgabe

Gegeben ist die ganzrationale Funktion f mit

$f(x) = x^4 + x^3 - 10x^2 - 9x + 10$.

Gesucht sind die vier nicht-ganzzahligen Nullstellen der Funktion.

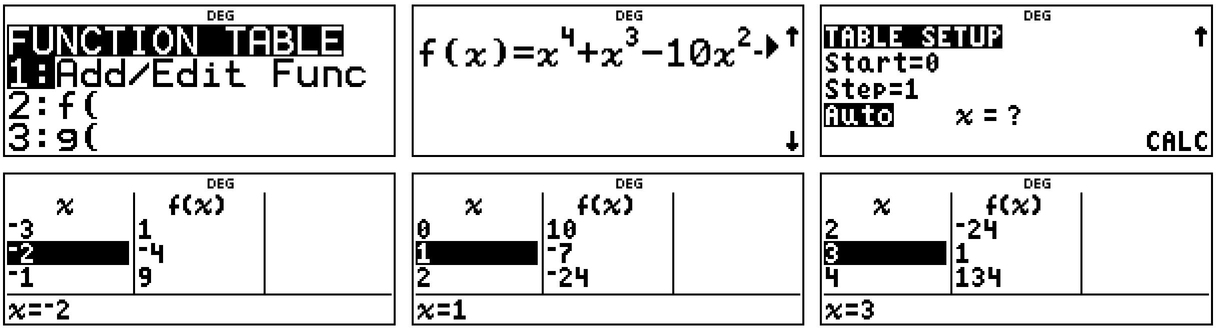


Die Grafik rechts wurde mithilfe eines TI Nspire™ erstellt.

Erläuterung der Lösung

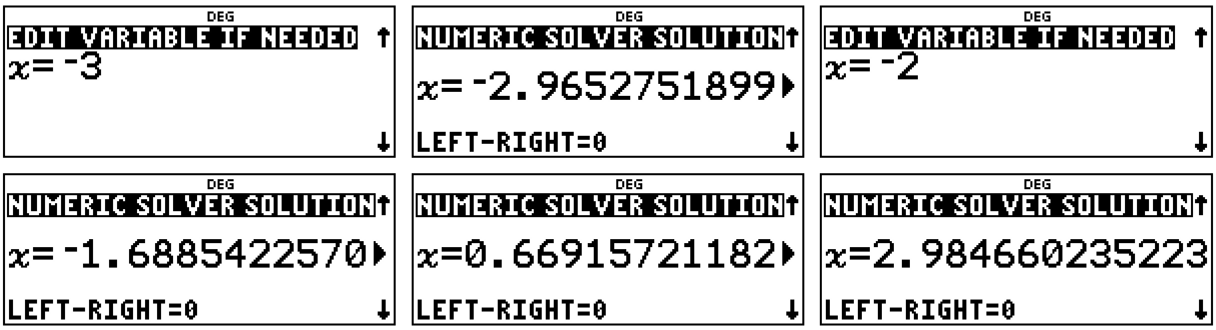
Für die Bestimmung von Nullstellen bei ganzrationalen Funktionen 4. Grades steht im TI-30X Pro MathPrint™ die Option [num-solv] zur Verfügung. Zunächst wird über die [table]-Option der Funktionsterm eingegeben; diese erzeugt eine Wertetabelle, aus der man am Vorzeichenwechsel erkennen kann, in welchen Intervallen ungefähr die Nullstellen liegen.

Man findet Vorzeichenwechsel zwischen -3 und -2, zwischen -2 und -1, zwischen 0 und 1 sowie zwischen 2 und 3.



Für die [num-solv]-Option benötigt man links den Ausdruck „f(x)“ (Eingabe mithilfe der „f(“-Option von [table]) und rechts null.

Die linke Intervallgrenze wird jeweils als Startwert für den Suchalgorithmus benötigt.



Die Nullstellen liegen also bei $x \approx -2{,}965$; $x \approx -1{,}689$; $x \approx +0{,}669$; $x \approx +2{,}985$.

Übungsaufgaben

Bestimmen Sie die nicht ganzzahligen Nullstellen der ganzrationalen Funktion 4. Grades.

(1) $f(x) = x^4 - 4x^3 - 5x^2 + 12x + 6$

(2) $f(x) = -x^4 + 2x^3 + 20x^2 - 20x - 20$

Gebiet: Analysis	Einsatz ab Stufe 10

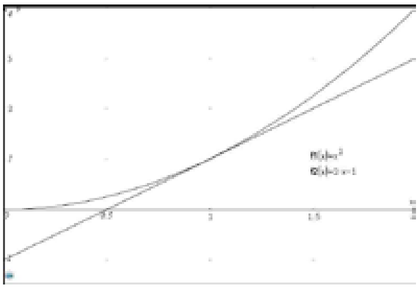
Einführung in die Differenzialrechnung: Untersuchung von Sekantensteigungen

Beispiel-Aufgabe

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^2$.

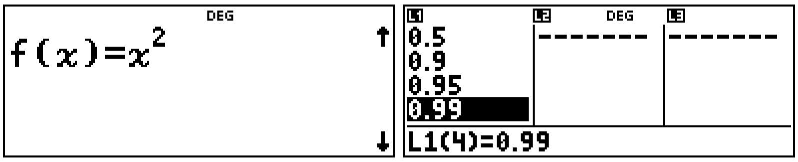
Untersuchen Sie die Steigung $m = \frac{f(x_Q) - f(x_P)}{x_Q - x_P}$ der Sekanten durch den festen Punkt P (1 I 1) und durch variable Punkte Q, die auf dem Graphen von f liegen und auf P zulaufen.

Die Grafik rechts wurde mithilfe eines TI Nspire™ erstellt.



Erläuterung der Lösung

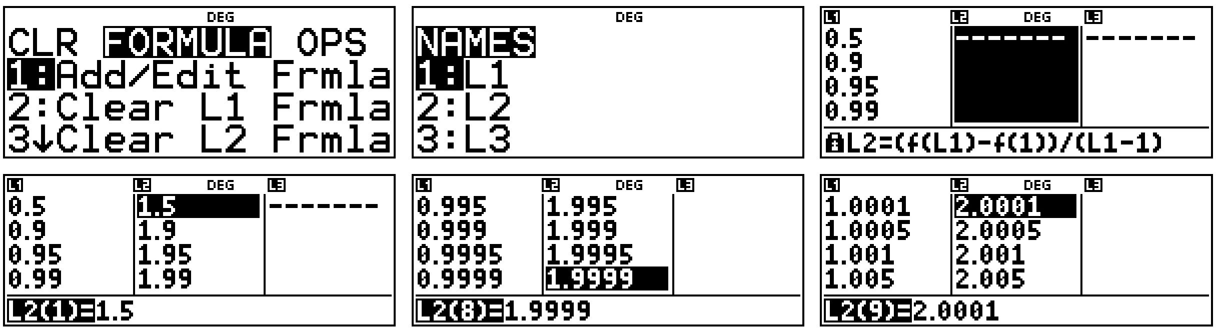
Die zu untersuchende Funktion definiert man mithilfe von „Edit function“ im table-Menü.
Die x-Werte des sich auf P zu bewegenden Punktes Q werden in Liste L1 im data-Menü einzeln eingetragen. Hier wurden gewählt: x = 0,5 ; 0,9 ; 0,95 ; 0,99 ; 0,995 ; 0,999 ; … ; 0,9999 und dann die symmetrisch liegenden Werte 1,0001 ; 1,0005 ; 1,001 ; … ; 1,5.



Auf dem TI-30X Pro MathPrint™ wird die Berechnung der zugehörigen Sekantensteigungen mithilfe von Listenformeln realisiert. (Drückt man einmal auf die data-Taste sind die Listen sichtbar, wenn man ein zweites Mal drückt, erscheint das Menü zur Bearbeitung der Listen: Löschen von Listen, Eingabe und Löschen von Formeln sowie weitere Optionen.)

Wenn man ein Feld in Liste L2 markiert, dann erwartet der Schulrechner eine Eingabe. Wählt man jetzt die Option „Formula - Add/Edit Formula“, dann erscheint unten ein Schloss-Symbol, hinter dem man den gewpünschten Term eingeben kann. Bei der Eingabe der Formel verwenden wir Option 2 des table-Menüs, um „f(„ einzugeben, und das Symbol „L1“, das man durch erneutes Drücken der data-Taste erhält (Auswahl bei „Names“). Nach Drücken der data-Taste werden die Sekantensteigungen berechnet.

Man stellt fest, dass sich die Werte immer mehr dem Wert 2 nähern, wenn Q auf P zuläuft.



Übungsaufgaben

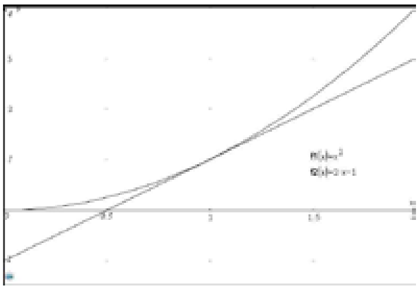
Bestimmen Sie die Steigung der Sekanten für eine Folge von Punkten Q, die auf P zulaufen, für die Funktion $f(x) = x^2$ [$f(x) = x^3$; $f(x) = \sqrt{x}$] und P(2 I f(2)) [P(0,5 I f(0,5)].

Gebiet: Analysis | Einsatz ab Stufe 10

Einführung in die Differenzialrechnung: Untersuchung von Sekantensteigungen

(Option: Nutzung einer geometrischen Folge von x-Werten)

Beispiel-Aufgabe



Gegeben ist die Funktion f mit f(x) = x² .

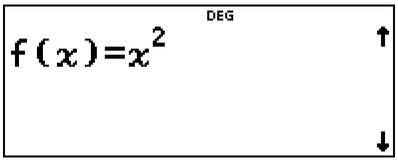
Untersuchen Sie die Steigung $m = \dfrac{f(x_Q) - f(x_P)}{x_Q - x_P}$ der Sekanten durch den festen Punkt P (1 I 1) und durch variable Punkte Q, die auf dem Graphen von f liegen und auf P zulaufen.

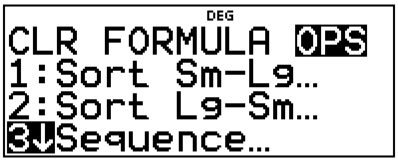
Die Grafik rechts wurde mithilfe eines TI Nspire™ erstellt.

Erläuterung der Lösung

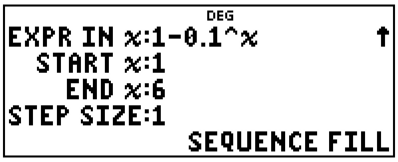
Die zu untersuchende Funktion definiert man mithilfe von „Edit function“ im table-Menü.

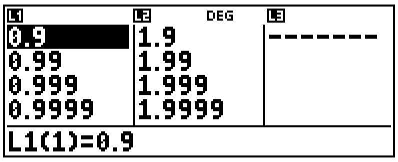
Die x-Werte des sich auf P zu bewegenden Punktes Q werden mithilfe einer Folge bestimmt. Hierfür wählt man die Option OPS (zweifaches Tippen von data), gibt an, für welche Liste die Folge definiert wird (hier: L1).

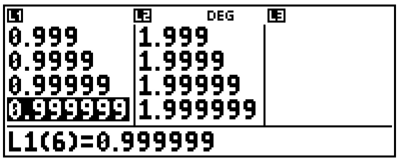




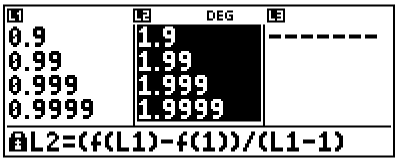
Die sog. geometrische Folge $a_n = 1 - 0{,}1^n$ nimmt nacheinander die Werte 0,9 ; 9,99 ; 0,999 ; .. an. Die Beschränkung auf 1 ≤ n ≤ 6 erfolgt wegen der maximal angezeigten Stellenzahl.



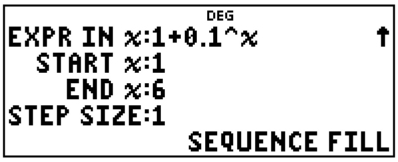


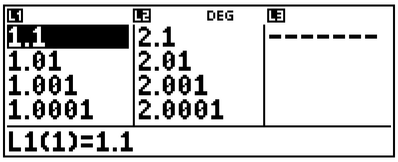


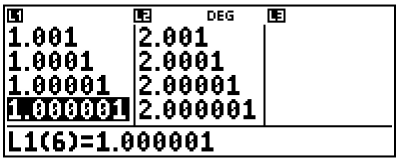
Wie die Werte in Liste L2 berechnet werden, ist auf dem ersten Arbeitsblatt zu diesem Thema erklärt.



Ändert man dann die Folgenvorschrift zu $a_n = 1 + 0{,}1^n$, dann erhält man entsprechend eine Folge von x-Werten, die sich von oben dem x-Wert des Punktes P nähert.







Übungsaufgaben

Bestimmen Sie die Steigung der Sekanten für eine Folge von Punkten Q, die auf P zulaufen,

für die Funktion f(x) = x² [f(x) = x³ ; f(x) = √x] und P(2 I f(2)) [P(0,5 I f(0,5)].

Gebiet: Analysis	Einsatz ab Stufe 11

Bestimmen von Extrempunkten einer Funktion (mithilfe einer Wertetabelle)

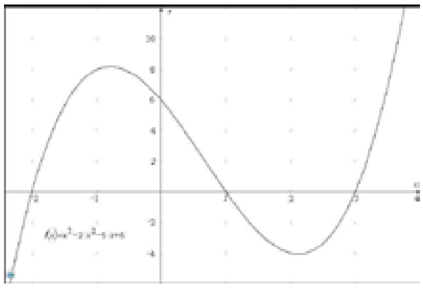
Beispiel-Aufgabe

Gegeben ist die ganzrationale Funktion f mit

$f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$.

Bestimmen Sie die Extrempunke des Graphen.

Die Grafik rechts wurde mithilfe eines TI Nspire™ erstellt.

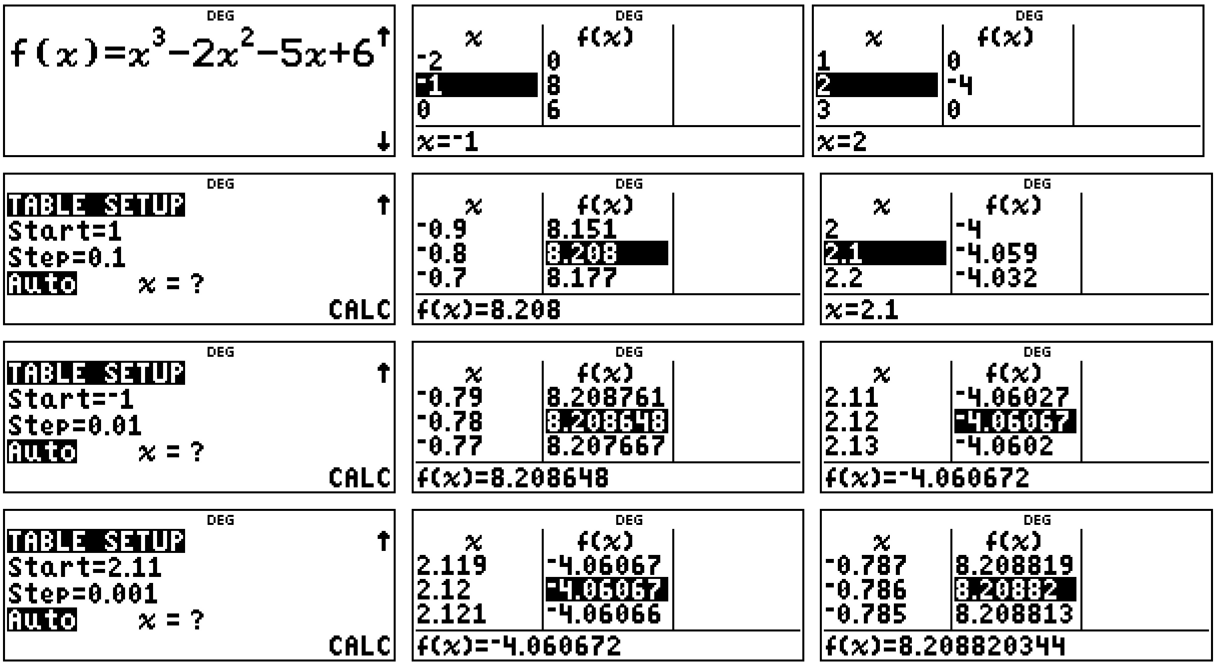


Erläuterung der Lösung

Wenn man den Funktionsterm unter [table] eingibt, erstellt der Rechner automatisch eine Wertetabelle. Aus der Wertetabelle kann man entnehmen, dass der Graph einen Hochpunkt im Intervall] -2 ; 0 [hat, denn f(-1) > f(-2) und f(-1) > f(0). Außerdem hat der Graph einen Tiefpunkt im Intervall] 1 ; 3 [, denn f(2) < f(1) und f(2) < f(3).

Durch Verfeinerung der Schrittweite in der Wertetabelle kann die Aussage präzisiert werden:

$x_{max} \approx -0{,}786$ mit $f(-0{,}786) \approx 8{,}209$ und $x_{min} \approx 2{,}120$ mit $f(2{,}120) \approx -4{,}061$.



Übungsaufgaben

Untersuchen Sie die folgenden Graphen auf Extremstellen.

(1) $f(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3$

(2) $f(x) = x^4 + 2x^3 - 9x^2 - 2x + 8$

(3) $f(x) = x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 7x + 6$

Gebiet: Analysis	Einsatz ab Stufe 11

Untersuchung des Monotonieverhaltens und Bestimmung von Extrempunkten

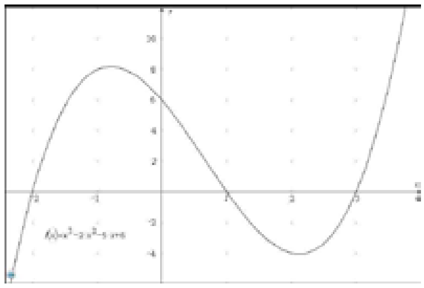
Beispiel-Aufgabe

Gegeben ist die ganzrationale Funktion f mit

$f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$.

Untersuchen Sie das Monotonieverhalten des Graphen und bestimmen Sie den Hoch- und den Tiefpunkt.

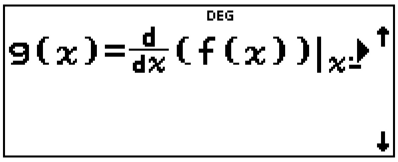
Die Grafik rechts wurde mithilfe eines TI Nspire™ erstellt.

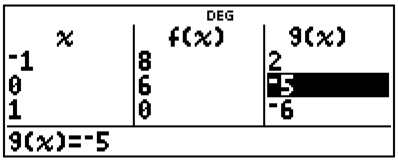


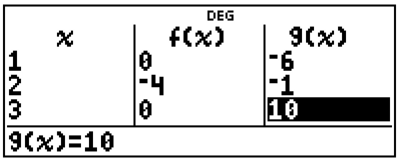
Erläuterung der Lösung

Um das Monotonieverhalten zu untersuchen und die Lage der Extremstellen zu bestimmen, kann man die numerische Ableitungsfunktion verwenden. Diese kann unter dem Funktionsnamen g definiert werden: Hierfür ist der Ableitungsoperator ([d/dx□]) einzusetzen sowie der Funktionsname f (über [table]) und die Variable x ([x yzt abcd]).

An der Wertetabelle stellt man fest: Zunächst steigt der Graph streng monoton (da die Werte der Ableitungsfunktion g(x) = f'(x) positiv sind). Dann findet zwischen -1 und 0 ein Vorzeichenwechsel von g(x) = f'(x) statt (von + nach –); in diesem Intervall liegt also ein Hochpunkt vor.



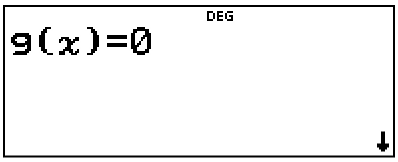


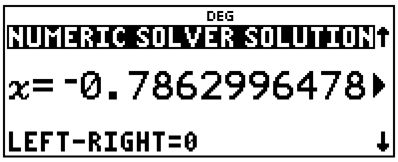


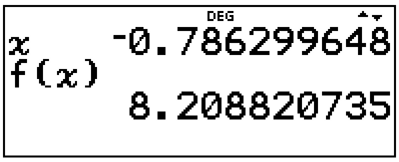
Dann ändert sich das Monotonieverhalten: Der Graph ist danach streng monoton fallend ($g(x) = f'(x) < 0$). Zwischen 2 und 3 findet ein Vorzeichenwechsel von – nach + statt; in diesem Intervall liegt also ein Tiefpunkt vor. Danach ist der Graph streng monoton steigend.

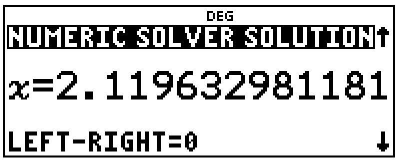
Wenn man die Nullstellen der Ableitungsfunktion genauer bestimmen möchte, muss man einen konkreten Funktionsterm für die Funktion g eingeben, also $g(x) = f'(x) = 3x^2 - 4x - 5$.

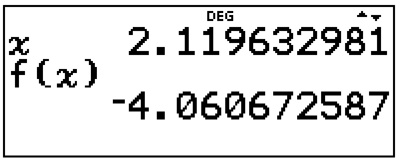
Mithilfe von [num-solv] findet man für diese Funktion g die Stelle des lokalen Maximums bei $x_{max} \approx -0{,}786$. Da jetzt dieser x-Wert unter dem Variabelnnamen x gespeichert ist, kann man den zugehörigen Funktionswert f(x) mithilfe der Option 2 von [table] ermitteln: $f(x_{max}) \approx 8{,}209$. Analog erhält man $x_{min} \approx 2{,}120$ und $f(x_{min}) \approx -4{,}061$.











Übungsaufgaben

Untersuchen Sie das Monotonieverhalten des Graphen und bestimmen Sie die Extrempunkte.

(1) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 3$ (2) $f(x) = -x^3 - 2x^2 + 5x + 3$ (3) $f(x) = -x^3 - 4x^2 + 4x + 8$

Gebiet: Analysis | Einsatz ab Stufe 10

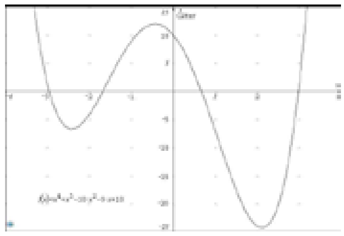
Exakte Bestimmung von Extrempunkten (ganzrat. Fkt. 4. Grades)

Beispiel-Aufgabe

Gegeben ist die ganzrationale Funktion f mit

$f(x) = x^4 + x^3 - 10x^2 - 9x + 10$.

Bestimmen Sie die Extrempunkte.



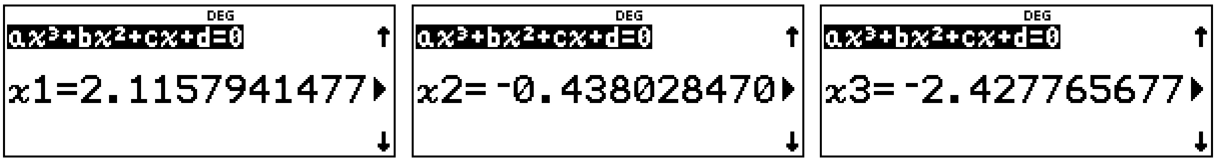
Die Grafik rechts wurde mithilfe eines TI Nspire™ erstellt.

Erläuterung der Lösung

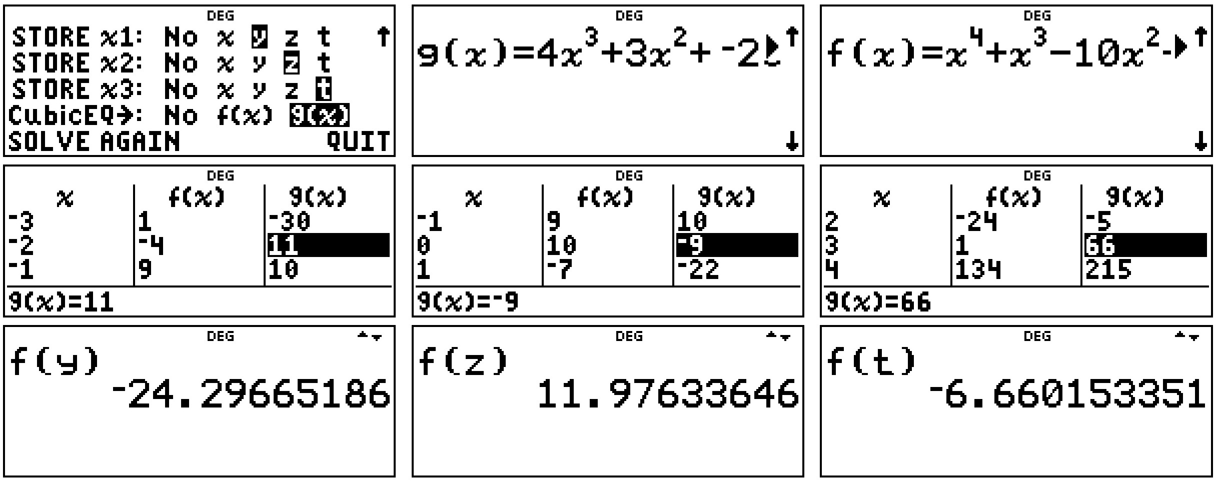
Da der Funktionsterm der 1. Ableitung ein Polynom 3. Grades ist und der Funktionsterm der 2. Ableitung ein Polynom 2. Grades, können die Nullstellen der Ableitungsfunktionen mithilfe des Gleichungslösers [poly-solv] exakt bestimmt werden.

Es gilt: $f'(x) = 4x^3 + 3x^2 - 20x - 9$ und $f''(x) = 12x^2 + 6x - 20$.

Die Lösungen der kubischen Gleichung $f'(x) = 0$ werden vom TI-30X Pro MathPrint™ nach einem exakten Verfahren berechnet – die Lösungen werden von rechts nach links angegeben:



Die Nullstellen der 1. Ableitung werden unter den Variablen y, z, t gespeichert, den Ableitungsterm unter g(x). Aus der Wertetabelle von g(x) = f'(x) entnimmt man einen Vorzeichenwechsel von – nach + vor bei x ≈ - 2,428 (lokales Minimum), einen VZW von + nach – bei x ≈ -0,438 (lokales Maximum) und ein VZW von – nach + bei x ≈ 2,116 (lokales Minimum). Die zugehörigen Funktionswerte erhält man nach Eingabe des Funktionsterms mithilfe der [table]-Optionen.



Die Extrempunkte sind T_1 (- 2,428 | - 6,660); H (- 0,438 | 11,976); T_2 (2,116 | - 24,297).

Übungsaufgaben

(1) Bestimmen Sie auch die Wendepunkte exakt mithilfe der [poly-solv]-Option.

(2) Bestimmen Sie die Extrem- und Wendepunkte der ganzrationalen Funktion 4. Grades.

(a) $f(x) = x^4 - 4x^3 - 5x^2 + 12x + 6$ (b) $f(x) = -x^4 + 2x^3 + 20x^2 - 20x - 20$

Gebiet: Analysis | Einsatz ab Stufe 11

Bestimmen von Wendepunkten eines Graphen (mithilfe einer Wertetabelle)

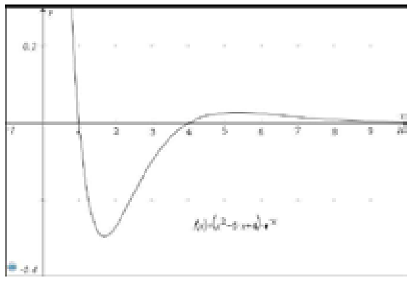
Beispiel-Aufgabe

Gegeben ist die Funktion f mit

$f(x) = (x^2 - 5x + 4) \cdot e^{-x}$

Bestimmen Sie die Wendepunkte des Graphen.

Die Grafik rechts wurde mithilfe eines TI Nspire™ erstellt.



Erläuterung der Lösung

Ein Graph ist auf einem Intervall genau dann linksgekrümmt [rechtsgekrümmt], wenn der Graph der Ableitungsfunktion auf diesem Intervall streng monoton wächst [fällt].

Definiert man die Ableitungsfunktion $f'(x) = (-x^2 + 7x - 9) \cdot e^{-x}$ als g(x), dann kann man an der automatisch erzeugten Wertetabelle ablesen: Zunächst nehmen die Werte von f'(x) zu (d. h., der Graph von f ist linksgekrümmt). Das Monotonieverhalten von f'(x) ändert sich zwischen x = 2 und x = 4, danach nehmen die Werte von f'(x) wieder ab (d. h., der Graph von f ist rechtsgekrümmt) bis dann im Intervall] 6 ; 8 [erneut ein Monotoniewechsel eintritt: Die Funktionswerte von f'(x) nehmen wieder zu (d. h., der Graph von f ist linksgekrümmt).

DEG
$f(x)=(x^2-5x+4)*$▸

DEG
$g(x)=(-x^2+7x-9)$▸

RAD

x	f(x)	g(x)
0	4	-9
1	0	-1.10364
2	-0.27067	0.135335

x=0

DEG

x	f(x)	g(x)
2	-0.27067	0.135335
3	-0.09957	0.149361
4	0	0.054947

g(x)=0.149361205

DEG

x	f(x)	g(x)
4	0	0.054947
5	0.026952	0.006738
6	0.024788	-0.00744

g(x)=0.006737947

DEG

x	f(x)	g(x)
6	0.024788	-0.00744
7	0.016414	-0.00821
8	0.009393	-0.0057

g(x)=-0.0082069375

Verfeinerung der Schrittweite: Der Wechsel der Monotonie kann schließlich nur an den unter der Tabelle stehenden genaueren Funktionswerten abgelesen werden.

DEG

x	f(x)	g(x)
2.3	-0.22157	0.181469
2.4	-0.20321	0.185065
2.5	-0.18469	0.184691

g(x)=0.185064625

DEG

x	f(x)	g(x)
6.5	0.020672	-0.00864
6.6	0.019807	-0.00865
6.7	0.018944	-0.0086

g(x)=-0.00865194

DEG

x	f(x)	g(x)
2.43	-0.19765	0.185326
2.44	-0.1958	0.185339
2.45	-0.19394	0.185315

g(x)=0.185338835

DEG

x	f(x)	g(x)
6.55	0.02024	-0.00866
6.56	0.020153	-0.00866
6.57	0.020067	-0.00866

g(x)=-0.008656159

DEG

x	f(x)	g(x)
2.437	-0.19635	0.185339
2.438	-0.19617	0.185339
2.439	-0.19598	0.185339

g(x)=0.18533923

DEG

x	f(x)	g(x)
6.561	0.020144	-0.00866
6.562	0.020136	-0.00866
6.563	0.020127	-0.00866

g(x)=-0.008656165

Die Wendepunkte des Graphen liegen ungefähr bei W_1 (2,438 I - 0,196), W_2 (6,562 I 0,020).

Übungsaufgaben

Bestimmen Sie die Wendepunkte des Graphen.

(1) $f(x) = x^4 - 12x^2 - 10x + 4$ (2) $f(x) = -x^4 - 2x^3 + 8x^2 + 15x - 2$

Gebiet: Analysis	Einsatz ab Stufe 11

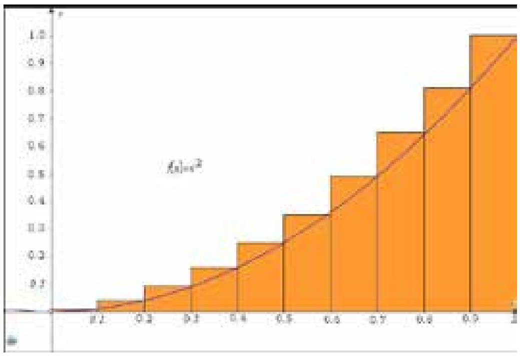
Einführung der Integralrechnung – Bestimmen von Ober- und Untersummen

Beispiel-Aufgabe

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^2$.

Die Maßzahl der Fläche des Flächenstücks zwischen Graph und x-Achse soll für das Intervall [0 ; 1] bestimmt werden.

Dazu betrachtet man Rechtecke mit der Breite Δx, deren Höhe bestimmt wird durch den Funktionswert von f am rechten Eckpunkt des jeweiligen Teilintervalls und bestimmt deren Gesamtgröße.



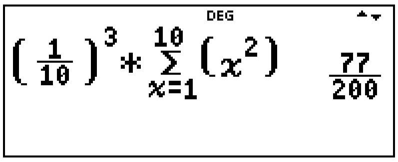
Erläuterung der Lösung

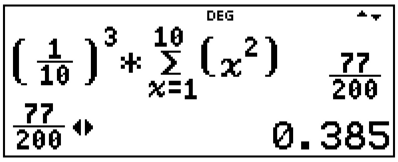
Die Gesamtfläche der Treppenfigur (Obersumme O_n) ergibt sich wie folgt:

$O_n = \sum_{k=1}^{n} \Delta x \cdot f(x_k) = \Delta x \cdot \sum_{k=1}^{n} f(x_k)$, wobei die $f(x_k)$ die Funktionswerte am rechten Eckpunkt des Intervalls sind. Im Beispiel (vgl. Abb.) sind dies $0{,}1^2$; $0{,}2^2$; … ; 1^2, also $1^2 \cdot 0{,}1^2$; $2^2 \cdot 0{,}1^2$; … ; $10^2 \cdot 0{,}1^2$ und $\Delta x = 1/10 = 0{,}1$. Daher gilt hier: $O_{10} = 0{,}1 \cdot 0{,}1^2 \cdot \sum_{k=1}^{10} k^2 = 0{,}1^3 \cdot \sum_{k=1}^{10} k^2$.

Die Summe der Quadratzahlen bestimmen wir mithilfe der Summen-Funktion des $\boxed{\text{math}}$-Menüs: Dazu füllt man den kleinsten und größten Wert für k (auf dem Rechner heißen alle Variablen x) am Summenzeichen Σ sowie den Funktionsterm von f(x) (hier: x^2) ein, vgl. 1. und 2. Screenshot.

Als Gesamtfläche erhält man hier: $O_{10} = 77/200 = 0{,}385$

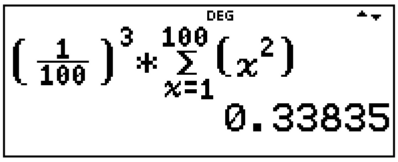




Übungsaufgaben

(1) Bestimmen Sie für das Intervall [0 ; 1] und $f(x) = x^2$ den Wert von O_{20}, O_{50}, O_{100} (vgl. Screenshot rechts), O_{1000}.

(2) Welche Fläche ergibt sich, wenn man als Höhe der Rechtecke den Funktionswert am linken Intervall-Eckpunkt wählt (sog. *Untersumme*)? Wie ändert sich der Term?



O_{20} =	O_{50} =	O_{100} = 0,33835	O_{1000} =
U_{20} =	U_{50} =	U_{100} =	U_{1000} =

(3) Bestimmen Sie U_{1000} und O_{1000} für $f(x) = x^2$ auf dem Intervall [0 ; 2].

U_{1000} = O_{1000} =

(4) Bestimmen Sie U_{1000} und O_{1000} für $f(x) = x^3$ auf dem Intervall [0 ; 1].

U_{1000} = O_{1000} =

Gebiet: Analysis	Einsatz ab Stufe 11

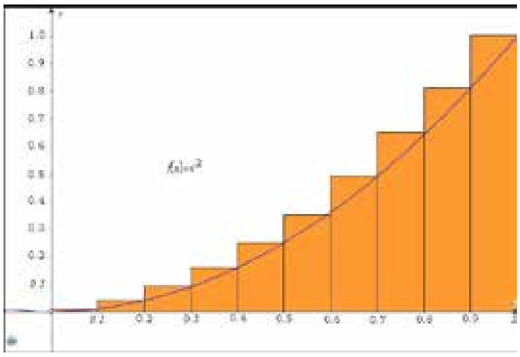
Einführung der Integralrechnung – Bestimmen von Ober- und Untersummen (2)

Beispiel-Aufgabe

Gegeben ist eine Funktion f, die auf dem Intervall [0 ; b] streng monoton steigend ist, beispielsweise $f(x) = x^2$ und b = 1 (siehe Abbildung rechts).

Die Maßzahl der Fläche des Flächenstücks zwischen Graph und x-Achse soll für das Intervall bestimmt werden.

Dazu betrachtet man Rechtecke mit der Breite Δx, deren Höhe bestimmt wird durch den Funktionswert von f am rechten Eckpunkt des jeweiligen Teilintervalls und bestimmt deren Gesamtgröße.



Bestimmen Sie die Flächenmaße für eine Unterteilung des Intervalls in n = 10, 100, 1000 gleich große Abschnitte für

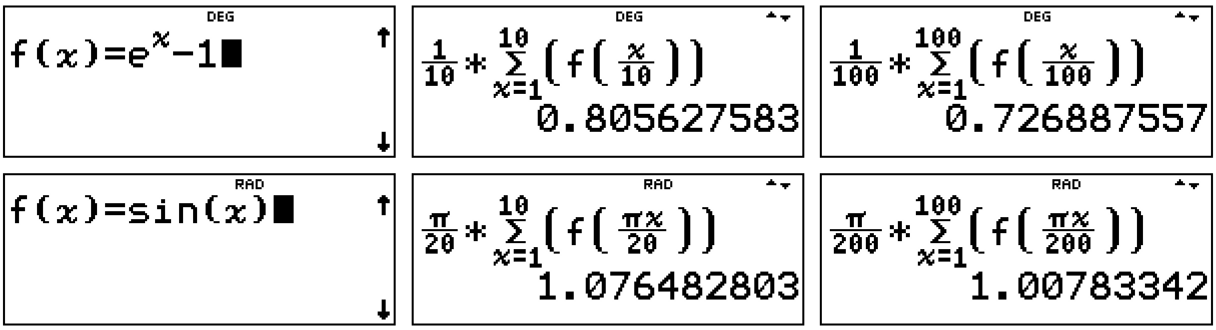
(1) $f(x) = e^x - 1$ über dem Intervall [0 ; 1] (2) $f(x) = \sin(x)$ über dem Intervall [0 ; $\pi/2$]

Erläuterung der Lösung

Da der Graph der Funktion f streng monoton steigend auf dem Intervall ist, ergibt sich die Gesamtfläche der Treppenfigur (Obersumme O_n) aus dem Produkt der Funktionswerte am rechten Eckpunkt des Teilintervalls und der Rechteckbreite $\Delta x = b/n$: $O_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{b}{n} \cdot f\left(\frac{b \cdot k}{n}\right) = \frac{b}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{b \cdot k}{n}\right)$.

Zunächst geben wir den Funktionsterm f(x) über das [mode]-Menü ein; den Summenterm bestimmen wir mithilfe der Summen-Funktion des Math-Menüs:

Dazu füllt man den kleinsten und größten Wert für k (auf dem Rechner heißen alle Variablen x) am Summenzeichen $\sum$ sowie den Term $f(x_k)$, den man über die Option 1 des [table]-Befehls aktiviert. Die Anzahl der Unterteilungen kann erhöht werden, indem man zurückscrollt und korrigiert. Für Teilaufgabe (2) muss nur der Funktionsterm im [table]-Menü ausgetauscht sowie der Wert von b korrigiert werden (Achtung: [mode]-Option RAD einstellen).



Übungsaufgaben

Bestimmen Sie die Obersummen O_{10}, O_{100}, O_{1000} für

(1) $f(x) = \sin^2(x)$ auf dem Intervall [0 ; $\pi/2$]

(2) $f(x) = \frac{x-1}{x}$ auf dem Intervall [1 ; 2]

Gebiet: Analysis	Einsatz ab Stufe 11

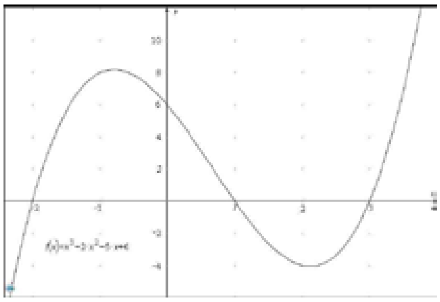
Integralrechnung: Bestimmen von Flächen zwischen Graph und x-Achse

Beispiel-Aufgabe

Gegeben ist die ganzrationale Funktion f mit
$f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$.

Die Maßzahl der Fläche der beiden Flächenstücke, die von Graph und x-Achse eingeschlossen werden, soll bestimmt werden.

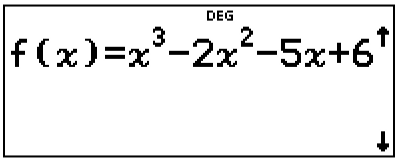
Hinweis: Die Nullstellen von f(x) sind ganzzahlig.

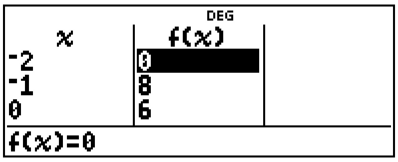


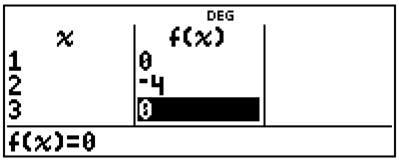
Die Grafik rechts wurde mithilfe eines TI Nspire™ erstellt.

Erläuterung der Lösung

Wenn an einer Funktion mehrere Untersuchungen vorgenommen werden sollen, lohnt es sich, den Funktionsterm zunächst einmal abzuspeichern. Dies geschieht unter „Edit function“ im Menü, das sich öffnet, wenn man die table-Taste drückt. Damit veranlasst man gleichzeitig den Rechner, eine Wertetabelle anzulegen.



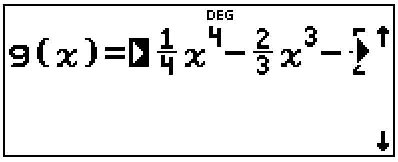


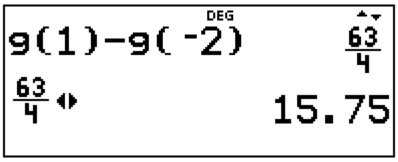


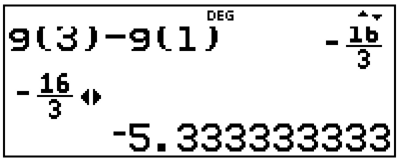
Da die Nullstellen – wie angegeben – ganzzahlig sind, kann man sie mithilfe der Wertetabelle finden; die gegebene Funktion hat die Nullstellen -2; +1 und +3. Da der Vorfaktor von x^3 positiv ist, verläuft der Graph von $-\infty$ nach $+\infty$; das linke Flächenstück liegt oberhalb der x-Achse, das rechte unterhalb. Für das erste Integral muss sich also ein positiver Wert ergeben, für das zweite ein negativer Wert.

Als nächstes kann dann eine Stammfunktion von f bestimmt und unter g gespeichert werden:

$g(x) = \frac{1}{4} \cdot x^4 - \frac{2}{3} \cdot x^3 - \frac{5}{2} \cdot x^2 + 6x$. Nach dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung ergibt sich dann der Flächeninhalt der Flächenstücke aus der Differenz der Werte der Stammfunktion an den Intervallenden:







Das linke Flächenstück hat die Maßzahl 63/4 = 15,75 F.E., das rechte die Maßzahl 16/3 (wie durch Betätigen der ◂▸≈-Taste bestätigt wird).

Übungsaufgaben

Bestimmen Sie die ganzzahligen Nullstellen der ganzrationalen Funktion f. Fertigen Sie eine Skizze des Graphen an, um vorherzusagen, welche der einzelnen Integrale positiv bzw. negativ sein werden. Bestimmen Sie die Maßzahlen der Flächenstücke, die der Graph von f und die x-Achse einschließen.

(1) $f(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3$ (2) $f(x) = x^4 + 2x^3 - 9x^2 - 2x + 8$ (3) $f(x) = x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 7x + 6$

Gebiet: Analysis	Einsatz ab Stufe 11

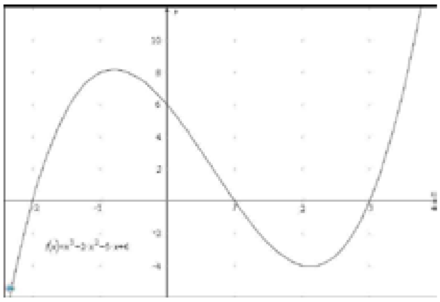
Integralrechnung: Bestimmen von Flächen zwischen Graph und x-Achse (1)

Beispiel-Aufgabe

Gegeben ist die ganzrationale Funktion f mit
$f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$.

Die Maßzahl der Fläche der beiden Flächenstücke, die von Graph und x-Achse eingeschlossen werden, soll bestimmt werden.

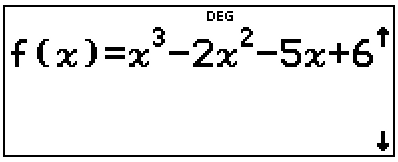
Hinweis: Die Nullstellen von f(x) sind ganzzahlig.

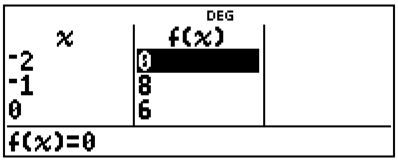


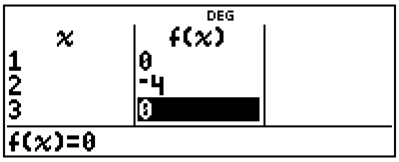
Die Grafik rechts wurde mithilfe eines TI Nspire™ erstellt.

Erläuterung der Lösung

Wenn an einer Funktion mehrere Untersuchungen vorgenommen werden sollen, lohnt es sich, den Funktionsterm zunächst einmal abzuspeichern. Dies geschieht unter „Edit function“ im Menü, das sich öffnet, wenn man die [table]-Taste drückt. Damit veranlasst man gleichzeitig den Rechner, eine Wertetabelle anzulegen.

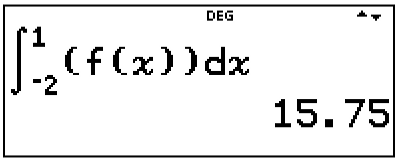


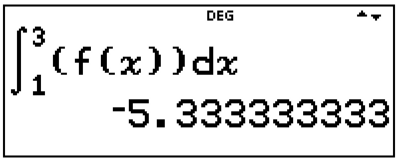


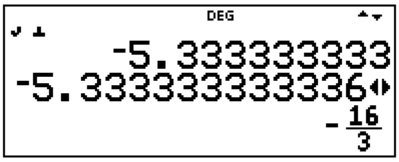


Da die Nullstellen – wie angegeben – ganzzahlig sind, kann man sie mithilfe der Wertetabelle finden; die gegebene Funktion hat die Nullstellen -2; +1 und +3. Da der Vorfaktor von x^3 positiv ist, verläuft der Graph von $-\infty$ nach $+\infty$; das linke Flächenstück liegt oberhalb der x-Achse, das rechte unterhalb. Für das erste Integral muss sich also ein positiver Wert ergeben, für das zweite ein negativer Wert.

Gibt man dann in der [$\int_\square^\square \square\,dx$]-Option die Nullstellen als Integrationsgrenzen ein und im Integranden das soeben definierte f, dann berechnet der Rechner die gewünschten Maßzahlen mit hoher Genauigkeit: Das linke Flächenstück hat die Maßzahl 15,75 F.E., das rechte die Maßzahl 16/3 (wie durch Betätigen der [◂▸≈]-Taste bestätigt wird).







Übungsaufgaben

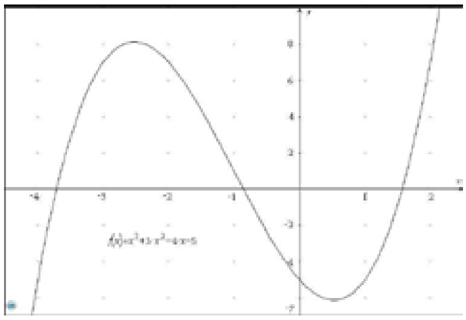
Bestimmen Sie die ganzzahligen Nullstellen der ganzrationalen Funktion f. Fertigen Sie eine Skizze des Graphen an, um vorherzusagen, welche der einzelnen Integrale positiv bzw. negativ sein werden. Bestimmen Sie die Maßzahlen der Flächenstücke, die der Graph von f und die x-Achse einschließen.

(1) $f(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3$	(2) $f(x) = x^4 + 2x^3 - 9x^2 - 2x + 8$	(3) $f(x) = x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 7x + 6$

Gebiet: Analysis	Einsatz ab Stufe 11

Integralrechnung: Bestimmen von Flächen zwischen Graph und x-Achse (2)

Beispiel-Aufgabe



Gegeben ist die ganzrationale Funktion f mit
$f(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 5$.

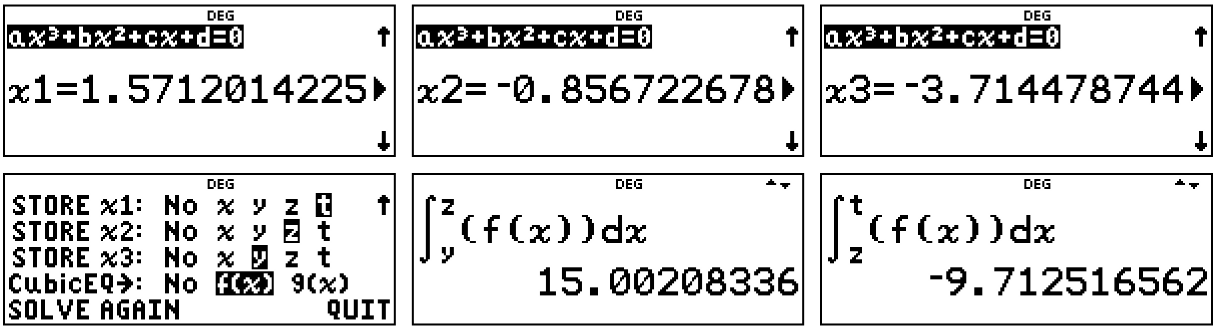
Die Maßzahl der Fläche der beiden Flächenstücke, die von Graph und x-Achse eingeschlossen werden, soll bestimmt werden.

Hinweis: Die Nullstellen von f(x) sind nicht ganzzahlig.

Die Grafik rechts wurde mithilfe eines TI Nspire™ erstellt.

Erläuterung der Lösung

Da es sich um eine Funktion 3. Grades handelt, kann die Bestimmung der Nullstellen mithilfe der [poly-solv]-Option erfolgen. Zunächst werden die Koeffizienten des Polynoms eingegeben (a = 1, b = 3, c = -4, d = -5). Anschließend werden die drei Lösungen abgespeichert, damit sie als Integrationsgrenzen zur Verfügung stehen.



Bei der Integration beachte man die richtige Reihenfolge der Integrationsgrenzen (x3 < x2 < x1); für die gespeicherten Nullstellen gilt also y < z < t.

Der TI-30X Pro MathPrint™ berechnet dann die gewünschten Maßzahlen mit hoher Genauigkeit: Das linke Flächenstück hat ungefähr die Maßzahl 15,0 F.E., das rechte ungefähr 9,7 F.E.

Übungsaufgaben

Bestimmen Sie die Nullstellen der ganzrationalen Funktion f sowie die Maßzahlen der Flächenstücke, die der Graph von f und die x-Achse einschließen.

(1) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 3$	(2) $f(x) = -x^3 - 2x^2 + 5x + 3$	(3) $f(x) = -x^3 - 4x^2 + 4x + 8$

Gebiet: Analysis	Einsatz ab Stufe 11

Integralrechnung: Bestimmen von Flächen zwischen Graph und x-Achse (3)

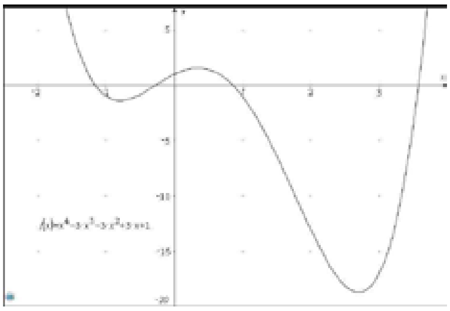
Beispiel-Aufgabe

Gegeben ist die ganzrationale Funktion f mit
$f(x) = x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 3x + 1$.

Die Maßzahl der drei Flächenstücke, die von Graph und x-Achse eingeschlossen werden, soll bestimmt werden.

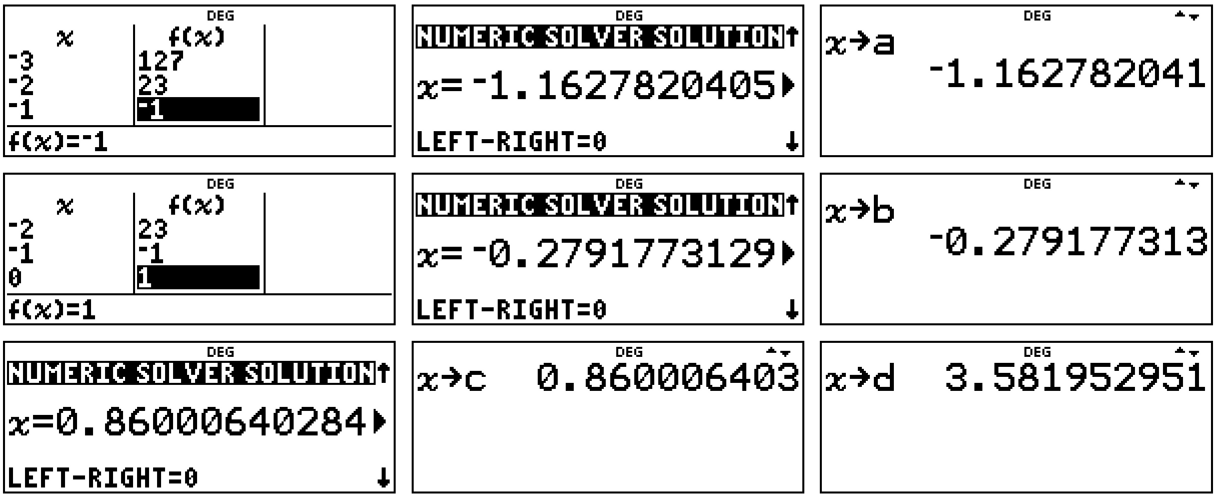
Hinweis: Die Nullstellen von f(x) sind nicht ganzzahlig.

Die Grafik rechts wurde mithilfe eines TI Nspire™ erstellt.



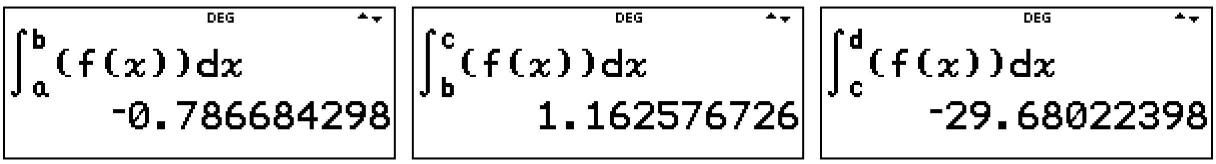
Erläuterung der Lösung

Da es sich um eine Funktion 4. Grades handelt, kann die Bestimmung der Nullstellen nur numerisch mithilfe von [num-solv] erfolgen; hierfür benötigt man die ungefähre Lage der Nullstellen. Man bestimmt also die Intervalle, in denen der VZW stattfindet, gibt dann die linke Intervallgrenze als Startwert für den Suchalgorithmus der [num-solv]-Option ein und speichert dann das Ergebnis (das in diesem Moment unter x abgespeichert ist) unter dem Variablennamen a (entsprechend die nächsten unter den Variablennamen b, c, d).



Bei der Flächenbestimmung gibt man nacheinander jeweils zwei benachbarte Nullstellen als Integrationsgrenzen ein, im Integranden die über die [table]-Taste definierte Funktion f(x). Der Rechner bestimmt dann die Maßzahlen mit hoher Genauigkeit.

Das linke Flächenstück hat ungefähr die Maßzahl 0,79 F.E., das mittlere ungefähr 1,16 F. E., das rechte ungefähr 29,7 F.E.



Übungsaufgaben

Bestimmen Sie die nicht ganzzahligen Nullstellen der ganzrationalen Funktion 4. Grades sowie die Maßzahlen der Flächenstücke, die der Graph von f und die x-Achse einschließen.

(1) $f(x) = x^4 - 12x^2 - 10x + 4$ (2) $f(x) = -x^4 - 2x^3 + 8x^2 + 15x - 2$

Gebiet: Analysis	Einsatz ab Stufe 11

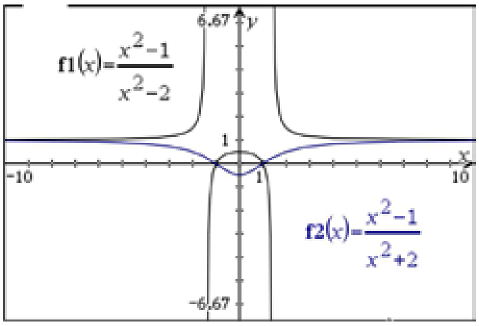
Integralrechnung: Bestimmen von Flächen zwischen Graph und x-Achse (4)

Beispiel-Aufgabe

Gegeben sind die gebrochenrationalen Funktionen mit

$f(x)=\frac{x^2-1}{x^2-2}$ und $g(x)=\frac{x^2-1}{x^2+2}$

Gesucht ist jeweils die Maßzahl des Flächenstücks zwischen den beiden Nullstellen x = -1 und x = +1, das von Graph und x-Achse eingeschlossen wird.



Die Grafik rechts wurde mithilfe eines TI Nspire™ erstellt.

Erläuterung der Lösung

Über die [table]-Option gibt man den Funktionsterm ein. Der Rechner erzeugt eine Wertetabelle, die für das Anfertigen einer Skizze des Graphen verwendet werden kann. Da nur quadratische Terme von x auftreten, sind die Graphen achsensymmetrisch zur y-Achse und es genügt eine Wertetabelle für x ≥ 0.

Wenn die Eingabe der Funktionsterme über die [Bruch]-Taste erfolgt, werden bei ganzzahligen x-Werten auch Brüche als Funktionswerte angegeben, die man mithilfe der [◂▸≈]-Taste in Dezimalzahlen verwandeln kann; umgekehrt können auch Funktionswerte von nicht-ganzzahligen x-Werten mithilfe dieser Option als Brüche dargestellt werden.

Gibt man die Funktionsterme in der Form f(x) = (x² – 1)/(x² – 2) ein, werden alle Funktionswerte als Dezimalzahlen dargestellt.

x	f(x)	g(x)
0	1/2	-1/2
0.5	0.428571	-0.33333
1	0	0

f(x)=3/7

x	f(x)	g(x)
1.5	5	0.294118
2	3/2	1/2
2.5	1.235294	0.636364

f(x)=21/17

x	f(x)	g(x)
3	8/7	8/11
3.5	1.097561	0.789474
4	15/14	5/6

f(x)=45/41

Die gesuchten Flächenmaßzahlen können mithilfe der [$\int_\square^\square \square\,dx$]-Option mit großer Genauigkeit bestimmt werden: $A_f \approx 0{,}75$ FE, $A_g \approx 0{,}61$ FE.

$f(x)=\frac{x^2-1}{x^2-2}$

$\int_{-1}^{1}(f(x))dx$ 0.75354952

$g(x)=\frac{x^2-1}{x^2+2}$

$\int_{-1}^{1}(g(x))dx$ -0.611259254

Übungsaufgaben

Skizzieren Sie den Graphen der gebrochen-rationalen Funktion f und bestimmen Sie die Maßzahl des Flächenstücks, das der Graph von f und die x-Achse einschließen.

(1) $f(x)=\frac{4-x^2}{x^2-9}$ (2) $f(x)=\frac{x^2-4x+3}{x}$ (3) $f(x)=\frac{x^3-6x^2+8x}{x^2-1}$

Gebiet: Analysis	Einsatz ab Stufe 11

Integralrechnung: Bestimmen von Flächen zwischen Graph und x-Achse (5)

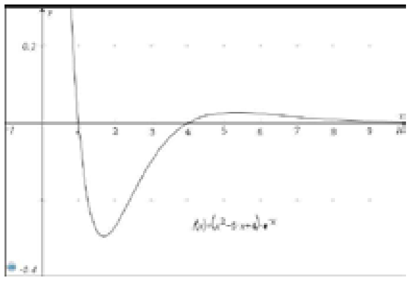
Beispiel-Aufgabe

Gegeben ist die Funktion f mit

$f(x) = (x^2 - 5x + 4) \cdot e^{-x}$

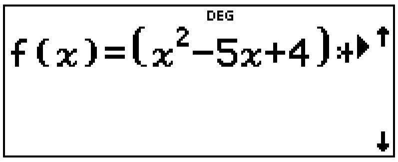
Gesucht sind die Maßzahlen der beiden Flächenstücke, die von Graph und x-Achse eingeschlossen werden.

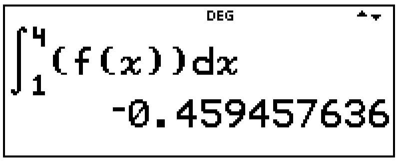
Die Grafik rechts wurde mithilfe eines TI Nspire™ erstellt.

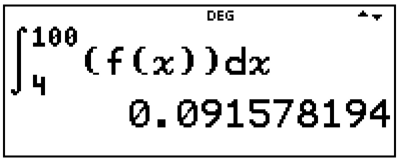


Erläuterung der Lösung

Am Funktionsterm liest man ab, dass die beiden Nullstellen der Funktion bei $x_1 = +1$ und $x_2 = +4$ liegen. Über die [table]-Option gibt man den Funktionsterm ein. Der Rechner erzeugt eine Wertetabelle, die für das Anfertigen einer Skizze des Graphen verwendet werden kann.
Bei der numerischen Integration des zweiten, „ins Unendliche“ reichende Flächenstücks setzt man eine große Zahl als obere Grenze ein, z. B. 100.

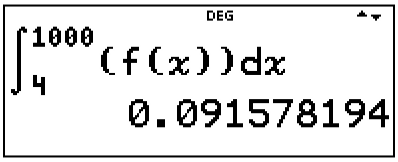




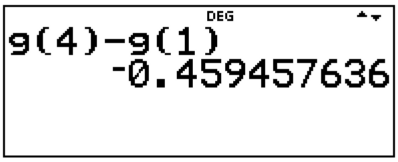


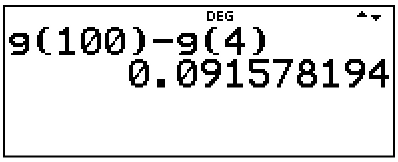
Übungsaufgaben

(1) Bei der Bestimmung des „ins Unendliche“ reichende Flächenstücks ergibt sich kein Unterschied bei der Integration bis x = 100 oder bis x = 1000.
Probieren Sie aus, für welche obere Integrationsgrenze a das Integral über [4 ; a] von dem Ergebnis 0,091578194 in der letzten angezeigten Stelle abweicht.



(2) Was bedeutet es, dass für die Funktion g mit $g(x) = -(x^2 - 3x + 1) \cdot e^{-x}$ Folgendes gilt?





(3) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion f und bestimmen Sie die Maßzahl der Flächenstücke, die der Graph von f und die x-Achse einschließen.

(a) $f(x) = (x^2 - 1) \cdot e^{-x}$

(b) $f(x) = (x^2 - 1) \cdot x \cdot e^{-x}$

(c) $f(x) = (x^2 - 1) \cdot (x^2 - 4) \cdot e^{-x}$

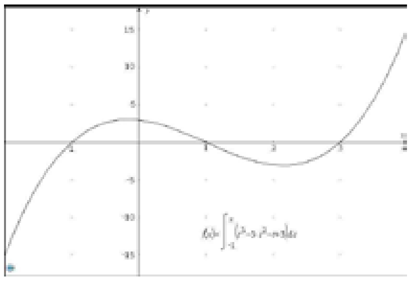
Gebiet: Analysis	Einsatz ab Stufe 11

Integralrechnung: Untersuchung von Integralfunktionen

Beispiel-Aufgabe

Untersuchen Sie den Verlauf des Graphen der Integralfunktion g mit fester unterer Grenze -1 und variabler oberer Grenze, die gegeben ist durch:

$$g(x) = \int_{-1}^{x} (t^3 - 3t^2 - t + 3)\, dt$$



Die Grafik rechts wurde mithilfe eines TI Nspire™ erstellt.

Erläuterung der Lösung

Den gegebenen Funktionsterm kann man in das table-Menü eingeben – auch in der Form einer Integralfunktion, wobei man beachten muss, dass im TI-30X Pro MathPrint™ nicht formal zwischen der Variablen x der Integrationsgrenze und der Variablen t der Integrandfunktion unterschieden wird.

DEG
$f(x)=x^3-3x^2-x+3$

DEG
$g(x)=\int_{-1}^{x}(f(x)dx$

x	f(x)	g(x)
-2.5	-28.875	17.01563
-2	-15	6.25
-1.5	-5.625	1.265625

x=-2.5

x	f(x)	g(x)
-1	0	0
-0.5	2.625	0.765625
0	3	2.25

x=0

x	f(x)	g(x)
0.5	1.875	3.515625
1	0	4
1.5	-1.875	3.515625

x=1.5

x	f(x)	g(x)
2	-3	2.25
2.5	-2.625	0.765625
3	0	-1.3E-12

x=3

x	f(x)	g(x)
3.5	5.625	1.265625
4	15	6.25
4.5	28.875	17.01562

x=4.5

An der Wertetabelle der Integrandfunktion f kann man ablesen, dass der Graph punktsymmetrisch zum Punkt (+1 I 0) ist. Daher ist die Integralfunktion g entsprechend achsensymmetrisch zu x = +1.

Links von der ersten Nullstelle der Integrandfunktion f bei x = -1 hat die Funktion g positive Funktionswerte, da zwar die Integrandfunktion im negativen Bereich verläuft, die obere Integrationsgrenze x aber unterhalb der unteren Integrationsgrenze -1 liegt.

Die Integralfunktion g hat ein Minimum an der Stelle x = -1; da dort eine Nullstelle von g vorliegt, ist dies also eine doppelte Nullstelle. Das Maximum der Integralfunktion g liegt an der Stelle x = 1 vor, was plausibel ist, da das gesamte Flächenstück bis zur Stelle x = +1 oberhalb der x-Achse liegt. Danach nehmen die Funktionswerte von g wieder ab bis zur Nullstelle von f in x = +3, was wegen der Symmetrie des Graphen der Integrandfunktion zum Punkt (+1 I 0) plausibel ist. Der Graph von g hat an der Stelle x = +3 wieder eine doppelte Nullstelle. Danach steigen die Werte der Integralfunktion wieder an, da der Graph der Integrandfunktion im positiven Bereich verläuft.

Übungsaufgaben

Untersuchen Sie entsprechend die Graphen der folgenden Integralfunktionen

(1) $g(x) = \int_{0}^{x} (t^4 - 4t^3 + 3t^2)\, dt$ (2) $g(x) = \int_{0}^{x} (t^4 - 5t^2 + 6)\, dt$ (3) $g(x) = \int_{0}^{x} \sin(t)\, dt$

Gebiet: Analysis	Einsatz ab Stufe 11

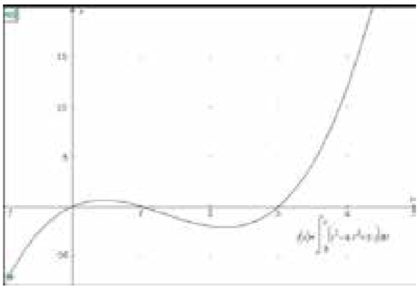
Bestimmung der Nullstellen einer Integralfunktion

Beispiel-Aufgabe

Gegeben ist der Graph der Integralfunktion f mit fester unterer und variabler oberer Grenze durch:

$$g(x) = \int_0^x (t^3 - 4t^2 + 3t)\,dt$$

Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion.



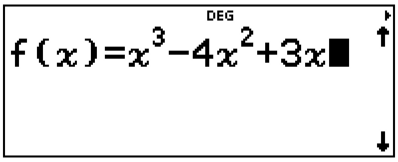
Die Grafik rechts wurde mithilfe eines TI Nspire™ erstellt.

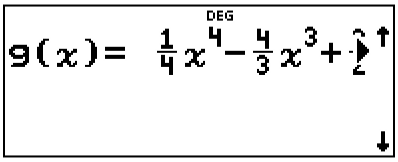
Erläuterung der Lösung

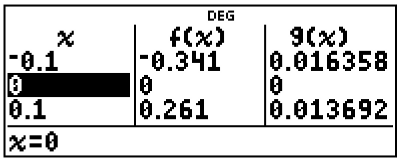
Eine Stammfunktion der Funktion f mit $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x$ ist gegeben durch $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + c$. Da für die o. a. Integralfunktion gilt g(0) = 0, ergibt sich aus F(0) = c die Darstellung $g(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2$.

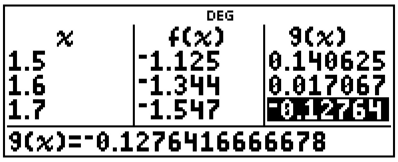
Aus der Wertetabelle der Integrandfunktion f und der Integralfunktion g kann man entnehmen, dass der Graph der Integralfunktion eine doppelte Nullstelle bei x = 0 hat sowie zwei einfache Nullstellen, die zwischen x = 1,6 und x = 1,7 bzw. zwischen x = 3,7 und x = 3,8 liegen.

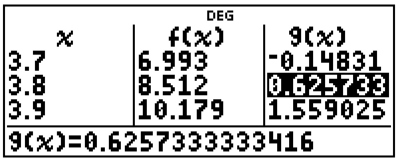
Dass diese einfachen Nullstellen auftreten, ergibt sich aus der Tatsache, dass das Flächenstück zwischen 0 und 1, das oberhalb der x-Achse liegt, kleiner ist als das Flächenstück zwischen 1 und 3, das unterhalb der x-Achse liegt.



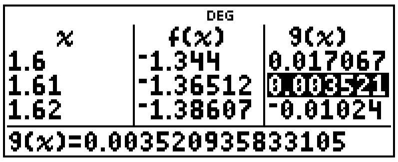


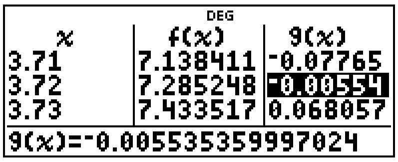






Durch Reduzierung der Schrittweite erhält man im nächsten Schritt brauchbare Näherungswerte.





Die Nullstellen der Integralfunktion liegen ungefähr x ≈ 1,61 bzw. bei x ≈ 3,72.

Übungsaufgaben

Bestimmen Sie die Nullstellen der Integralfunktion f mit fester unterer und variabler oberer Grenze. Skizzieren Sie zunächst den Graphen der Integrandfunktion und schätzen Sie am Graphen der Funktion f grob ab, wo die Nullstellen liegen.

(1) $g(x) = \int_0^x (t^2 - 2t)\,dt$ (2) $g(x) = \int_1^x (-t^3 + 5t^2 - 4t)\,dt$ (3) $g(x) = \int_0^x (t^4 - 4t^3 + t^2)\,dt$

Gebiet: Analysis	Einsatz ab Stufe 11

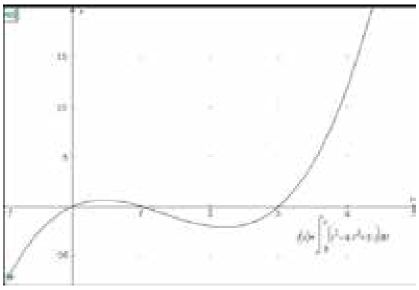
Bestimmung der Nullstellen von Integralfunktionen

Beispiel-Aufgabe

Gegeben ist der Graph der Integralfunktion f mit fester unterer und variabler oberer Grenze durch:

$$g(x) = \int_0^x (t^3 - 4t^2 + 3t)\,dt$$

Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion.



Die Grafik rechts wurde mithilfe eines TI Nspire™ erstellt.

Erläuterung der Lösung

Aus der Wertetabelle der Integrandfunktion f und der Integralfunktion g kann man entnehmen, dass der Graph der Integralfunktion eine doppelte Nullstelle bei x = 0 hat sowie zwei einfache Nullstellen, die zwischen x = 1,6 und x = 1,7 bzw. zwischen x = 3,7 und x = 3,8 liegen.

Dass diese einfachen Nullstellen auftreten, ergibt sich aus der Tatsache, dass das Flächenstück zwischen 0 und 1, das oberhalb der x-Achse liegt, kleiner ist als das Flächenstück zwischen 1 und 3, das unterhalb der x-Achse liegt.

DEG
$f(x)=x^3-4x^2+3x$

DEG
$g(x)=\int_0^x (f(x))dx$

DEG

x	f(x)	g(x)
-0.1	-0.341	0.016358
0	0	0
0.1	0.261	0.013692

x=0

DEG

x	f(x)	g(x)
1.5	-1.125	0.140625
1.6	-1.344	0.017067
1.7	-1.547	-0.12764

g(x)=-0.1276416666678

DEG

x	f(x)	g(x)
3.7	6.993	-0.14831
3.8	8.512	0.625733
3.9	10.179	1.559025

g(x)=0.6257333333416

Einen genaueren Wert kann man leider nicht mit dem numerischen Gleichungslöser ermitteln, sondern muss numerischen Gleichungslöser die Gleichung f(x) = 0 ein, dann findet der Rechner – bei Eingabe geeigneter Startwerte für den Suchalgorithmus – die beiden Nullstellen.

DEG

x	f(x)	g(x)
1.6	-1.344	0.017067
1.61	-1.36512	0.003521
1.62	-1.38607	-0.01024

g(x)=0.003520935833105

DEG

x	f(x)	g(x)
3.71	7.138411	-0.07765
3.72	7.285248	-0.00554
3.73	7.433517	0.068057

g(x)=-0.005535359997024

Die Nullstellen der Integralfunktion liegen ungefähr x ≈ 1,61 bzw. bei x ≈ 3,72.

Übungsaufgaben

Bestimmen Sie die Nullstellen der Integralfunktion f mit fester unterer und variabler oberer Grenze. Skizzieren Sie zunächst den Graphen der Integrandfunktion und schätzen Sie am Graphen der Funktion f grob ab, wo die Nullstellen liegen.

(1) $g(x)=\int_0^x (t^2-2t)dt$	(2) $g(x)=\int_1^x (-t^3+5t^2-4t)dt$	(3) $g(x)=\int_0^x (t^4-4t^3+t^2)dt$

Gebiet: Lineare Algebra	Einsatz ab Stufe 10

Lösen eines linearen Gleichungssystems mit drei Gleichungen und drei Variablen

Beispiel-Aufgabe

Gesucht ist die Lösung des linearen Gleichungssystems

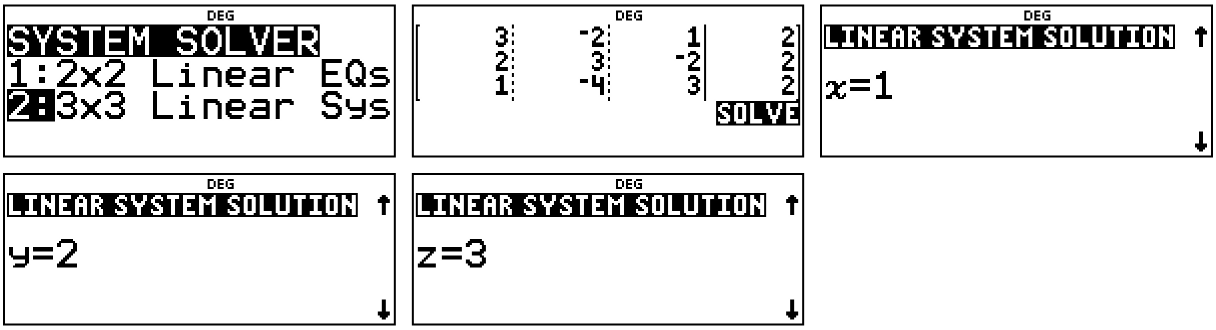
$$\left| \begin{array}{r} 3x-2y+1z=2 \\ 2x+3y-2z=2 \\ 1x-4y+3z=2 \end{array} \right|$$

Erläuterung der Lösung

Die [sys-solv]-Option „3x3 Linear Sys“ des TI-30X Pro MathPrint™ erwartet zunächst die Eingabe der Koeffizienten in den drei Gleichungen. Im Unterschied zur Option „2x2 Linear EQs“ werden keine Variablen angezeigt, auch sind keine Rechenzeichen vorgegeben.

Man gibt die Koeffizienten zeilenweise ein; nach Drücken der *enter*-Taste springt der Cursor jeweils zur nächsten einzugebenden Zahl.

Hat man alle Koeffizienten eingegeben, erhält man nach Drücken der *enter*-Taste die Lösung des Gleichungssystems, das ist ein Tripel von Zahlen, die gemeinsam das Gleichungssystem erfüllen (hier: (1|2|3) mit der Pfeiltaste kann man nach unten/oben blättern).



Übungsaufgaben

(1) Lösen Sie mithilfe des TI-30X Pro MathPrint™ das Gleichungssystem

(a) $\left| \begin{array}{r} 2x-2y+3z=10 \\ -1x+4y+5z=5 \\ 1x+1y+1z=2 \end{array} \right|$ (b) $\left| \begin{array}{r} 2x-1y+3z=-1 \\ 1x+2y+2z=1 \\ 3x-4y+1z=3 \end{array} \right|$

(c) $\left| \begin{array}{r} 1x-1y-2z=0 \\ -1x+2y=-8 \\ 3y+1z=-3 \end{array} \right|$ (d) $\left| \begin{array}{r} 2x-1y=5 \\ 1x-3z=-2 \\ 3y+4z=-5 \end{array} \right|$

(2) Eine quadratische Parabel verläuft durch die drei Punkte P_1, P_2 und P_3. Bestimmen Sie die Gleichung der Funktion f mit $f(x) = ax^2 + bx + c$.

(a) P_1 (1 | 0), P_2 (2 | 3), P_3 (3 | 10) (b) P_1 (1 | 5), P_2 (3 | 37), P_3 (-2 | 2)

(c) P_1 (2 | 6), P_2 (-2 | -2), P_3 (4 | 4) (d) P_1 (-2 | 5), P_2 (2 | 9), P_3 (4 | 29)

(e) P_1 (-2 | -4), P_2 (2 | 6), P_3 (3 | 11)

Gebiet: Lineare Algebra & Analytische Geometrie	Einsatz ab Stufe 11

Sonderfälle bei linearen Gleichungssystemen mit drei Variablen

Beispiel-Aufgabe

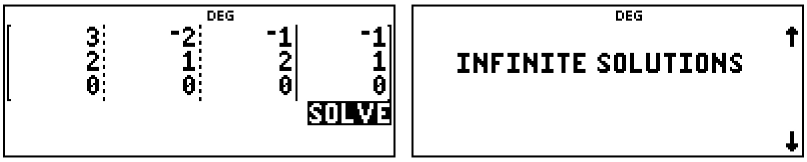
Gesucht ist die Lösung des linearen Gleichungssystems

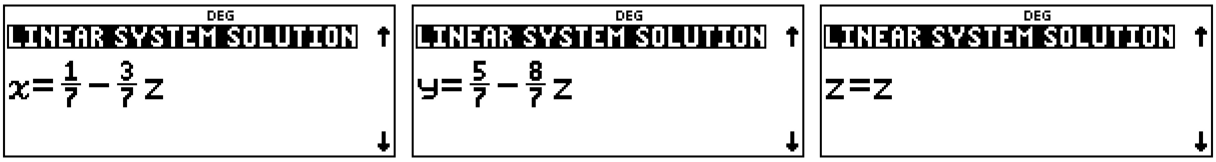
$$\left| \begin{array}{l} 3x - 2y - 1z = -1 \\ 2x + 1y + 2z = 1 \end{array} \right|$$

Erläuterung der Lösung

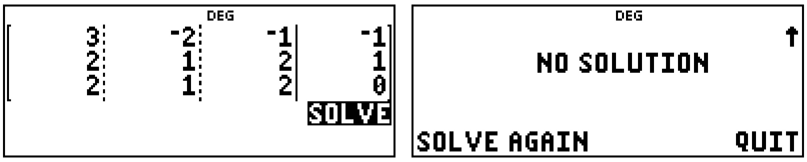
Die System-Solver-Option „3x3 Linear Sys“ des TI-30X Pro MathPrint™ erwartet die Eingabe der Koeffizienten in *drei* Gleichungen; da nur zwei Gleichungen gegeben sind, wird als dritte Gleichung $0x + 0y + 0z = 0$ gewählt, d. h., man lässt die dritte Gleichung unverändert.

Hat man alle Koeffizienten eingegeben, erhält man nach Drücken der *enter*-Taste die Lösung des Gleichungssystems, das ist eine Parameterdarstellung der unendlich vielen Lösungen – hier das Tripel $({}^1/_7 - {}^3/_7\, z \mid {}^5/_7 - {}^8/_7\, z \mid z)$. Setzt man für z irgendeine Zahl ein, dann erhält man eine konkrete Lösung, beispielsweise für $z = -2$: (1 | 3 | -2).





Hinweis: Die im folgenden linearen Gleichungssystem angegebenen 2. und 3. Gleichung können nicht gleichzeitig gelten. Daher gibt der Schulrechner die Rückmeldung „keine Lösung“.



Übungsaufgaben

(1) Lösen Sie mithilfe des TI-30X Pro MathPrint™ das Gleichungssystem

(a) $\left| \begin{array}{l} 1x + 3y - 2z = 4 \\ -2x + 3y + 1z = 11 \end{array} \right|$ (b) $\left| \begin{array}{l} 5x + 2y + 3z = 7 \\ 3x + 3y + 4z = 1 \end{array} \right|$ (c) $\left| \begin{array}{l} 4x - 3y - 2z = 3 \\ 1x + 1y + 3z = 6 \end{array} \right|$

(2) Gegeben sind zwei Ebenen E_1 und E_2 durch eine Koordinatengleichung. Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung der Schnittgerade – sofern sie existiert.

(a) E_1: $3x - 2y - 1z = -1$; E_2: $2x + 1y + 2z = 1$

(b) E_1: $2x - 1y - 3z = -1$; E_2: $4x - 2y - 6z = 2$

(c) E_1: $2x - 1z = 3$; E_2: $-2y + 1z = -1$

Gebiet: Analytische Geometrie | Einsatz ab Stufe 11

Länge und Orthogonalität von Vektoren

Beispiel-Aufgabe

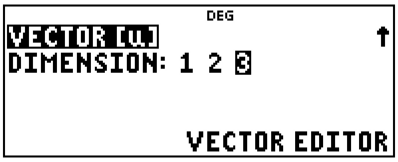
(1) Gegeben sind zwei Vektoren. Welche Länge haben diese? (Betrag)

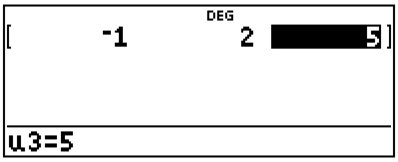
(2) Sind die beiden Vektoren zueinander orthogonal?

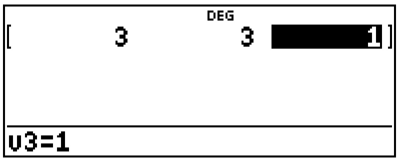
$\vec{u} = \begin{pmatrix}-1\\2\\5\end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix}3\\3\\1\end{pmatrix}$

Erläuterung der Lösung

Mit der Vector-Option des TI-30X Pro MathPrint™ kann man 1-, 2- oder 3-dimensionale Vektoren eingeben (EDIT) und mit ihnen rechnen (MATH). Die beiden hier gegebenen Vektoren sind 3-dimensional; die Komponenten werden einzeln eingeben; durch [enter] springt man zur nächsten Eingabe.

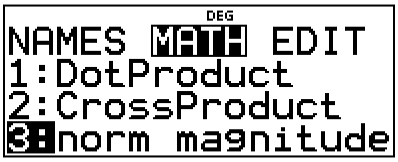


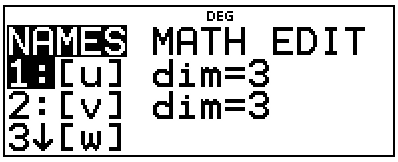


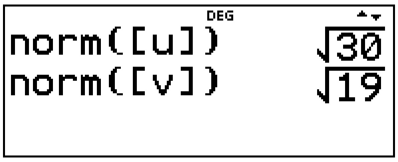


Die Länge eines Vektors ergibt sich nach dem Satz des PYTHAGORAS: $|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$.

Der TI-30X Pro MathPrint™ berechnet die Länge, wenn man Option 3 (norm magnitude) wählt und dann über NAMES den Vektor benennt, dessen Länge bestimmt werden soll.



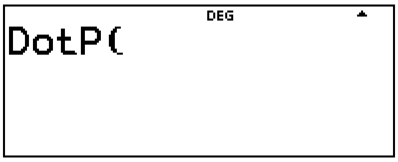




Zwei Vektoren sind zueinander orthogonal, wenn für das Skalarprodukt der beiden Vektoren gilt: $\vec{u} * \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 = 0$.

Das Skalarprodukt wird mithilfe der Option 1 (DotProduct) berechnet: Über NAMES gibt man die Bezeichnung der beiden zuvor eingegebenen Vektoren ein (das Komma zwischen den beiden Namen darf nicht vergessen werden).

Die beiden hier gegebenen Vektoren sind nicht zueinander orthogonal.



Übungsaufgaben

(1) Bestimmen Sie mithilfe des TI-30X Pro MathPrint™ die Länge folgender Vektoren.

(2) Welche der Vektoren stehen zueinander senkrecht?

(a) $\vec{u} = \begin{pmatrix}3\\-2\\0\end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$

(b) $\vec{u} = \begin{pmatrix}0{,}2\\-1{,}3\\1{,}6\end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix}2{,}4\\1{,}1\\0{,}6\end{pmatrix}$

(c) $\vec{u} = \begin{pmatrix}1/4\\2/3\\3/4\end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix}4/3\\-5/2\\16/9\end{pmatrix}$

(d) $\vec{u} = \begin{pmatrix}1{,}4\\0{,}3\\-0{,}2\end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix}0{,}3\\-1{,}2\\0{,}3\end{pmatrix}$

Gebiet: Analytische Geometrie	Einsatz ab Stufe 11

Winkel zwischen Vektoren, Geraden, Ebenen – die [set op]-Option des Rechners

Beispiel-Aufgabe

Gegeben sind zwei Vektoren. Welchen Winkel bilden sie miteinander?

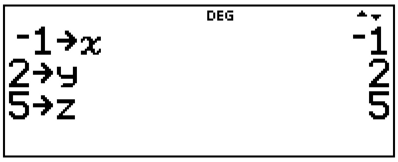
$\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

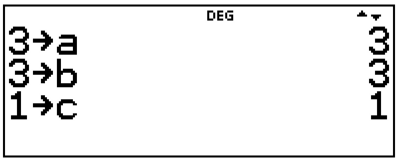
Erläuterung der Lösung

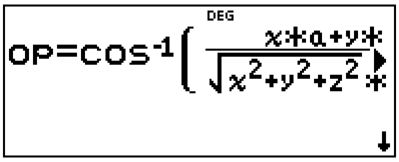
Der TI-30X Pro MathPrint™ verfügt über die Möglichkeit, dass man komplexe Formeln speichern und wieder aufrufen kann. Beispielsweise kann man diese Option bei der Berechnung des Winkels zwischen zwei Vektoren nutzen. Dabei gilt: $\cos(\alpha) = \frac{\vec{u} * \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$, also: $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{u} * \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}\right)$

Wenn man mehrfach einen Winkel zwischen Vektoren bestimmen muss, dann lohnt es sich, den Term, bei dem die Umkehrfunktion der Kosinusfunktion angewandt wird, auf den Quotienten aus dem Skalarprodukt der beiden Vektoren und dem Produkt der Beträge der beiden Vektoren als feste Operation zu definieren.

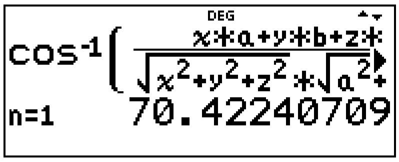
Zuvor muss man die Komponenten der beiden Vektoren mithilfe des [sto→]-Befehls eingeben:







Dann klickt man die [set op]-Taste an und gibt den Term ein. Drückt man anschließend die [op]-Taste, dann wird automatisch der Winkel berechnet, hier ergibt sich ein Winkel von ca. 70,4°.



Ändert man die betrachteten Vektoren, dann kann durch Anklicken des op-Befehls die gespeicherte Operation erneut abgerufen werden.

Übungsaufgaben

1. Bestimmen Sie mithilfe des TI-30X Pro MathPrint™ die Winkel zwischen folgenden Vektoren

(a) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ (b) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0{,}2 \\ -1{,}3 \\ 1{,}6 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 2{,}4 \\ 1{,}1 \\ 0{,}6 \end{pmatrix}$ (c) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 2/3 \\ 3/4 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 4/3 \\ -5/2 \\ 16/9 \end{pmatrix}$

2. Bestimmen Sie den Schnittwinkel zwischen den beiden Geraden g und h.

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

3. Bestimmen Sie den Schnittwinkel, den die beiden Ebenen miteinander bilden:

E_1: $3x - 2y + 4z = -1$; E_2: $2x + 2y - 1z = 3$

Gebiet: Analytische Geometrie | Einsatz ab Stufe 11

Winkel zwischen Vektoren, Geraden, Ebenen

Beispiel-Aufgabe

Gegeben sind zwei Vektoren. Welchen Winkel bilden sie miteinander?

$$\vec{u}=\begin{pmatrix}-1\\2\\5\end{pmatrix} \quad \vec{v}=\begin{pmatrix}3\\3\\1\end{pmatrix}$$

Erläuterung der Lösung

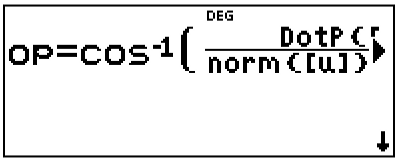
Der TI-30X Pro MathPrint™ verfügt über die Möglichkeit, dass man komplexe Formeln speichern und wieder aufrufen kann. Beispielsweise kann man diese Option bei der Berechnung des Winkels zwischen zwei Vektoren nutzen. Dabei gilt:

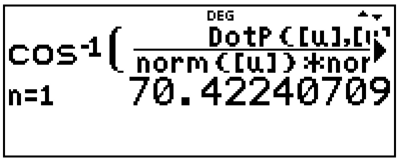
$$\cos(\alpha)=\frac{\vec{u}*\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}\text{ , also: }\alpha=\cos^{-1}\left(\frac{\vec{u}*\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}\right)$$

Wenn man mehrfach einen Winkel zwischen Vektoren bestimmen muss, dann lohnt es sich, den Term, bei dem die Umkehrfunktion der Kosinusfunktion angewandt wird, auf den Quotienten aus dem Skalarprodukt der beiden Vektoren und dem Produkt der Beträge der beiden Vektoren als feste Operation zu definieren.

Dazu klickt man die [set op]-Taste an – der Rechner erwartet dann die Eingabe des Terms.

Wenn dieser Term eingegeben ist, wird die Operation beim Drücken der [op]-Taste sofort ausgeführt. Im Beispiel hier ergibt sich ein Winkel von ca. 70,4°.





Ändert man die betrachteten Vektoren, dann kann durch Anklicken des op-Befehls die gespeicherte Operation erneut abgerufen werden.

Übungsaufgaben

1. Bestimmen Sie mithilfe des TI-30X Pro MathPrint™ die Winkel zwischen folgenden Vektoren

(a) $\vec{u}=\begin{pmatrix}3\\-2\\0\end{pmatrix}$ $\vec{v}=\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$ (b) $\vec{u}=\begin{pmatrix}0,2\\-1,3\\1,6\end{pmatrix}$ $\vec{v}=\begin{pmatrix}2,4\\1,1\\0,6\end{pmatrix}$ (c) $\vec{u}=\begin{pmatrix}1/4\\2/3\\3/4\end{pmatrix}$ $\vec{v}=\begin{pmatrix}4/3\\-5/2\\16/9\end{pmatrix}$

2. Bestimmen Sie den Schnittwinkel zwischen den beiden Geraden g und h.

$$g:\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}\ ;\ h:\vec{x}=\begin{pmatrix}6\\4\\-1\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix}$$

3. Bestimmen Sie den Schnittwinkel, den die beiden Ebenen miteinander bilden:

E_1: $3x-2y+4z=-1$; E_2: $2x+2y-1z=3$

Gebiet: Analytische Geometrie	Einsatz ab Stufe 11

Anwendung des Vektorprodukts: Bestimmen eines orthogonalen Vektors

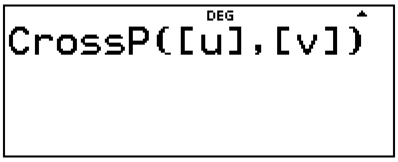
Beispiel-Aufgabe

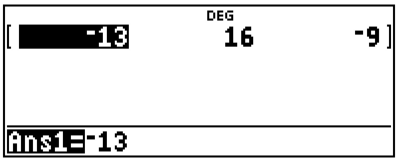
Gesucht ist ein Vektor, der orthogonal ist zu den beiden Vektoren.

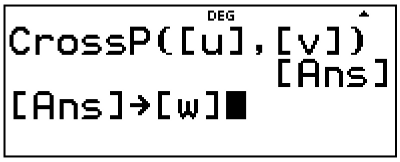
$\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Erläuterung der Lösung

Mithilfe des Kreuzprodukts (Cross-Product) kann man einen Vektor bestimmen, der orthogonal zu zwei gegebenen Vektoren ist. Man kann ihn mithilfe des sto→-Befehls unter dem Namen w abspeichern. Der berechnete Vektor wird (aus Platzgründen) als Zeilenvektor ausgegeben.







Antwort: Der Vektor $\vec{w} = \begin{pmatrix} -13 \\ 16 \\ -9 \end{pmatrix}$ ist orthogonal zu $\vec{u}$ und $\vec{v}$.

Übungsaufgaben

(1) Bestimmen Sie mithilfe des Vektorprodukts einen Vektor, der orthogonal ist zu den gegebenen Vektoren.

(a) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ (b) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0{,}2 \\ -1{,}3 \\ 1{,}6 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 2{,}4 \\ 1{,}1 \\ 0{,}6 \end{pmatrix}$ (c) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 2/3 \\ 3/4 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 4/3 \\ -5/2 \\ 16/9 \end{pmatrix}$ (d) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1{,}4 \\ 0{,}3 \\ -0{,}2 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 0{,}3 \\ -1{,}2 \\ 0{,}3 \end{pmatrix}$

(2) Gegeben ist eine Parameterdarstellung einer Ebene E. Bestimmen Sie mithilfe des Vektorprodukts eine Koordinatengleichung von E.

(a) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (b) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

(3) Zeigen Sie, dass die beiden Geraden g und h einen Punkt gemeinsam haben. Bestimmen Sie mithilfe des Vektorprodukts eine Koordinatengleichung der Ebene, die durch die beiden Geraden bestimmt wird.

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$

Gebiet: Analytische Geometrie	Einsatz ab Stufe 11

Darstellung von Ebenen: Von der Parameterdarstellung zur Koordinatengleichung

Beispiel-Aufgabe

Gegeben ist die Ebene IE im IR³ durch eine Parameterdarstellung.

Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene.

$$IE: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

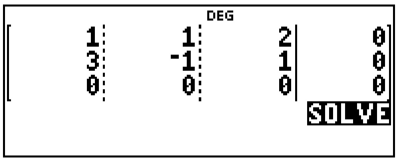
Erläuterung der Lösung

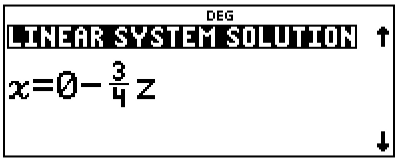
Die Koordinatengleichung einer Ebene wird bestimmt durch einen Normalenvektor der Ebene und durch einen Punkt der Ebene. Für die Komponenten n_1, n_2, n_3 des Normalenvektors muss gelten: $1 \cdot n_1 + 1 \cdot n_2 + 2 \cdot n_3 = 0$ und $3 \cdot n_1 - 1 \cdot n_2 + 1 \cdot n_3 = 0$ (d. h., das Skalarprodukt des Normalenvektors mit den beiden Richtungsvektoren der Ebene muss jeweils null ergeben).

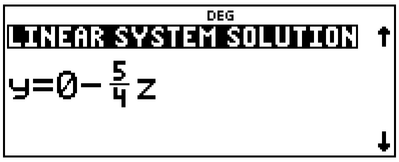
Dies ist ein lineares Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und drei Variablen, das mithilfe des TI-30X Pro MathPrint™ gelöst werden kann.

Nach Eingabe der erweiterten Koeffizientenmatrix (die fehlende dritte Gleichung ist $0 \cdot n_1 + 0 \cdot n_2 + 0 \cdot n_3 = 0$) erhält man eine Parameterdarstellung der unendlich vielen Lösungen.

Wählt man z. B. z = -4, dann sind x = 3 und y = 5.







Setzt man in die so erhaltene Form $3 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 - 4 \cdot x_3$ die Koordinaten des Aufhängepunktes A (1 | 2 | -1) ein, dann erhält man die Zahl 17 und somit die Koordinatengleichung der Ebene:

IE: $3 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 - 4 \cdot x_3 = 17$

Übungsaufgaben

(1) Gegeben ist eine Parameterdarstellung einer Ebene IE. Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung von IE.

a) $IE: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $IE: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

(2) Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Geraden g mit der Ebene IE aus Übungsaufgabe (1)

(a) durch Einsetzen der Parameterdarstellung der Geradenpunkte in die in Aufgabe (1) bestimmte Koordinatengleichung

(b) durch Lösung des sich ergebenden linearen Gleichungssystems mit drei Gleichungen und drei Variablen

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Gebiet: Analytische Geometrie | Einsatz ab Stufe 11

Lagebeziehungen von Geraden

Beispiel-Aufgabe

Gegeben sind die Geraden g_1, g_2 und g_3 im IR³. Untersuchen Sie die gegenseitige Lage.

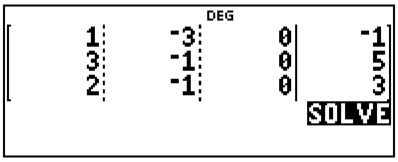
$$g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad g_3: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \nu \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

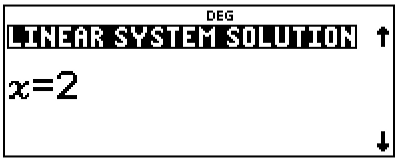
Erläuterung der Lösung

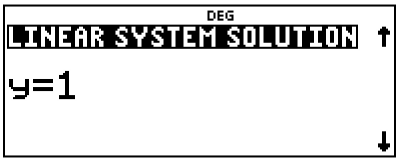
Es ist zu untersuchen, ob je zwei Geraden gemeinsame Punkte haben, d. h., ob das lineare Gleichungssystem mit drei Gleichungen und zwei Variablen eine Lösung hat oder nicht.

Dazu muss die zu lösende Vektorgleichung, z. B. $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ umgeformt werden zu

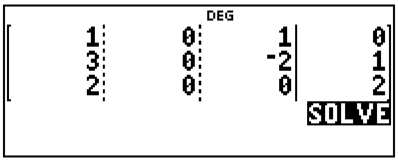
$\lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \mu \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ oder als Gleichungssystem $\left| \begin{array}{l} x - 3y = -1 \\ 3x - y = 5 \\ 2x - y = 3 \end{array} \right|$ (mit x für λ und y für μ).

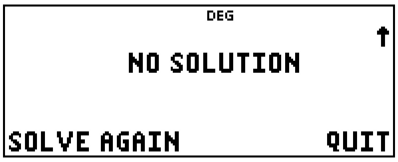


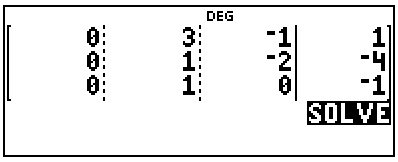


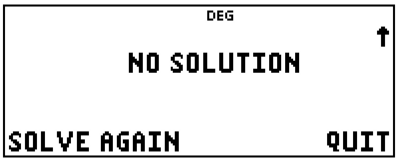


Da das Gleichungssystem eine Lösung besitzt, haben die Geraden g_1 und g_2 einen gemeinsamen Punkt, dessen Koordinaten S (4 I 4 I 3) man erhält, wenn man die Lösungen in die Parameterdarstellungen einsetzt. Dagegen erhält man keine Lösungen, wenn man analog gemeinsame Punkte von g_1 und g_3 sucht. Dies gilt auch für g_2 und g_3.









d. h., die Geraden g_1 und g_3 bzw. g_2 und g_3 sind zueinander windschief oder zueinander parallel. An den Richtungsvektoren liest man ab, dass sie nicht zueinander parallel sind.

Übungsaufgabe

Gegeben sind die Geraden g_1, g_2 und g_3 im IR³. Untersuchen Sie die gegenseitige Lage.

$$g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad g_3: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Gebiet: Analytische Geometrie	Einsatz ab Stufe 11

Abstand eines Punktes von einer Geraden

Beispiel-Aufgabe

Gegeben ist der Punkt P (1 I 2 I 3) und die Gerade g, die gegeben ist durch eine Parameterdarstellung.

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

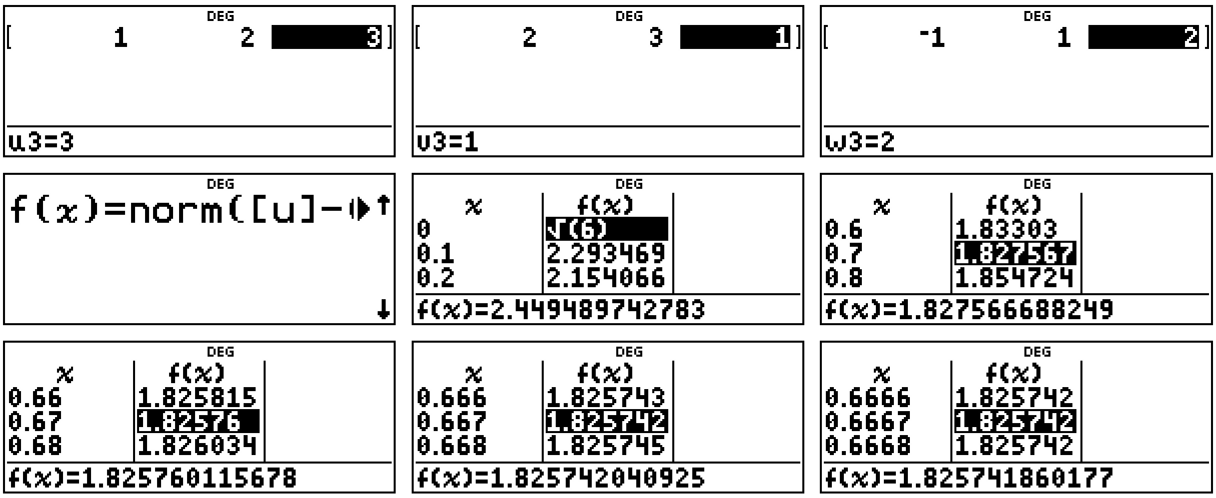
Welchen Abstand hat der Punkt von der Geraden?

Erläuterung der Lösung

Wir bilden den Differenzvektor $\vec{p} - \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$

und untersuchen, für welche Einsetzung des Parameters λ dieser einen möglichst kleinen Betrag hat. Mithilfe des TI-30X Pro MathPrint™ kann dies realisiert werden, indem wir eine Funktion f definieren, die in Abhängigkeit vom Parameter x (statt λ) den Betrag des Differenzvektors berechnet:

Dazu definieren wir zunächst die drei Vektoren (die im Rechner u, v, w heißen) und dann über das [table]-Menü die Funktion: f(x) = norm([u] – ([v] + x · [w]), deren Wertetabelle wir untersuchen können. Das Minimum der Funktion kann wie folgt schrittweise bestimmt werden.



Der Abstand des Punkts P zur Geraden ergibt sich für λ = 2/3 und beträgt ca. 1,82 LE.

Übungsaufgaben

Bestimmen Sie den Abstand des Punktes P(1 I -1 I 1) von den Geraden g_1, g_2, g_3, g_4:

$$g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

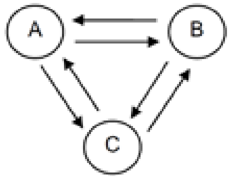
$$g_3: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad g_4: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Gebiet: Matrizen (Lineare Algebra / Stochastik)	Einsatz ab Stufe 11

Übergangsmatrizen: Bestimmung von Zustandsvektoren (1)

Beispiel-Aufgabe

Eine Mietwagenfirma hat Niederlassungen in drei Städten A, B, C. Durch die Matrix M wird der durchschnittliche tägliche Wechsel von Leihautos zwischen Niederlassungen beschrieben. Wir betrachten einen Anfangszustand von 30 % Pkw in A, 40 % in B, 30 % in C.

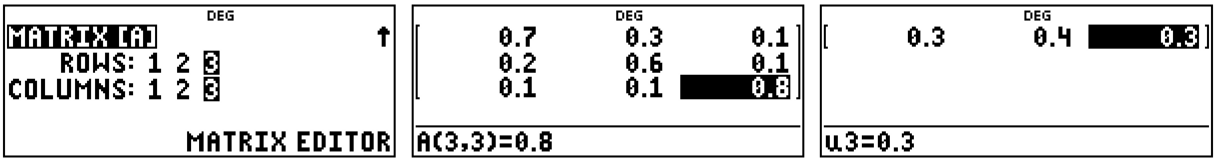


$$M = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}6 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}8 \end{pmatrix}$$

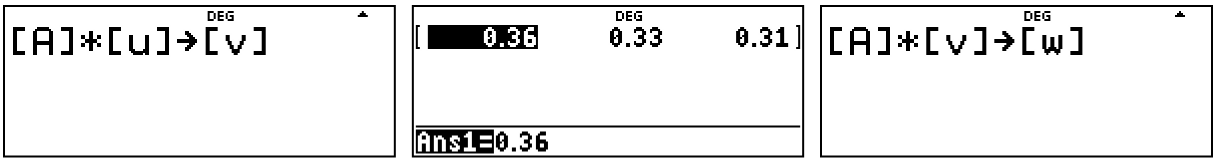
Wie verteilen sich in den nächsten drei Tagen die Leihautos auf die Niederlassungen? Welche Verteilung ist auf lange Sicht zu erwarten?

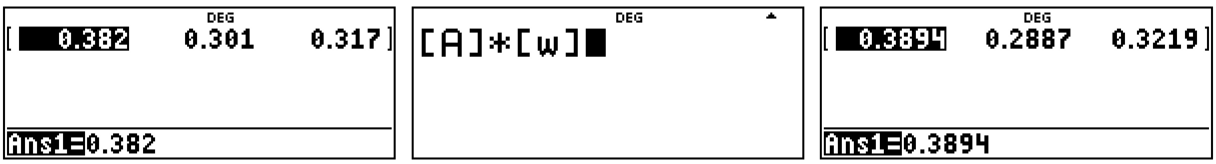
Erläuterung der Lösung

Über den Editor des [matrix]-Menüs gibt man zunächst die Dimension der Matrix (3 x 3) und dann zeilenweise die Koeffizienten ein, dann über den Editor des [vector]-Menüs die Dimension und die Koeffizienten des Startvektors. Dieser wird (aus Platzgründen) als Zeilenvektor dargestellt. Den Editor verlässt man jeweils mit dem [quit]-Befehl.



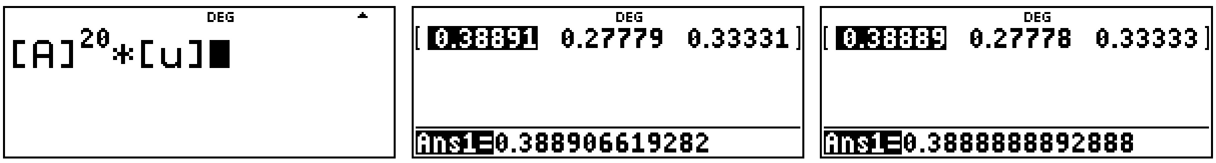
Über die NAMES-Befehle ruft man die Matrix und den Vektor auf, um das Produkt zu bilden; dieses wird ebenfalls als Zeilenvektor ausgegeben. Da der Zustandsvektor für den 2. Tag für die weitere Rechnung benötigt wird, sollte er abgespeichert werden. Entsprechend verfährt man für den 3. und 4. Tag. Nach einem Tag sind 36 % der Fahrzeuge in A, 33 % in B und 31 % in C.





Alternativ kann man auch die Matrixpotenzen A^2, A^3 mit dem Startvektor multiplizieren, um die Zustandsvektoren der nächsten Tage zu erhalten.

Um die Verteilung auf lange Sicht zu berechnen, betrachtet man höhere Exponenten der Matrixpotenz. Es zeigt sich, dass es zwischen dem Zustand nach 20 Tagen (Mitte) bzw. 50 Tagen (rechts) kaum einen Unterschied gibt: ca. 38,9 % der Autos werden in A sein, ca. 27,8 % in B und ca. 33,3 % in C.



Übungsaufgaben

Bestimmen Sie die Verteilung der Leihautos für den Anfangszustand (1 ; 0 ; 0) [(0 ; 1 ; 0)].

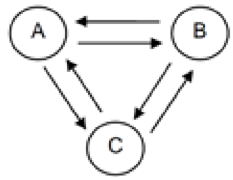
Gebiet: Matrizen (Lineare Algebra / Stochastik)	Einsatz ab Stufe 11

Übergangsmatrizen: Bestimmung von Zustandsvektoren (2) – Inverse Matrix

Beispiel-Aufgabe

Eine Mietwagenfirma hat Niederlassungen in drei Städten A, B, C. Durch die Matrix M wird der durchschnittliche tägliche Wechsel von Leihautos zwischen Niederlassungen beschrieben. Wir betrachten einen Anfangszustand von 30 % Pkw in A, 40 % in B, 30 % in C.

Wie kann man erschließen, welche Verteilung die Leihautos am Vortag auf die Niederlassungen hatten?



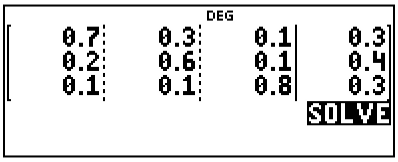
$$M = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}6 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}8 \end{pmatrix}$$

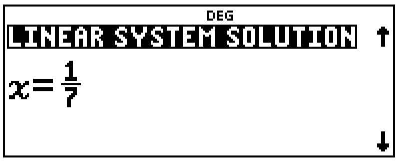
Erläuterung der Lösung

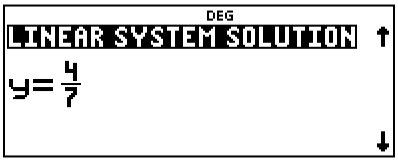
Gesucht ist nach Aufgabenstellung ein Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ mit $M * \vec{x} = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}6 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}8 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}3 \\ 0{,}4 \\ 0{,}3 \end{pmatrix}$

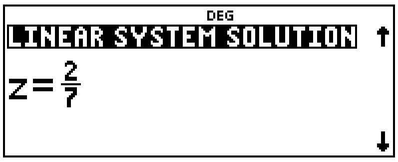
1. Methode: Die Matrix-Vektor-Gleichung kann als lineares 3x3-Gleichungssystem aufgefasst werden, das zu lösen ist. Dazu müssen die Koeffizienten im [sys-solv]-Menü eingeben werden.

Lösungsvektor: (1/7 ; 4/7 ; 2/7) ≈ (0,143 ; 0,571 ; 0,286).



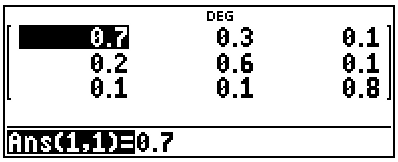


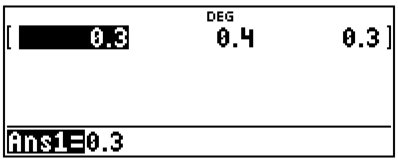


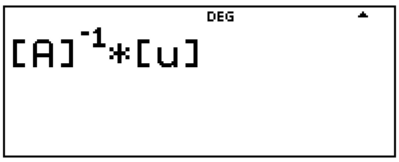


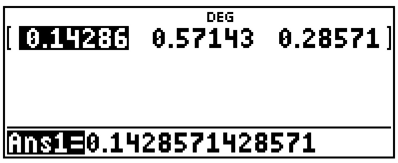
2. Methode: Man gibt zunächst Übergangsmatrix und Startvektor ein und bestimmt dann die inverse Matrix zur Übergangsmatrix und multipliziert diese mit dem gegebenen Startvektor.

Um die Umkehrmatrix zu bilden, wählt man unter NAMES zunächst den Namen der Matrix und drückt dann *entweder* die [$x^{\square}$]-Taste (Exponent: -1) *oder* wählt im MATH-Menü des [matrix]-Menüs die Option 3 (Inverse).









Übungsaufgaben

(1) Welche Probleme treten auf, wenn man die Verteilung am Vor-Vortag bestimmen möchte?

(2) Bestimmen Sie – falls möglich – den Zustandsvektor des Vortags für einen Startvektor (hier als Zeilenvektor notiert):

(a) (1 ; 0 ; 0) (b) (1/3 ; 1/3 ; 1/3) (c) (0,5 ; 0,25 ; 0,25) (d) (0,389 ; 0,278 ; 0,333)

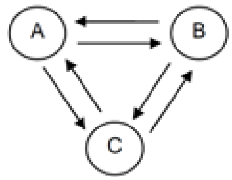
Gebiet: Matrizen (Lineare Algebra / Stochastik)	Einsatz ab Stufe 11

Übergangsmatrizen: Bestimmung von Zustandsvektoren (3) - Fixvektor

Beispiel-Aufgabe

Eine Mietwagenfirma hat Niederlassungen in drei Städten A, B, C. Durch die Matrix M wird der durchschnittliche tägliche Wechsel von Leihautos zwischen Niederlassungen beschrieben.

Gibt es eine optimale Verteilung der Leihautos auf die drei Niederlassungen, d. h. gibt es einen Zustand, der sich nicht ändert?



$$M = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}6 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}8 \end{pmatrix}$$

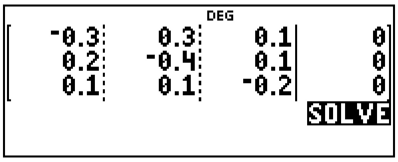
Erläuterung der Lösung

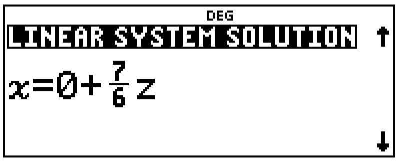
Gesucht ist nach Aufgabenstellung ein Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ mit $\begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}6 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}8 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

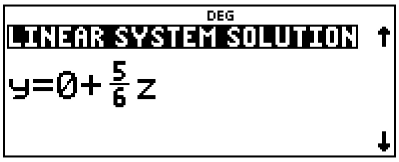
Dies ist ein lineares 3x3-Gleichungssystem. Bevor dieses gelöst werden kann, muss es umgeformt werden. Wir benutzen hier die Variablennamen x, y, z:

$$\left| \begin{array}{l} 0{,}7x + 0{,}3y + 0{,}1z = x \\ 0{,}2x + 0{,}6y + 0{,}1z = y \\ 0{,}1x + 0{,}1y + 0{,}8z = z \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{r} -0{,}3x + 0{,}3y + 0{,}1z = 0 \\ 0{,}2x - 0{,}4y + 0{,}1z = 0 \\ 0{,}1x + 0{,}1y - 0{,}2z = 0 \end{array} \right|$$

Die erweiterte Koeffizientenmatrix wird im [sys-solv]-Menü eingegeben. Man erhält unendlich viele Lösungen, die in Form einer Parameterdarstellung ausgegeben werden:







Das betrachtete lineare Gleichungssystem hat zwar unendlich viele Lösungen der Form (7/6 z ; 5/6 z ; z), aber hier im Sachzusammenhang gibt es tatsächlich eine eindeutige Lösung:

Denn für die Komponenten des Zustandsvektors muss gelten, dass ihre Summe gleich 1 (= 100 %) ist, d. h., es muss gelten: 7/6 z + 5/6 z + z = 1. Auflösen dieser linearen Gleichung nach z ergibt: z = 1/3. Einsetzen dieses Werts in den Lösungsvektor ergibt:

Es existiert ein stabiler Zustand des Systems: (7/18 ; 5/18 ; 6/18) ≈ (0,389 ; 0,278 ; 0,333).

Hinweise: Der Hauptsatz über reguläre MARKOFF-Ketten sagt aus, dass die Spaltenvektoren der Grenzmatrix M^{∞} gleich dem Fixvektor der Matrix M sind, vgl. Arbeitsblatt (1).

Man hätte die Gleichung x + y + z = 1 auch von vornherein berücksichtigen können, allerdings kann der TI-30X Pro MathPrint™ nur 3x3-Gleichungssysteme lösen.

Übungsaufgaben

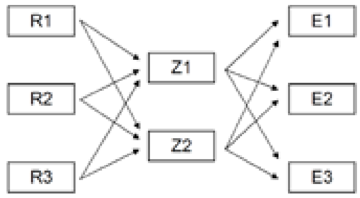
Bestimmen Sie den Fixvektor zur Matrix

(1) $M = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}6 \end{pmatrix}$ (2) $M = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}6 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}6 \end{pmatrix}$

Gebiet: Matrizen (Lineare Algebra / Stochastik)	Einsatz ab Stufe 11

Verflechtungsmatrizen: Bedarfsberechnungen

Beispiel-Aufgabe



Eine Firma stellt drei Endprodukte E1, E2 und E3 her, die sie aus angelieferten Zwischenprodukten Z1 und Z2 zusammenfügt. Der Hersteller der Zwischenprodukte wiederum benötigt hierfür drei Rohprodukte R1, R2 und R3.

Konkret bestehen folgende Beziehungen zwischen den Roh-, Zwischen- und End-Produkten: Z1 = 3 E1 + 5 E2 + 2 E3 (der Bedarf von Zwischenprodukt Z1 ergibt sich aus den Bedarfen der Endprodukte: 3 ME für E1, 5 ME für E2 und 2 ME für E3); außerdem: Z2 = 4 E1 + 1 E2 + 2 E3 ; R1 = 1 Z1 + 3 Z2; R2 = 3 Z1 + 4 Z2 ; R3 = 2 Z1 + 1 Z2.

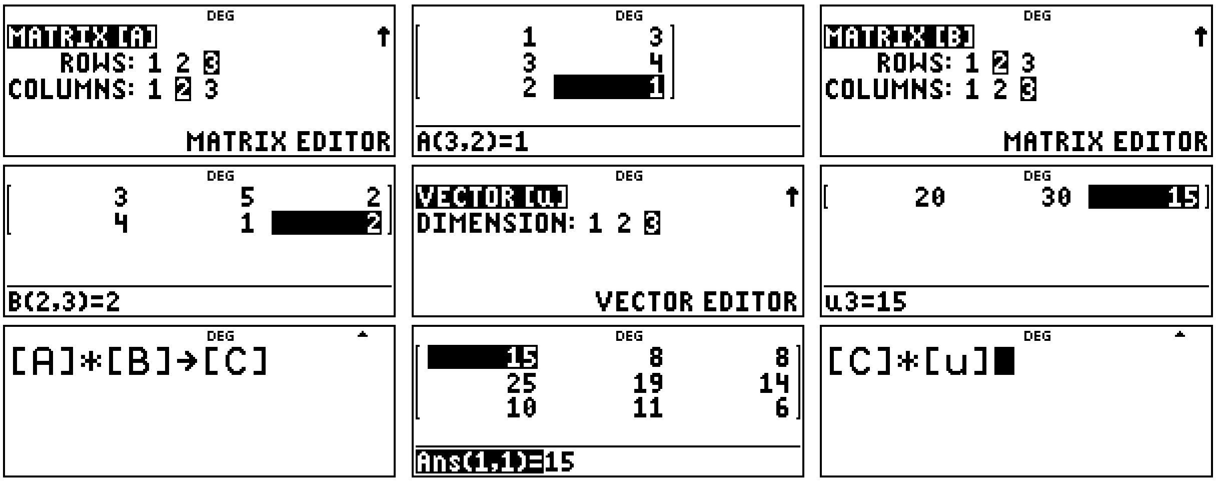
Bestimmen Sie die Bedarfsmatrizen für die beiden Produktionsstufen sowie die Bedarfsmatrix für den gesamten Produktionsprozess, wenn 20 ME des Endprodukts E1, 30 ME des Endprodukts E2 und 15 ME des Endprodukts E3 hergestellt werden sollen.

Erläuterung der Lösung

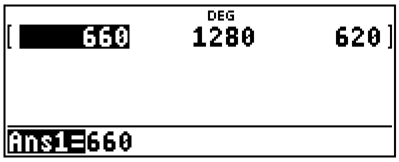
Die beiden Produktionsstufen lassen sich auch mithilfe von Bedarfsmatrizen beschreiben:

1. Produktionsstufe $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 3 & 4\\ 2 & 1\end{pmatrix}$; 2. Produktionsstufe $B=\begin{pmatrix}3 & 5 & 2\\ 4 & 1 & 2\end{pmatrix}$; Auftragsvektor $\vec{u}=\begin{pmatrix}20\\ 30\\ 15\end{pmatrix}$

Diese können jeweils über den Editor des Rechners eingegeben werden. Die Gesamtbedarfsmatrix C ergibt sich aus dem Produkt der beiden Matrizen A und B, der Gesamtbedarf aus dem Produkt von C mit dem Auftragsvektor.



Aus den Vorgaben ergibt sich also ein Gesamtbedarf von 660 ME des Rohstoffs R1, 1280 ME des Rohstoffs R2 und 620 ME des Rohstoffs R3.



Übungsaufgabe

Bestimmen Sie die Bedarfsmatrizen für eine Materialverflechtung, die durch die folgenden Gleichungen gegeben ist: Z1 = 4 E1 + 2 E2 + 1 E3; Z2 = 3 E1 + 2 E3 sowie R1 = 5 Z1 + 3 Z2; R2 = 1 Z1 + 2 Z2 ; R3 = 3 Z1 + 4 Z2.

Benötigt werden 12 ME des Endprodukts E1, 22 ME des Endprodukts E2 und 17 ME des Endprodukts E3. Bestimmen Sie den Gesamtbedarf an Rohstoffen R1, R2, R3.

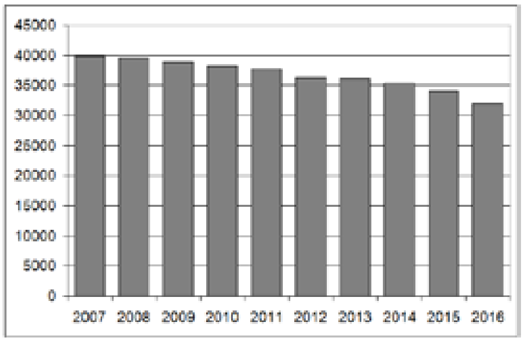
Gebiet: Beschreibende Statistik	Einsatz ab Stufe 8

Regressionsrechnung: Modellieren durch eine lineare Funktion (1)

Beispiel-Aufgabe

Nach Angaben der Deutschen Bundesbank nahm die Anzahl der Bankfilialen in Deutschland in den letzten Jahren kontinuierlich ab.

Geben Sie aufgrund der Entwicklung eine Prognose an für die Anzahl der Bankfilialen im Jahr 2025.



Jahr	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016
Anzahl	39833	39565	38881	38183	37719	36283	36196	35303	34045	32026

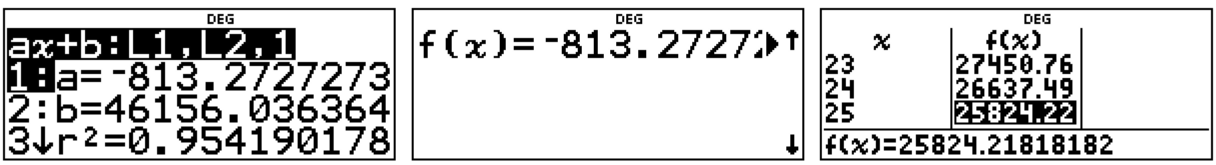
Erläuterung der Lösung

Die Daten werden nach Drücken der [data]-Taste in die beiden Listen L1 und L2 eingegeben; dann wird über das [stat-reg/distr]-Menü die Option 4 (LinReg) aktiviert, in der bestätigt wird, dass die Daten in den Listen L1 und L2 stehen und mit der Häufigkeit 1 (ONE) berücksichtigt sind.

Außerdem wird die Option aktiviert, dass der berechnete lineare Funktionsterm unter f(x) gespeichert wird (RegEQ→f(x)); dies geschieht, damit man anschließend über die Wertetabelle die Prognosewerte für kommende Jahre ablesen kann.

Die am besten zu den Daten passende lineare Funktion hat die Funktionsgleichung $f(x) \approx -813{,}3\,x + 46156$. Die gute Qualität der Anpassung lässt sich am Bestimmtheitsmaß r^2 ablesen, das nahe bei 1 liegt.

Um die Prognose vornehmen zu können, wird über die [table]-Taste die Wertetabelle aufgerufen. Da der Funktionsterm in der Form $f(x) = ax + b$ gespeichert wurde, muss er nicht eingegeben werden. Für das Jahr 2025 ergibt sich im linearen Modell die Prognose $f(25) \approx 25824$.



Übungsaufgabe

Die Anzahl der Insolvenzen von Unternehmen in Deutschland war in den letzten Jahren leicht rückläufig. Welche Prognose ergibt sich (gemäß linearem Modell) für das Jahr 2020?

Lineare Funktion: $f(x) \approx$

Jahr	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016		2020
Anzahl	32687	31998	30099	28297	25995	24085	23101	21518		?

Gebiet: Beschreibende Statistik	Einsatz ab Stufe 8

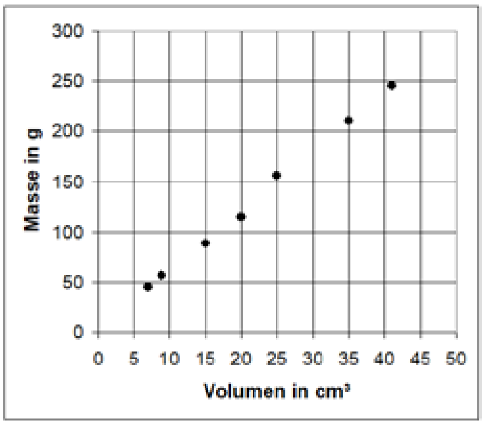
Regressionsrechnung: Modellieren durch eine lineare Funktion (2)

Beispiel-Aufgabe

Um die Dichte $\rho = \frac{m}{V}$ einer Metall-Legierung zu bestimmen, wird eine Messreihe durchgeführt.

Dazu werden verschiedene aus dieser Legierung bestehende Körper gewogen; mithilfe eines Überlaufgefäßes wird jeweils das Volumen bestimmt.

Volumen in cm³	7	9	15	20	25	35	41
Masse in g	45	56	88	115	156	211	245

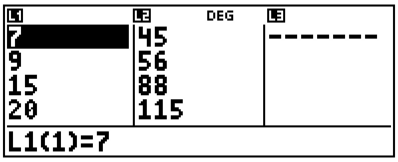


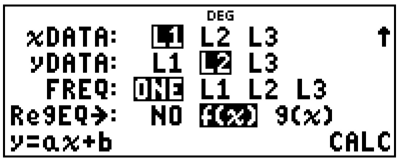
Erläuterung der Lösung

Die Daten werden nach Drücken der [data]-Taste in die beiden Listen L1 und L2 eingegeben; dann wird über das [stat-reg/distr]-Menü die Option 5 (PropReg) aktiviert, in der bestätigt wird, dass die Daten in den Listen L1 und L2 stehen und mit der Häufigkeit 1 (ONE) berücksichtigt sind.

Hier wird *nicht* die Option 4 (LinReg) gewählt, da die gesuchte lineare Funktion durch den Ursprung verlaufen muss (zu einer Masse von 0 g gehört ein Volumen von 0 cm³ und umgekehrt).

Dann wird die Option aktiviert, dass der berechnete lineare Funktionsterm unter f(x) gespeichert wird (RegEQ→f(x)); dies geschieht, damit man anschließend mithilfe der Wertetabelle ablesen kann.



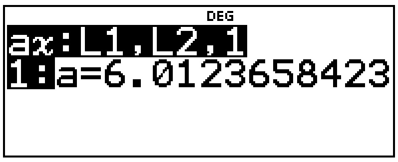


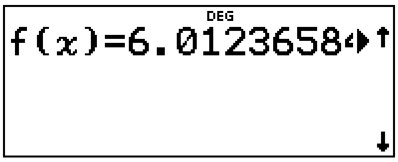
Die am besten zu den Daten passende lineare (proportionale) Funktion hat die Funktionsgleichung f(x) ≈ 6,01 · x.

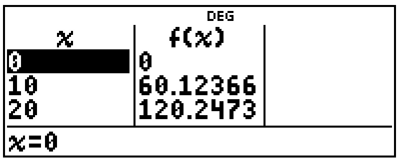
Die spezifische Dichte der untersuchten Metall-Legierung beträgt ca. 6,0 g/cm³.

(*Hinweis*: Bei dieser speziellen Regression wird kein Bestimmtheitsmaß angegeben.)

Um die Prognose vornehmen zu können, wird über die [table]-Taste die Wertetabelle aufgerufen. Da der Funktionsterm in der Form f(x) = a · x gespeichert wurde, muss er nicht eingegeben. werden. Die Wertetabelle rechts ist für eine Schrittweite von Δx = 10 g angelegt.







Übungsaufgabe

Führt selbst eine Messreihe zur Bestimmung der Dichte eines Stoffes durch, bei dem euch die Dichte nicht bekannt ist, beispielsweise für 10, 20, 30, … Glaskugeln (Murmeln), von denen man Masse und Volumen gut bestimmen kann.

Gebiet: Beschreibende Statistik	Einsatz ab Stufe 9

Regressionsrechnung: Modellieren durch eine quadratische Funktion

Beispiel-Aufgabe

Ein Basketballspieler wird beim Freiwurf-Training fotografiert. Legt man ein Koordinatensystem über die Bilder, dann stellt man fest: Der Ball wird in A (0 | 225) abgeworfen; die Mitte des Korbes ist in B (430 | 305). Aus den Fotos sind ungefähr die Punkte C (100 | 310), D (200 | 395), E (300 | 375) zu entnehmen (Angaben in cm).

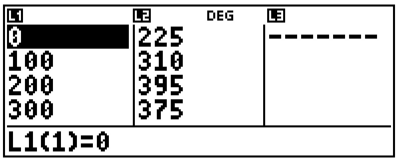
Bestimmen Sie eine quadratische Funktion, durch welche die Wurfparabel am besten beschrieben werden kann.

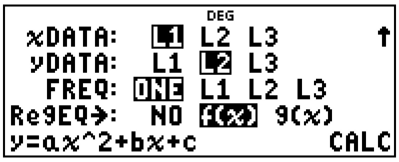
Erläuterung der Lösung

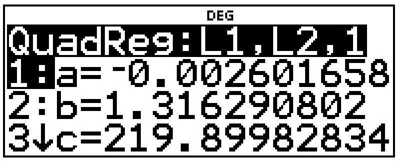
Die Daten werden nach Drücken der [data]-Taste in die beiden Listen L1 und L2 eingegeben; dann wird über [stat-reg/distr]-Menü die Option 7 (QuadraticReg) aktiviert, in der bestätigt wird, dass die Daten in den Listen L1 und L2 stehen und mit der Häufigkeit 1 (ONE) berücksichtigt.

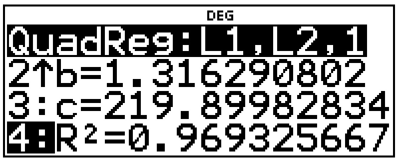
Außerdem wird die Option aktiviert, dass der berechnete quadratische Funktionsterm unter f(x) gespeichert wird (RegEQ→f(x)); dies geschieht, damit man auch Zwischenwerte ablesen kann.

Die am besten zu den Daten passende quadratische Funktion hat die Funktionsgleichung $f(x) \approx -0{,}0026x^2 + 1{,}316\,x + 219{,}9$. Die gute Qualität der Anpassung lässt sich am Bestimmtheitsmaß R^2 ablesen, das nahe bei 1 liegt.

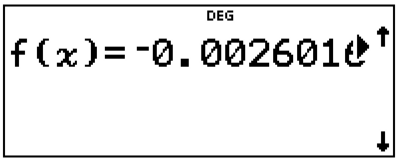


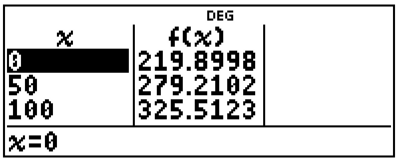


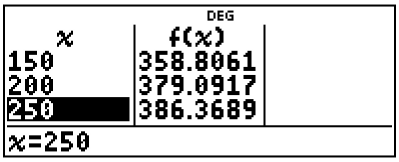




Um weitere Punkte der Flugkurve ablesen zu können, wird über die [table]-Taste die Wertetabelle aufgerufen. Da der Funktionsterm in der Form $f(x) = ax^2 + bx + c$ gespeichert wurde, muss er nicht eingegeben werden.







Übungsaufgabe

(1) Durch drei Punkte ist eine quadratische Parabel eindeutig bestimmt. Bestimmen Sie die Gleichung mithilfe einer quadratischen Regression.

(a) P_1 (-2 | 5); P_2 (0 | -1); P_3 (3 | 8) (b) P_1 (-2 | -3); P_2 (1 | 1); P_3 (5 | 0)

(2) Ein Ball wird aus einer Höhe von 8 m über der Straßenebene waagerecht aus einem Fenster geworfen. Er trifft in 10 m Entfernung von der Hauswand auf dem Boden auf.

Bestimmen Sie die Gleichung der Wurfparabel mithilfe einer quadratischen Regression.

Gebiet: Beschreibende Statistik	Einsatz ab Stufe 10

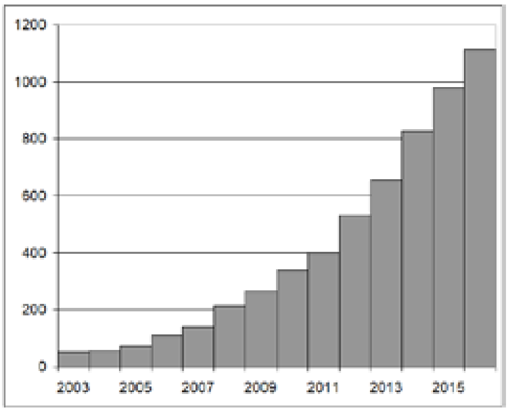
Regressionsrechnung: Modellieren durch eine Exponentialfunktion

Beispiel-Aufgabe

Nach Angaben der des Vereins *Transfair* entwickelte sich der Umsatz von fair gehandelten Artikeln in Deutschland, wie aus den folgenden Daten ersichtlich ist (Angaben in Mio. €).

Geben Sie eine Prognose für 2025 ab!

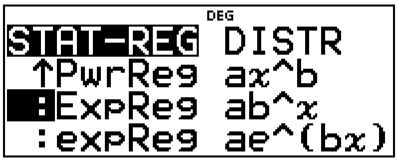
Jahr	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
Umsatz	51	58	72	110	142	213	267
Jahr	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016
Umsatz	340	400	533	654	827	978	1115

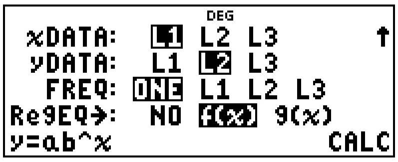


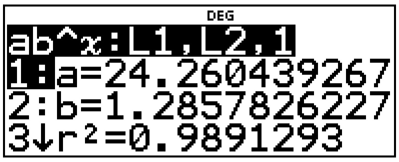
Erläuterung der Lösung (Modellieren mit einer linearen Funktion wird als bekannt vorausgesetzt)

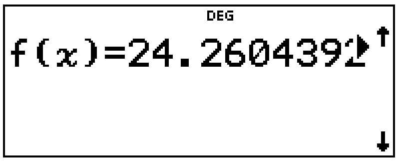
Im Schulrechner werden zwei Möglichkeiten der exponentiellen Regression angeboten: zum einen zu einer durch Regression ermittelten geeigneten Basis b, zum anderen zur natürlichen Exponentialfunktion (Basis e = 2,71828…).

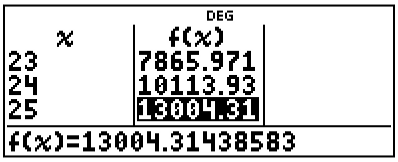
1. Möglichkeit: Die Anpassung durch eine exponentielle Funktion mit $y \approx 24{,}26 \cdot 1{,}286^x$ hat das Bestimmtheitsmaß $r^2 \approx 0{,}9891$ und ermöglicht die Prognose $f(25) \approx 13$ Mio. €.



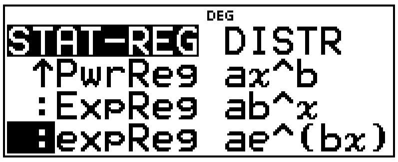


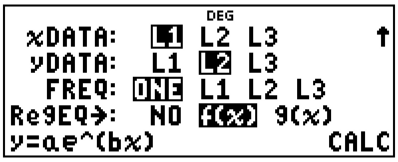


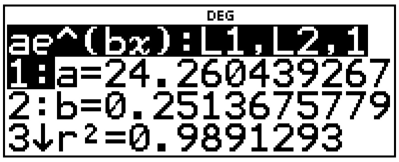




2. Möglichkeit: Die Anpassung durch eine exponentielle Funktion mit $y \approx 24{,}26 \cdot e^{0{,}2514 \cdot x}$ hat dasselbe Bestimmtheitsmaß $r^2 \approx 0{,}9891$ und ermöglicht dieselbe Prognose, denn $e^{0{,}2514} \approx 1{,}286$.







Übungsaufgabe

Die folgenden Daten zeigen die Entwicklung der insgesamt in Deutschland installierten Photovoltaikanlagen (Leistung in GigaWatt).

Zeichnen Sie das zugehörige Säulendiagramm. Geben Sie mithilfe einer exponentiellen Regression eine Prognose ab für die Entwicklung bis zum Jahr 2020.

Jahr	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016
Leistung	2,90	4,17	6,12	10,57	17,94	25,43	33,03	36,34	38,24	39,74	41,27

Gebiet: Beschreibende Statistik	Einsatz ab Stufe 10

Regressionsrechnung: Modellieren einer antiproportionalen Beziehung

Beispiel-Aufgabe

Gemäß dem Boyle-Mariotte'schen Gesetz besteht zwischen dem Gasdruck p und dem Volumen V einer eingeschlossenen Gasmenge eine *antiproportionale* Beziehung (Voraussetzung: Die Temperatur wird konstant gehalten – sog. isotherme Zustandsänderung), d. h., es gibt eine von der Versuchssituation abhängige Konstante C, sodass gilt

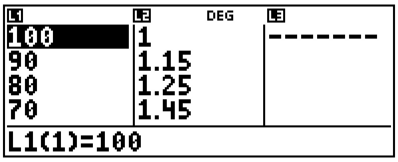
$$p = C \cdot \frac{1}{V}$$

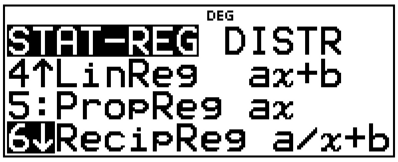
Bei einer Messreihe ergaben sich folgende Messwerte. Untersuchen Sie, ob die Messwerte geeignet sind, die Gesetzmäßigkeit zu bestätigen.

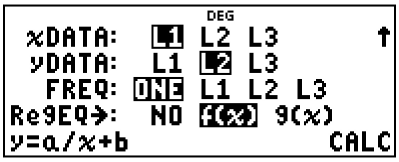
Volumen (in ml)	100	90	80	70	60	50	40	30	20
Druck (in bar)	1,0	1,15	1,25	1,45	1,7	2,0	2,55	3,4	5,0

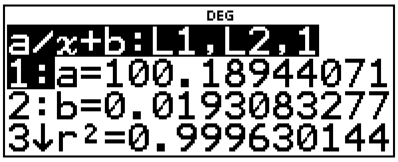
Erläuterung der Lösung (Modellieren mit einer linearen Funktion wird als bekannt vorausgesetzt)

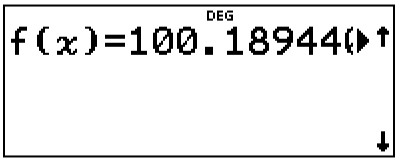
Mithilfe der Option 6 (RecipReg) im [stat-reg/distr]-Menü erhalten wir als Näherungsfunktion y ≈ 100/x + 0,02; diese hat das Bestimmtheitsmaß r² ≈ 0,9996 und ermöglicht die Berechnung von Zwischenwerten, z. B. f(25) ≈ 4,03.

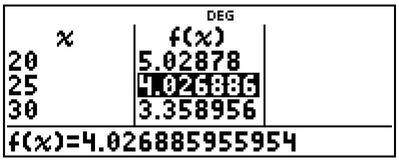








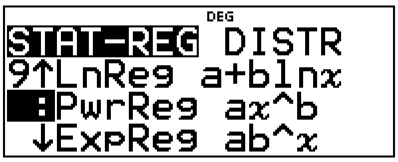


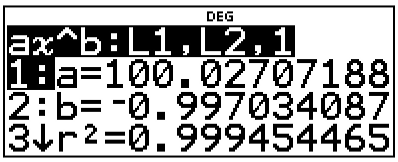


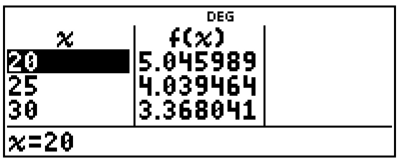
Bei einer antiproportionalen Beziehung darf aber kein additives Glied (hier + 0,02) auftreten; die Option RecipReg passt also nur eingeschränkt zur Modellierung.

Besser geeignet ist eine Modellierung mithilfe einer Potenzfunktion (mit negativem Exponenten).

Wie aus den folgenden screenshots ersichtlich wird, ergibt sich y ≈ 100 · $x^{-0,997}$ in guter Näherung zum Gesetz.







Übungsaufgabe

Der ohmsche Widerstand R eines elektrischen Leiters der Länge ℓ ist umgekehrt proportional zur Querschnittsfläche A des Leiter (also quadratisch reziprok zum Durchmesser d des Leiters): $R = \rho \cdot \frac{l}{A} = C \cdot \frac{1}{d^2}$. Führen Sie eine entsprechende Messreihe durch und werten Sie diese mithilfe der Option PwrReg.

Gebiet: Stochastik | Einsatz ab Stufe 9

Binomialkoeffizienten – Gewinnwahrscheinlichkeiten beim Lottospiel *‚6 aus 49'*

Beispiel-Aufgabe

(1) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Lottoziehung des Spiels ‚*6 aus 49'* zwei der sechs Glückszahlen gerade Zahlen sind?

(2) Bestimmen Sie die allgemein die Verteilung der Zufallsgröße X: *Anzahl der geraden Glückszahlen beim Lottospiel ‚6 aus 49'* .

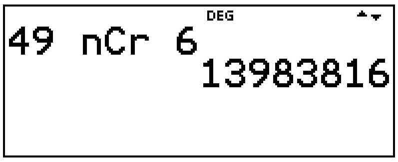
Erläuterung der Lösung

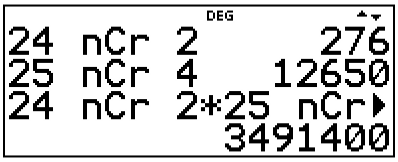
Mit der [! nCr nPr]-Taste können verschiedene kombinatorische Terme aufgerufen werden. Um einen Binomialkoeffizienten wie z. B. ${}_{49}C_6 = \binom{49}{6}$ zu berechnen, muss man zunächst die Zahl 49 eingeben, dann die [! nCr nPr]-Taste (zweimal) tippen und schließlich die Zahl 6 eingeben. Der TI-Schulrechner zeigt, dass es 13.983.816 Möglichkeiten gibt , 6 aus 49 Kugeln auszuwählen.

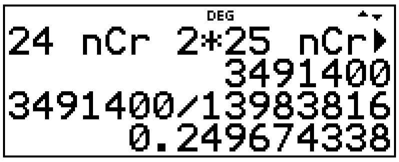
(1) Unter den 49 natürlichen Zahlen in der Menge {1, 2, …, 49} sind 24 gerade und 25 ungerade.

Für den speziellen Fall von *zwei* geraden und *vier* ungeraden Glückszahlen gibt es

${}_{24}C_2 \cdot {}_{25}C_4 = \binom{24}{2} \cdot \binom{25}{4} = 276 \cdot 12.650 = 3.491.400$ Möglichkeiten der Kombination. Daher ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass zwei der sechs Glückszahlen gerade sind, ungefähr 25 %.





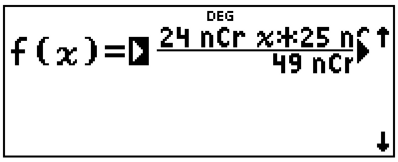


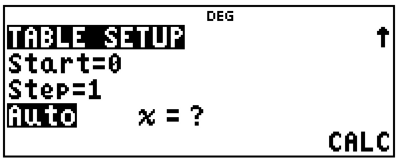
(2) Allgemein erhält man die Wahrscheinlichkeit für genau k gerade Glückszahlen mithilfe des rechts stehenden Terms.

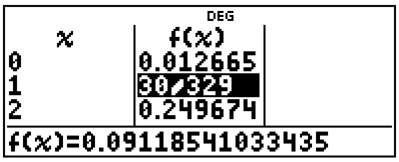
$$P(X = k) = \frac{\binom{24}{k} \cdot \binom{25}{6-k}}{\binom{49}{6}}$$

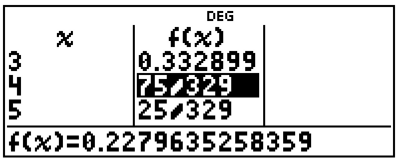
Einen solchen Term kann man auf dem TI-Schulrechner als Funktionsterm mit der Variablen x statt k eingeben.
(*Hinweis*: (6-x) muss in Klammern gesetzt werden)

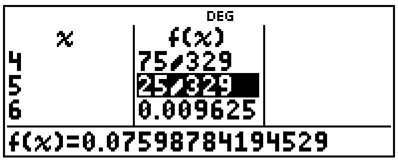
Die in der Wertetabelle auftretenden Brüche können durch Drücken der [◂▸≈]-Taste als Dezimalzahlen angezeigt werden.











Übungsaufgaben

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße
X: *Anzahl der Richtigen beim Lottospiel ‚6 aus 49'*.

Gebiet: Stochastik | Einsatz ab Stufe 10

Bestimmen einer Binomialverteilung (vollständige Verteilung)

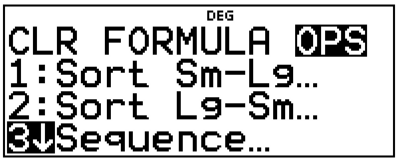
Beispiel-Aufgabe

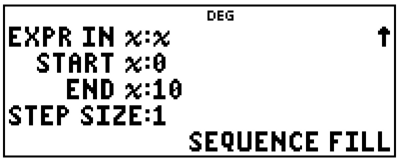
Bestimmen Sie die Verteilung der Zufallsgröße X: *Anzahl der Sechsen beim 10-fachen Würfeln*

Erläuterung der Lösung

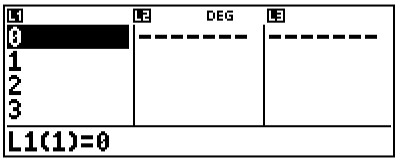
Der TI-Schulrechner bietet zwei Möglichkeiten, einer Binomialverteilung zu bestimmen und anzuzeigen: (1) Die Verteilung kann im [stat-reg/distr]-Menü aufgerufen werden oder (2) mithilfe der BERNOULLI-Formel als Wertetabelle einer Funktion berechnet werden.

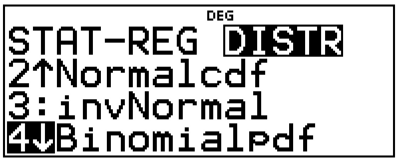
(1) Um eine Tabelle mit den Werten der Binomialverteilung anzulegen, muss zunächst die erste Spalte mit den Zahlen 0, 1, 2, …, n belegt werden (Maximalwert n = 49). Dies geschieht mithilfe der Option 3 im [data]-Menü (Sequence). Die Folge mit dem Folgenterm „x" durchläuft die natürlichen Zahlen von 0 bis 10 und wird in Liste L1 abgespeichert.

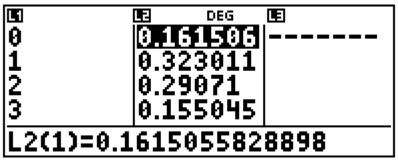


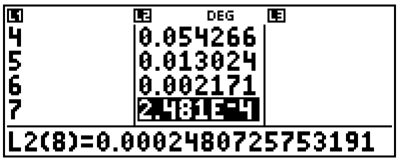


Dann ruft man im [stat-reg/distr]-Menü die Option Binomialpdf auf und wählt dann die Option ALL, gibt die Parameter ein (n = 10, p = 1/6) und legt fest, dass die Wahrscheinlichkeiten in Liste L2 abgespeichert werden. Die Wahrscheinlichkeiten werden in der Liste 6-stellig angezeigt; in der Anzeige im Display unten sind jeweils 13 Stellen ablesbar.



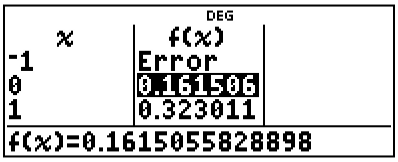


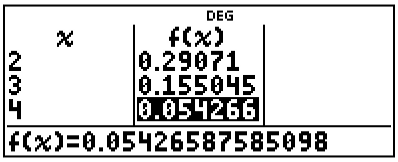




(2) Bei der anderen Möglichkeit gibt man den Term der BERNOULLI-Formel (vgl. rechts wobei x statt k als Variable einzugeben ist) über die [table]-Option als f(x) ein und kann die Wahrscheinlichkeiten in der Wertetabelle anschauen.

$$P(X=k)=\binom{10}{k}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{k}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{10-k}$$





Übungsaufgaben

(1) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X: *Anzahl der Wappen beim 20-fachen Münzwurf.*

(2) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X: *Anzahl der Erfolge beim 12-stufigen BERNOULLI-Versuch mit p = 0,3.*

Gebiet: Stochastik	Einsatz ab Stufe 10

Bestimmen einer Binomialverteilung (einzelne Werte)

Beispiel-Aufgabe

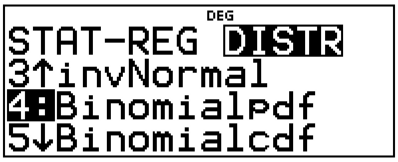
200 Rosinen werden zufällig in den Teig von 100 Rosinenbrötchen verteilt. Ein Rosinenbrötchen wird zufällig ausgewählt.

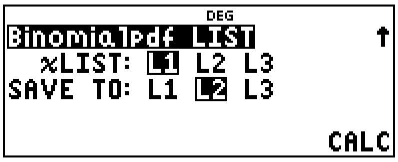
Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist in diesem Brötchen keine Rosine, genau eine Rosine, zwei Rosinen, drei, vier, mehr als vier Rosinen?

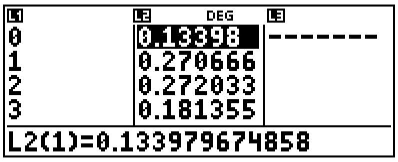
Erläuterung der Lösung

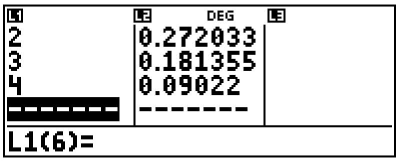
Die Berechnung von mehreren einzelnen Wahrscheinlichkeiten der Binomialverteilung ist über das [stat-reg/distr]-Menü aufrufbar; dort kann man u. a. die Option LIST aufrufen. Man wählt dann die Option LIST und gibt als Liste L1 die interessierenden Werte (0, 1, 2, 3, 4) ein.

Den Vorgang kann man als 200-stufigen BERNOULLI-Versuch mit Erfolgswahrscheinlichkeit p = 1/100. Die interessierenden Einzelwahrscheinlichkeiten werden in Liste L2 (6-stellig) angezeigt; in der Anzeige im Display unten sind jeweils 13 Stellen ablesbar.

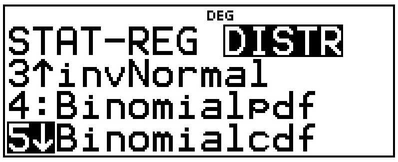


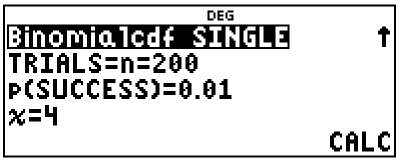


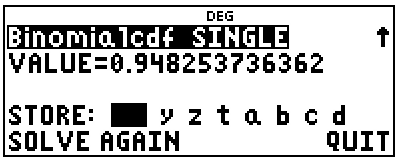




Bestimmung von P(X > 4): Statt die berechneten 5 Wahrscheinlichkeiten zu addieren, benutzen wir die kumulierte Binomialverteilung (Option 5), um den Wert P(X ≤ 4) zu ermitteln und hieraus dann P(X > 4) = 1 – P(X ≤ 4) ≈ 1 – 0,9483 = 0,0517 zu bestimmen.







Übungsaufgaben

(1) Eine Schule wird von 800 Schülern/innen besucht. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat keine Person, eine, zwei, drei, mehr als drei Schüler/innen an einem bestimmten Tag Geburtstag?

Modellierungsannahme: Die Wahrscheinlichkeit ist für alle Tage des Jahres gleich groß:
p = 1/365 ; Schaltjahre werden nicht berücksichtigt.

(2) Ein Rouletterad (bestehend aus 37 gleich großen Sektoren) wird 50-mal gedreht.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird die Kugel auf einem bestimmten Feld, keinmal, einmal, zweimal, mehr als zweimal liegen bleiben?

Gebiet: Stochastik	Einsatz ab Stufe 10

Berechnung des Erwartungswerts und der Varianz von Binomialverteilungen (1)

Beispiel-Aufgabe

Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz der Binomialverteilungen mit
n = 40 und p = 0,25 gemäß Definiton.

Erläuterung der Lösung

Gemäß Definition des Erwartungswerts $\mu = E(X)$ bzw. der Varianz $V(X) = \sigma^2$ gilt:

$E(X) = \sum_{k=0}^{n} k \cdot P(X = k)$ und $V(X) = \sum_{k=0}^{n} (k - \mu)^2 \cdot P(X = k)$ wobei $P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

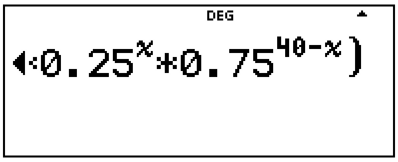
1. Möglichkeit der Berechnung:

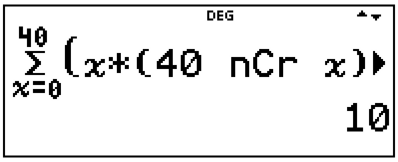
Die Summenfunktion des TI-Schulrechners bietet die Möglichkeit, auch Summen mit vielen Summanden zu berechnen.

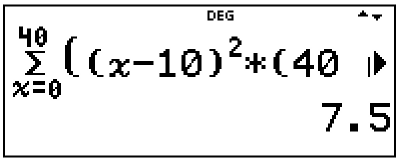
Wählt man Option 5 im [math]-Menü, dann erscheint das Summensymbol Σ .

Hier gibt man die o. a. Terme für n = 40 und p = 0,25 (also 1 – p = 0,75) ein.

Als Ergebnis erhält man $\mu = E(X) = 10$ und $\sigma^2 = V(X) = 7{,}5$.

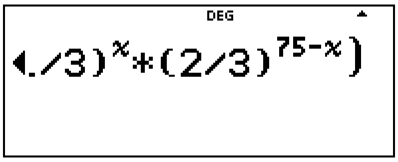


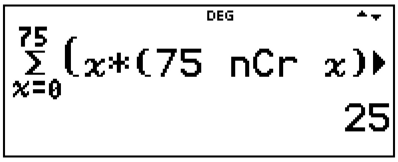


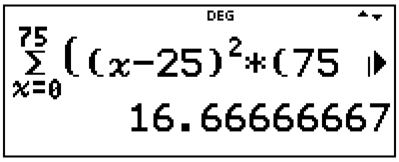


Wenn man die Parameter ändern möchte, muss man nur die o. a. Formeln wieder aufrufen und entsprechend beim Durchlaufen durch die Terme die Parameter abändern.

2. Beispiel: n = 75 (statt n = 40) und p = 1/3 (statt p = 0,25): E(X) = 25 und V(X) = 50/3.







Übungsaufgaben

Wie hängen die Werte von E(X) und V(X) von den Parametern n und p ab?

Stellen Sie Vermutungen auf und prüfen Sie diese.

n	p	E(X)	Vermutung	V(X)	Vermutung
48	1/4				
72	1/3				
40	0,3				
50	0,2				
60	0,4				

Gebiet: Stochastik	Einsatz ab Stufe 10

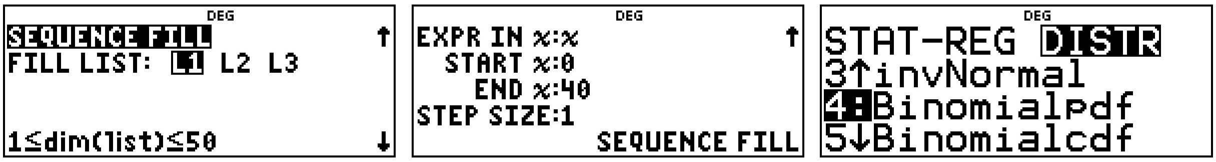
Berechnung des Erwartungswerts und der Varianz von Binomialverteilungen (2)

Beispiel-Aufgabe

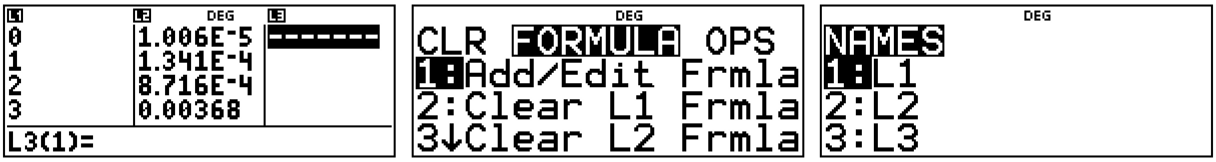
Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz der Binomialverteilungen mit $n = 40$ und $p = 0{,}25$ gemäß Definiton.

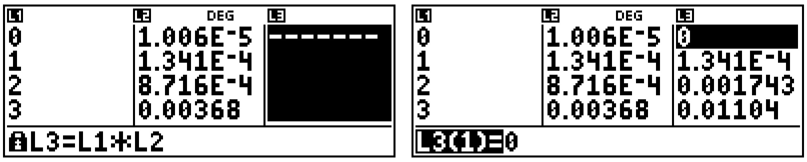
Erläuterung der Lösung – 2. Möglichkeit der Berechnung (nur möglich, falls $n \leq 49$):

Alternativ kann man die betrachtete Binomialverteilung in Form von Listen speichern: zunächst mithilfe einer Folge die natürlichen Zahlen von 0 bis 40 in Liste L1 eintragen, dann mithilfe der BERNOULLI-Formel die Wahrscheinlichkeiten für k Erfolge ($k = 0, 1, 2, \ldots, 40$) in Liste L2.

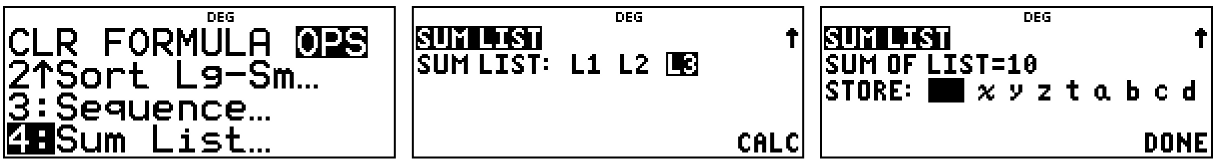


Dann werden die Zellen von L3 mit dem jeweiligen Produkt der Elemente von L1 und L2 gefüllt. Dazu muss man in Liste L3 gehen, die FORMULA-Option von [data] auswählen und dann die Formel L1*L2 eingeben (die Namen L1, L2 werden beim Anklicken von [data] jeweils angeboten).

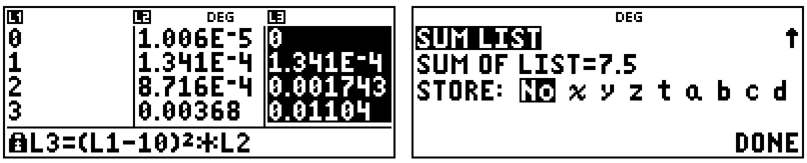




Schließlich berechnet man mit Sum List im [data]-Menü die Summe von Liste L3: E(X) = 10



Analog verfährt man mit der Berechnung der Varianz: V(X) = 7,5.



Übungsaufgaben

Berechnen Sie mithilfe dieser Methode Erwartungswert und Varianz für $n = 24$ und $p = 1/3$.

Gebiet: Stochastik | Einsatz ab Stufe 10

Optimierung der Annahme von Flugbuchungen

Beispiel-Aufgabe

Wegen der Kapazität der eingesetzten Flugzeuge können für eine bestimmte Flugverbindung im Inland maximal 150 Plätze gebucht werden. Dennoch nimmt die Fluggesellschaft mehr Buchungen an, da im Mittel 10 % der Buchungen nicht wahrgenommen werden. An jeder Buchung verdient die Fluggesellschaft 30 € (auch bei den Fluggästen, die nicht erscheinen, denn diese müssen eine *No-Show*-Gebühr zahlen). Falls eine Buchung angenommen wurde, aber der Passagier nicht mitfliegen kann, muss nach EU-Recht eine Entschädigung von 250 € gezahlt werden.

a) Berechnen Sie den zu erwartenden Gewinn bei Annahme von 160 Buchungen.

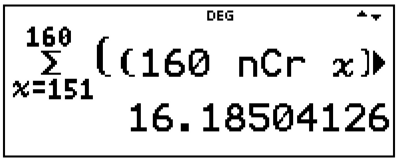
b) Bei welcher Anzahl von Buchungen ist der Gewinn die Fluggesellschaft maximal?

Erläuterung der Lösung

a) Wenn 160 Buchungen angenommen werden, muss mit Wahrscheinlichkeit P(X = 151) ein Betrag von 250 € als Entschädigung gezahlt werden, mit Wahrscheinlichkeit P(X = 152) ein Betrag von 500 €, … und mit Wahrscheinlichkeit P(X = 160) ein Betrag von 2500 €, insgesamt

$$\sum_{k=151}^{160} \binom{160}{k} \cdot 0{,}9^k \cdot 0{,}1^{160-k} \cdot (k-150) \cdot 250 \approx 16{,}19$$

Im Mittel müsste also bei Annahme von 160 Buchungen ein Betrag von 16,19 € an Entschädigungen gezahlt werden, d. h. der Gewinn beträgt 160 · 30 € – 16,19 € = 4783,81 €.

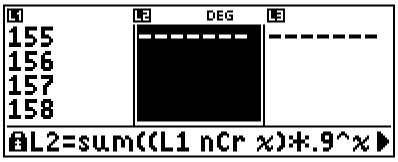


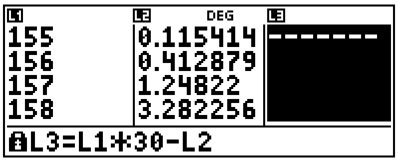
b) Es wäre nun lästig, alle interessierenden Werte von n in den Summenterm einzutippen und die so berechneten Daten in einer Tabelle zu erfassen. Hierzu kann man die Option der Listenformeln benutzen, die man über das [data]-Menü ansteuern kann ([data] doppelt anklicken):

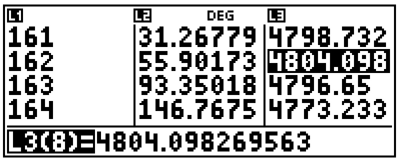
Man gibt interessierende Werte für n in die Liste L1 (z. B. 155, 156, …, 165) ein und definiert dann für L2 eine Formel; anstelle des Summenzeichens verwendet man den „sum"-Befehl aus dem [math]-Menü, bei dem nacheinander der Summenterm, der Name der Variablen, der kleinste und der größte Wert von x eingegeben werden müssen:

L2 = Sum(L1 nCr x * 0.9^x * 0.1^(L1-x)*(x – 150)*250 , x , 151 , L1)

Nachdem wir so die zu erwartenden Entschädigungsbeträge berechnet haben, können wir zur Berechnung des Gewinns kommen; dazu definieren wir die Listenformel L3 = L1*30 – L2







Wir lesen ab: Bei der Annahme von 162 Buchungen ist der Gewinn am größten (4804,10 €).

Übungsaufgaben

(1) Welche Anzahl von Buchungen wäre optimal, wenn die Entschädigung auf 300 € erhöht würde [nur 150 € gezahlt werden müssen]?

(2) Wie verändert sich die Rechnung, wenn der Gewinn pro Buchung 25 € beträgt?

Gebiet: Stochastik	Einsatz ab Stufe 10

Bestimmen von Intervall-Wahrscheinlichkeiten bei einer Binomialverteilung (1)

Beispiel-Aufgabe

64 % der Haushalte in Deutschland verfügen über einen digitalen Fotoapparat. Mit welcher Wahrscheinlichkeit würde man bei einer Zufallsstichprobe in 500 Haushalten in

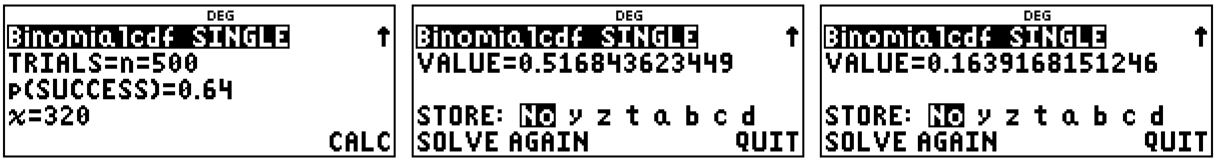
(1) höchstens 320 (2) weniger als 310 (3) mindestens 315
(4) mehr als 330 (5) mindestens 312, höchstens 325

Haushalten einen solchen Fotoapparat finden?

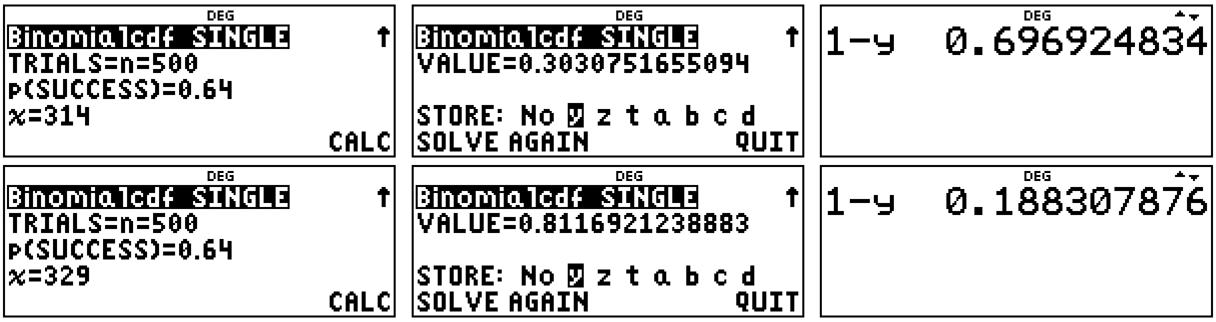
Erläuterung der Lösung

Die Berechnung von Intervall-Wahrscheinlichkeiten der Binomialverteilung ist mithilfe der Option 5 (Binomialcdf) im [stat-reg/distr]-Menü aufrufbar. Die berechneten Wahrscheinlichkeiten können abgespeichert werden, was für die Lösung von Aufgabe (3) – (5) wichtig ist:

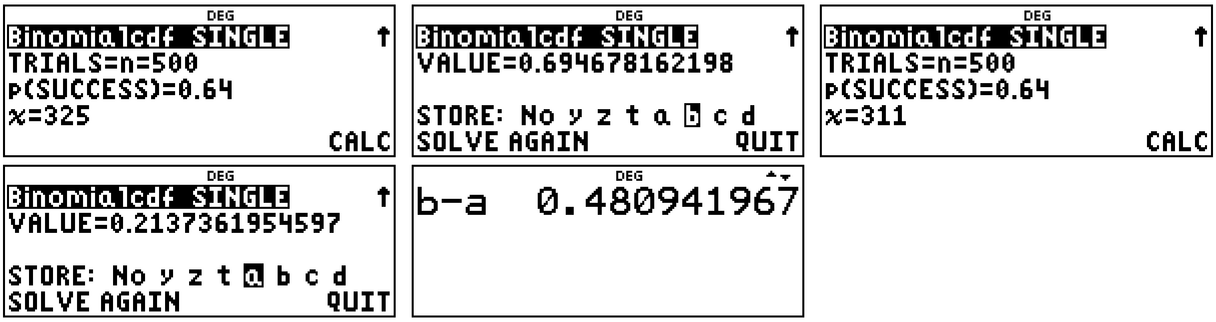
(1) $P(X \leq 320) = 0{,}5168$; (2) $P(X < 310) = P(X \leq 309) = 0{,}1639$



(3) $P(X \geq 315) = 1 - P(X \leq 314) = 0{,}6969$; (4) $P(X > 330) = 1 - P(X \leq 329) = 0{,}1640$



(5) $P(312 \leq X \leq 325) = P(X \leq 325) - P(X \leq 311) = 0{,}6947 - 0{,}2137 = 0{,}4809$ (wegen Rundung)



Übungsaufgaben

Eine Münze wird 400-mal geworfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Anzahl der Wappen

(1) größer als 200
(2) mindestens gleich 205
(3) mindestens gleich 180, höchstens gleich 205
(4) größer als 185, aber kleiner als 207
(5) höchstens gleich 190
(6) kleiner als 215

Gebiet: Stochastik	Einsatz ab Stufe 10

Bestimmen von Intervall-Wahrscheinlichkeiten bei einer Binomialverteilung (2)

Beispiel-Aufgabe

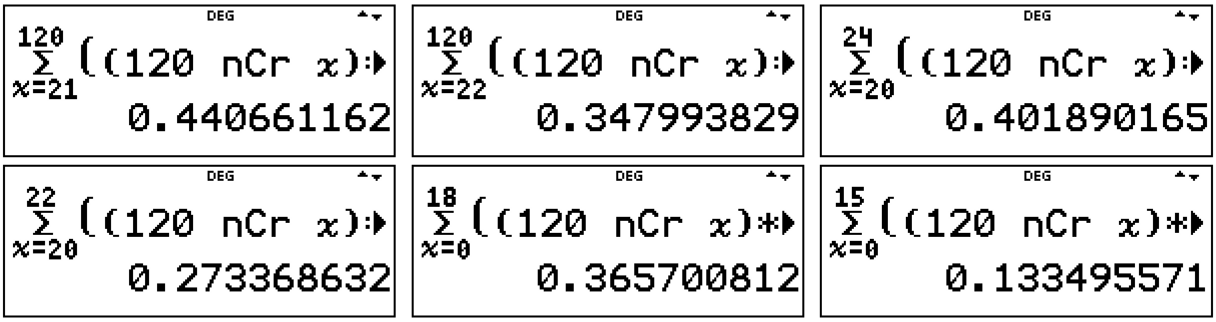
Ein Würfel wird 120-mal geworfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Anzahl der Sechsen

(1) größer als 20
(2) mindestens gleich 22
(3) mindestens gleich 20, höchstens gleich 24
(4) größer als 19, aber kleiner als 23
(5) höchstens gleich 18
(6) kleiner als 16

Erläuterung der Lösung

Mit etwas größerem Zeitaufwand können die Intervall-Wahrscheinlichkeiten mithilfe der Summenfunktion gemäß BERNOULLI-Formel berechnet werden: $P(X=k)=\binom{120}{k}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{k}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{120-k}$

(1) $P(X > 20) = P(21 \le X \le 120) \approx 0{,}441$; (2) $P(X \ge 22) = P(22 \le X \le 120) \approx 0{,}348$;
(3) $P(20 \le X \le 24) \approx 0{,}402$; (4) $P(19 < X < 23) = P(20 \le X \le 22) \approx 0{,}273$;
(5) $P(X \le 18) = P(0 \le X \le 18) \approx 0{,}366$; (6) $P(X < 16) = P(0 \le X \le 15) \approx 0{,}133$



Wahrscheinlichkeitsberechnungen mithilfe der BERNOULLI-Formel sind möglich, solange der größte auftretende Binomialkoeffizient der Wahrscheinlichkeitsverteilung kleiner ist als 10^{100}; dies ist für n = 336 der Fall: $\binom{336}{168} \approx 6\cdot 10^{99}$.

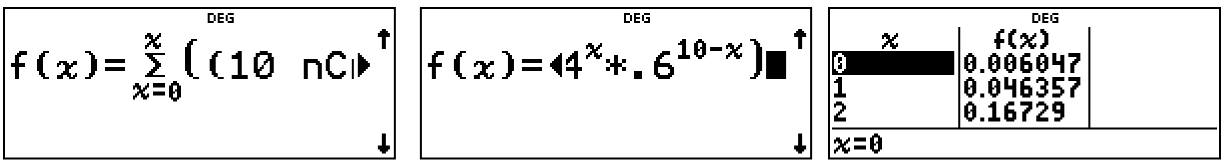
Übungsaufgaben

(1) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Anzahl der Wappen beim 200-fachen Münzwurf

(a) größer als 100
(b) mindestens gleich 95
(c) mindestens gleich 90, höchstens gleich 105
(d) größer als 92, aber kleiner als 103
(e) höchstens gleich 98
(f) kleiner als 103

(2) Mithilfe des table-Menüs kann man eine Funktion definieren und deren Werte in der Wertetabelle ablesen. Dies ist auch mit dem TI-Schulrechner möglich.

Welche Funktion ist aus den folgenden Screenshots ablesbar? (Was irritiert ein bisschen?)



Gebiet: Stochastik | Einsatz ab Stufe 11

Bestimmen von 95 %- Umgebungen um den Erwartungswert (sigma-Regel)

Beispiel-Aufgabe

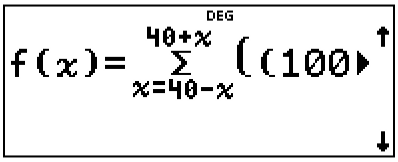
Bestimmen Sie symmetrische Umgebungen um den Erwartungswert $\mu = n \cdot p$ derart, dass diese eine Wahrscheinlichkeit von ungefähr 95 % haben.

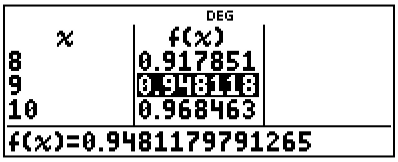
(1) n = 100; p = 0,4 (2) n = 140; p = 0,5 (3) n = 150; p = 0,3 (4) n = 200; p = 0,25

Berechnen Sie auch jeweils die zugehörige Standardabweichung und geben Sie den Radius der Umgebung als Vielfaches der Standardabweichung an. Welche Gesetzmäßigkeit fällt auf?

Erläuterung der Lösung

Mithilfe der Summenfunktion kann man Wahrscheinlichkeiten von symmetrischen Umgebungen um den Erwartungswert berechnen. Definiert man für ein konkretes n die Funktion f wie folgt: $f(x) = \sum_{k=\mu-x}^{\mu+x} \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$ dann zeigt die Wertetabelle beispielsweise für p = 0,4 und n = 100: f(0) = P(X = 40) ≈ 0,081; f(1) = P(39 ≤ X ≤ 41) ≈ 0,240 usw.

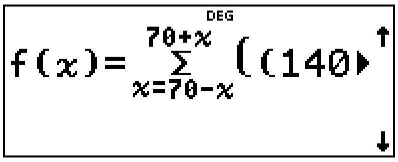


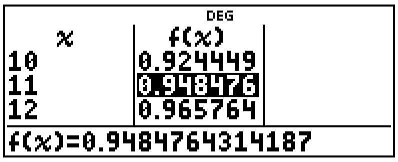


n = 100; p = 0,4; μ = 40:

P(31 ≤ X ≤ 49) ≈ 95 %

Radius ≈ 9,5

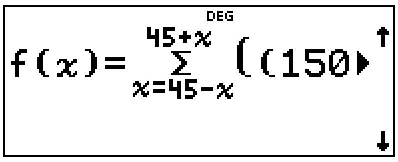


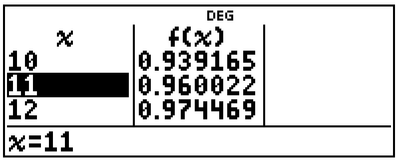


n = 140; p = 0,5; μ = 70:

P(59 ≤ X ≤ 81) ≈ 95 %

Radius ≈ 11,5

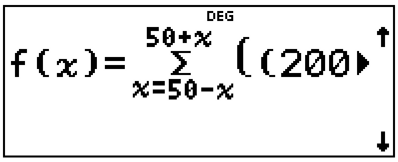


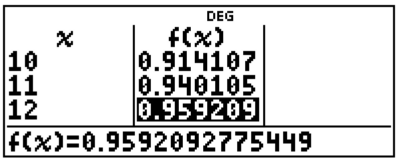


n = 150; p = 0,3; μ = 45:

P(34 ≤ X ≤ 56) ≈ 95 %

Radius ≈ ½ · (10,5 + 11,5) = 11





n = 200; p = 0,25; μ = 50:

P(38 ≤ X ≤ 62) ≈ 95 %

Radius ≈ ½ · (11,5 + 12,5) = 12

Beispiel: n = 100; p = 0,4 ; P(31 ≤ X ≤ 49) ≈ 0,948 → Radius = 9,5

Erläuterung: Das Intervall umfasst 19 Werte für X; der Radius der Umgebung ist deshalb 9,5.

	(1) p = 0,4	(2) p = 0,5	(3) p = 0,3	(4) p = 0,25
μ	40	70	45	50
σ	4,90	5,92	5,61	6,12
Radius	9,5 ≈ 1,94 · σ	11,5 ≈ 1,94 · σ	11 ≈ 1,96 · σ	12 ≈ 1,96 · σ

Ergebnis: Man stellt für unterschiedliches n und p fest: $P(\mu - 1{,}96\sigma \le X \le \mu + 1{,}96\sigma) \approx 0{,}95$

Übungsaufgaben

Untersuchen Sie auch für andere Werte von n und p, ob die gefundene Regel bestätigt wird.

Gebiet: Stochastik	Einsatz ab Stufe 11

Bestimmen von sigma-Umgebungen um den Erwartungswert

Beispiel-Aufgabe

Welche Bedeutung hat die Standardabweichung $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$ einer Binomialverteilung?

Bestimmen Sie für n = 200 und p = 0,3 das zum Erwartungswert $\mu = n \cdot p$ symmetrische Intervall $[\mu - z \cdot \sigma ; \mu + z \cdot \sigma]$, z = 1, 2, 3, sowie die Wahrscheinlichkeit dieses Intervalls.

Was fällt auf?

Erläuterung der Lösung

Zunächst werden Erwartungswert μ und Standardabweichung σ berechnet sowie die sog. 1σ-, 2σ-, 3σ-Umgebungen von μ bestimmt.

Die Wahrscheinlichkeiten der symmetrischen Umgebungen können mithilfe der Option Binomialcdf im [stat-reg/distr]-Menü bestimmt werden (alternativ mithilfe der folgenden Funktion: $f(x) = \sum_{k=\mu-x}^{\mu+x} \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$, gemäß BERNOULLI-Formel).

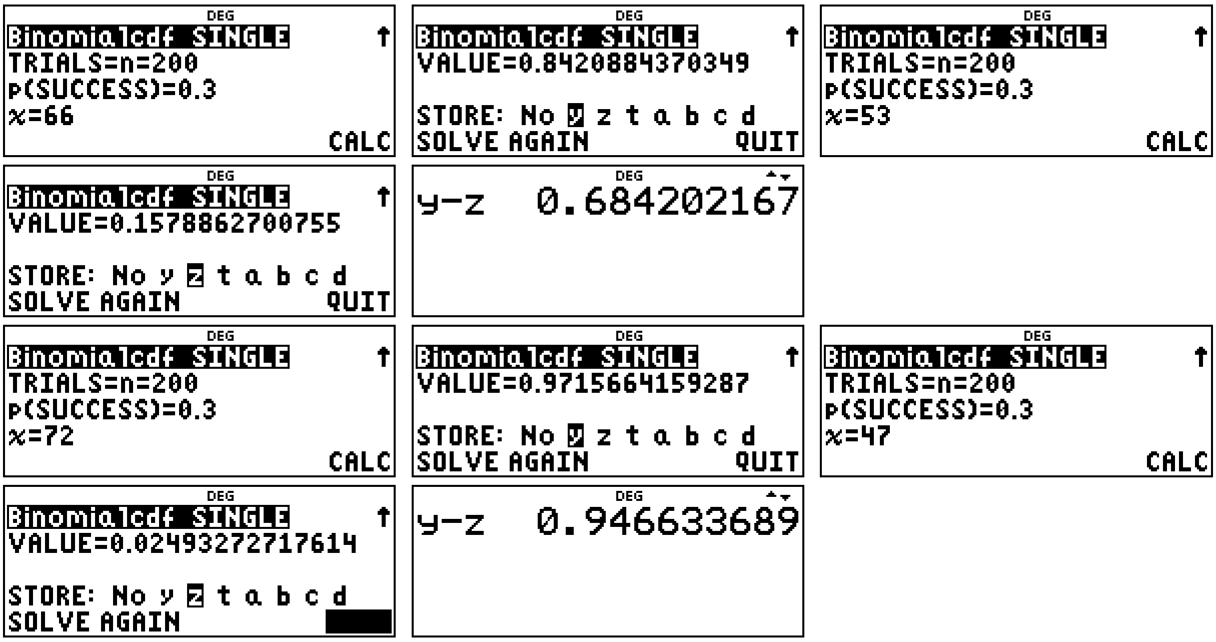
Praktikable Vorgehensweise: Für die einzelnen Werte von n und p berechnet man μ und σ und hiermit dann $\mu \pm z \cdot \sigma$. Dann werden die kumulierten Wahrscheinlichkeiten zu den berechneten Intervallgrenzen berechnet und zwischengespeichert (hier unter den Variablen y und z).

n = 200 ; p = 0,3 ; μ = 60 ; σ ≈ 6,48:

$P([\mu - 1\sigma ; \mu + 1\sigma]) = P(54 \le X \le 66) = P(X \le 66) - P(X \le 53) \approx 0{,}842 - 0{,}158 = 0{,}684$

$P([\mu - 2\sigma ; \mu + 2\sigma]) = P(48 \le X \le 72) = P(X \le 72) - P(X \le 47) \approx 0{,}972 - 0{,}025 = 0{,}947$

$P([\mu - 3\sigma ; \mu + 3\sigma]) = P(41 \le X \le 79) = P(X \le 79) - P(X \le 40) \approx 0{,}998 - 0{,}001 = 0{,}997$ (hier nicht angezeigt)



Ergebnis: Wenn man dies für verschiedene Binomialverteilungen durchführt, stellt man fest:

$P(\mu - 1\sigma \le X \le \mu + 1\sigma) \approx 0{,}68$; $P(\mu - 2\sigma \le X \le \mu + 2\sigma) \approx 0{,}955$; $P(\mu - 3\sigma \le X \le \mu + 3\sigma) \approx 0{,}997$

Übungsaufgaben

Untersuchen Sie, ob diese Regeln auch für andere Werte von n undd p bestätigt werden.

Gebiet: Stochastik | Einsatz ab Stufe 11

Schluss von der Gesamtheit auf die Stichprobe: Punkt- und Intervallschätzung

Beispiel-Aufgabe

39 % der Haushalte in Deutschland verfügen über einen Gefrierschrank. Eine Stichprobe vom Umfang 1200 wird genommen. Machen Sie eine Prognose, wie viele der Haushalte der Stichprobe über einen Gefrierschrank verfügen (Sicherheitswahrscheinlichkeit 90 %, 95 %, 99 %).

Überprüfen Sie, ob die nach sigma-Regeln bestimmten Intervalle tatsächlich die Vorgaben über die Sicherheitswahrscheinlichkeit erfüllen und korrigieren Sie ggf. die Intervallgrenzen.

Erläuterung der Lösung

Eine Punktschätzung für die Anzahl der Haushalte mit Gefrierschrank in der Stichprobe ist der Erwartungswert $\mu = n \cdot p = 1200 \cdot 0{,}39 = 468$.

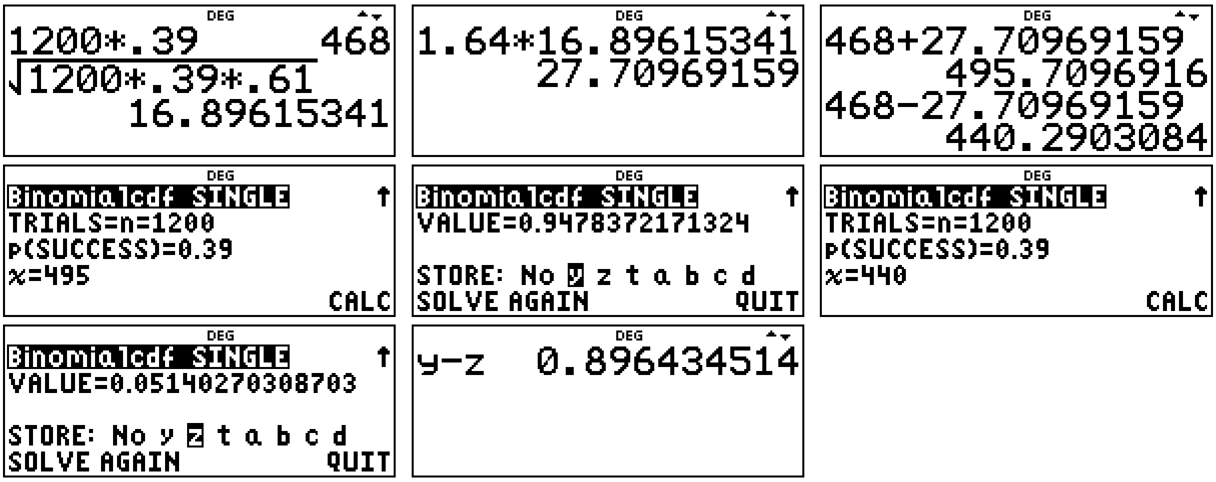
Intervallschätzungen werden mithilfe der Standardabweichung σ vorgenommen:
$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{1200 \cdot 0{,}39 \cdot 0{,}61} \approx 16{,}90$.

Die 90 %-, 95 %- bzw. 99 %-Umgebungen um den Erwartungswert μ werden gemäß den sigma-Regeln bestimmt. Da die sigma-Regeln nur Faustregeln sind, geben sie nur ungefähr die Intervallgrenzen an.

Wie die folgende Rechnung zeigt, ist im Falle der 90 %-Umgebung die vorgegebene Sicherheitswahrscheinlichkeit (*mindestens* 90 %) nicht erfüllt; deshalb muss das Intervall jeweils um eine Einheit nach unten bzw. nach oben erweitert werden.

$P(441 \le X \le 495) = P(X \le 495) - P(X \le 440) = 0{,}9478 - 0{,}0514 = 0{,}8964 < 0{,}90$

$P(440 \le X \le 496) = P(X \le 496) - P(X \le 439) = 0{,}9538 - 0{,}0454 = 0{,}9084$ (hier nicht angezeigt)



Übungsaufgabe

(1) Bestimmen Sie analog die 95 %- und die 99 %-Umgebung gemäß den sigma-Regeln für die vorliegende Anwendungsaufgabe mit n = 1200 und p = 0,39. Überprüfen Sie, ob die durch die Faustregel bestimmten Intervalle die Mindest-Wahrscheinlichkeiten von 95 % bzw. 99 % erfüllen. Korrigieren Sie ggf. dieses Intervall.

(2) Ein Würfel wird 300-mal geworfen. Machen Sie eine Prognose, wie oft Augenzahl 6 fallen wird (Sicherheitswahrscheinlichkeit 90 %, 95 %, 99 %). Überprüfen Sie, ob die nach sigma-Regeln bestimmten Intervalle tatsächlich die Vorgaben über die Sicherheitswahrscheinlichkeit erfüllen und korrigieren Sie ggf. die Intervallgrenzen.

Gebiet: Stochastik	Einsatz ab Stufe 11

Testen von Hypothesen – Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art

Beispiel-Aufgabe

Wenn man bei einem Würfelspiel einen gewöhnlichen Würfel benutzt, geht man davon aus, dass die Wahrscheinlichkeit p für das Auftreten der Augenzahl 6 bei diesem Würfel gleich 1/6 ist (LAPLACE-Modell). Diese Hypothese soll für einen konkret verwendeten Würfel getestet werden. Dazu soll er 600-mal geworfen und die Anzahl der Sechsen bestimmt werden.

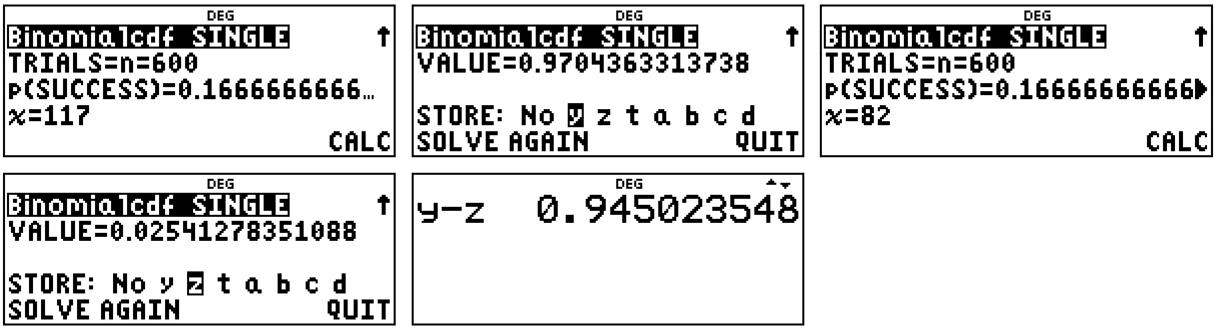
Bestimmen Sie eine Entscheidungsregel für $\alpha \le 0{,}05$ (α = Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art). Wie groß ist β (= Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art), wenn die tatsächliche Wahrscheinlichkeit p für Augenzahl 6 gleich 0,15 ist?

Erläuterung der Lösung

Wenn p = 1/6 ist, dann wird die Anzahl der Sechsen mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 95 % in der $1{,}96\sigma$-Umgebung des Erwartungswerts μ liegen; hier ist: $\mu = 100$ und $\sigma \approx 9{,}13$.

Mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 95 % gilt also für die Anzahl X der Sechsen: $83 \le X \le 117$. Kontrollrechnung mithilfe der Binomialcdf-Funktion im [stat-reg/distr]-Menü:

$P(83 \le X \le 117) = P(X \le 117) – P(X \le 82) = 0{,}9704 – 0{,}0254 = 0{,}9450$

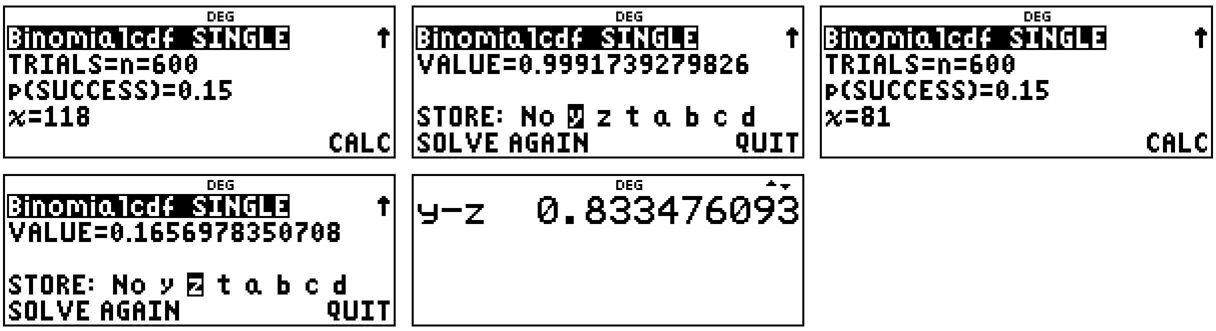


Das Intervall (= Annahmebereich der Hypothese) muss erweitert werden, damit die Bedingung $\alpha \le 0{,}05$ erfüllt ist. Durch ähnliche Rechnung wie oben erhält man: $P(82 \le X \le 118) = 0{,}9575$.

Die Entscheidungsregel lautet also: *Verwirf die Hypothese p = 1/6, falls in der Stichprobe vom Umfang n = 600 weniger als 82 oder mehr als 118 Sechsen auftreten.*

Ein Fehler 2. Art tritt auf, wenn dem Versuch eigentlich ein anderes p zugrunde liegt, das Versuchsergebnis aber im Annahmebereich der Hypothese liegt.

Die Berechnung von $P(82 \le X \le 118) = P(X \le 118) – P(X \le 81)$ ergibt: $\beta(0{,}15) \approx 83{,}4$ %.



Übungsaufgabe

Bestimmen Sie weitere Wahrscheinlichkeiten für einen Fehler 2. Art: $\beta(0{,}14)$ [$\beta(1/8)$]

Gebiet: Stochastik	Einsatz ab Stufe 11

Schluss von der Stichprobe auf die Gesamtheit: Konfidenzintervall-Bestimmung

Beispiel-Aufgabe

Ein doppelter LEGO™-Würfel wurde 500-mal geworfen. 45-mal lag dabei die Seite mit den Noppen nach unten. Bestimmen Sie ein 95 %-Konfidenzintervall für die zugrunde liegende Erfolgswahrscheinlichkeit p.

Erläuterung der Lösung

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % unterscheidet sich ein Stichprobenergebnis vom Erwartungswert μ der zugrunde liegenden, unbekannten Erfolgswahrscheinlichkeit p um höchstens 1,96σ (σ = Standardabweichung).

Unter der Annahme, dass die Bedingung erfüllt ist (was ja in 95 % der Fälle ein brauchbarer Ansatz ist), werden alle p gesucht, welche die Bedingung $| 500 \cdot p - 45 | \leq 1{,}96 \cdot \sigma$ erfüllen.

Gleichwertig zur o. a. Betrags(un)gleichung ist: $500 \cdot p + 1{,}96 \cdot \sigma \leq 45$ *oder* $500 \cdot p - 1{,}96 \cdot \sigma \leq 45$.

Man kann den links stehenden Term als Funktionsterm auffassen, also $f(x) = 500 \cdot x + 1{,}96 \cdot \sqrt{500 \cdot x \cdot (1-x)}$ bzw. $g(x) = 500 \cdot x - 1{,}96 \cdot \sqrt{500 \cdot x \cdot (1-x)}$ und in den Wertetabellen dieser Funktion nach dem Funktionswert 45 suchen (mit Verfeinerung der Schrittweite).

Mithilfe der Möglichkeiten des table-Menüs ergibt sich also:

DEG
f(x)=500x+1.96▸

DEG
g(x)=500x−1.96▸

DEG

x	f(x)	g(x)
0.06	40.40832	19.59168
0.07	46.18231	23.81769
0.08	51.88995	28.11005

f(x)=46.18231103127

DEG

x	f(x)	g(x)
0.11	68.713	41.287
0.12	74.24207	45.75793
0.13	79.73915	50.26085

g(x)=45.75793273433

DEG

x	f(x)	g(x)
0.067	44.4577	22.5423
0.068	45.03325	22.96675
0.069	45.60812	23.39188

f(x)=45.03325069053

DEG

x	f(x)	g(x)
0.117	72.58687	44.41313
0.118	73.13892	44.86108
0.119	73.69066	45.30934

g(x)=44.86107568448

DEG

x	f(x)	g(x)
0.0678	44.9182	22.8818
0.0679	44.97573	22.92427
0.068	45.03325	22.96675

f(x)=44.97572648273

DEG

x	f(x)	g(x)
0.1182	73.2493	44.9507
0.1183	73.30448	44.99552
0.1184	73.35966	45.04034

g(x)=44.99552172321

Lösung: Das 95 %-Konfidenzintervall ist: 6,79 % ≤ p ≤ 11,83 %.

Es enthält alle diejenigen Werte von p, innerhalb deren 95 %-Umgebung das Stichprobenergebnis X = 45 liegt, d. h. also:

Bestimmt man zu den Erfolgswahrscheinlichkeiten p aus dem Konfidenzintervall eine 95 %-Umgebung, dann liegt das Stichprobenergebnis X = 45 innerhalb dieser Umgebung.

Übungsaufgabe

In der Verbraucherstichprobe 2017 wurden die Ausstattungen von 7000 repräsentativ ausgewählten Haushalten erfasst. 47,0 % der erfassten Haushalte verfügten über ein Satellitenempfangsgerät, 45,5 % über einen Kabelanschluss.

Bestimmen Sie jeweils 95 %-Konfidenzintervalle für die zugrunde liegenden Erfolgswahrscheinlichkeiten p, also für die in der Gesamtheit aller Haushalte vorliegenden Anteile (Angaben auf drei Dezimalstellen genau).

Gebiet: Stochastik	Einsatz ab Stufe 11

Schluss von der Stichprobe auf die Gesamtheit: Konfidenzintervall-Bestimmung

Beispiel-Aufgabe

Ein doppelter LEGO™-Würfel wurde 500-mal geworfen. 45-mal lag dabei die Seite mit den Noppen nach unten. Bestimmen Sie ein 95 %-Konfidenzintervall für die zugrunde liegende Erfolgswahrscheinlichkeit p.

Erläuterung der Lösung

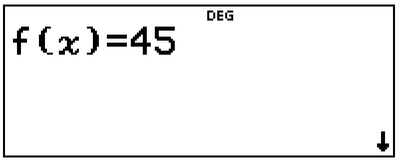
Mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % unterscheidet sich ein Stichprobenergebnis vom Erwartungswert μ der zugrunde liegenden, unbekannten Erfolgswahrscheinlichkeit p um höchstens 1,96σ (σ = Standardabweichung).

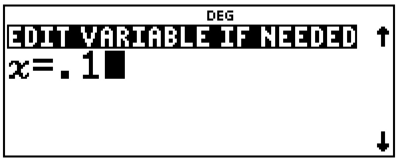
Unter der Annahme, dass die Bedingung erfüllt ist (was ja in 95 % der Fälle ein brauchbarer Ansatz ist), werden alle p gesucht, welche die Bedingung $| 500 \cdot p - 45 | \le 1{,}96 \cdot \sigma$ erfüllen.

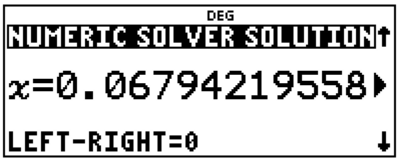
Gleichwertig zur o. a. Betrags(un)gleichung ist: $500 \cdot p + 1{,}96 \cdot \sigma \le 45$ *oder* $500 \cdot p - 1{,}96 \cdot \sigma \le 45$.

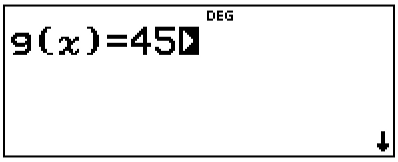
Man kann den links stehenden Term als Funktionsterm definieren, also
$f(x) = 500 \cdot x + 1{,}96 \cdot \sqrt{500 \cdot x \cdot (1-x)}$ bzw. $g(x) = 500 \cdot x - 1{,}96 \cdot \sqrt{500 \cdot x \cdot (1-x)}$, und dann mithilfe des Gleichungslösers [num-solv] die beiden Gleichungen lösen.

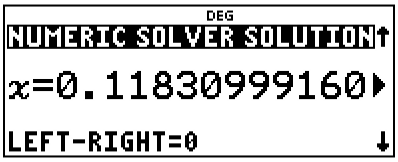
Als Startwert für den Suchalgorithmus kann man beispielsweise x = 0,1 eingeben.











Lösung: Das 95 %-Konfidenzintervall ist: 6,79 % ≤ p ≤ 11,83 %.
Es enthält alle diejenigen Werte von p, innerhalb deren 95 %-Umgebung das Stichprobenergebnis X = 45 liegt, d. h. also:

Bestimmt man zu den Erfolgswahrscheinlichkeiten p aus dem Konfidenzintervall eine 95 %-Umgebung, dann liegt das Stichprobenergebnis X = 45 innerhalb dieser Umgebung.

Übungsaufgabe

In der Verbraucherstichprobe 2017 wurden die Ausstattungen von 7000 repräsentativ ausgewählten Haushalten erfasst. 47,0 % der erfassten Haushalte verfügten über ein Satellitenempfangsgerät, 45,5 % über einen Kabelanschluss.

Bestimmen Sie jeweils 95 %-Konfidenzintervalle für die zugrunde liegenden Erfolgswahrscheinlichkeiten p, also für die in der Gesamtheit aller Haushalte vorliegenden Anteile (Angaben auf drei Dezimalstellen genau).

Gebiet: Stochastik	Einsatz ab Stufe 11

Das klassische Geburtstagsproblem und Variationen

Beispiel-Aufgabe

Beim klassischen Geburtstagsproblem geht es um die Frage, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass unter 23 zufällig ausgewählten Personen mindestens zwei sind, die am gleichen Tag Geburtstag haben.

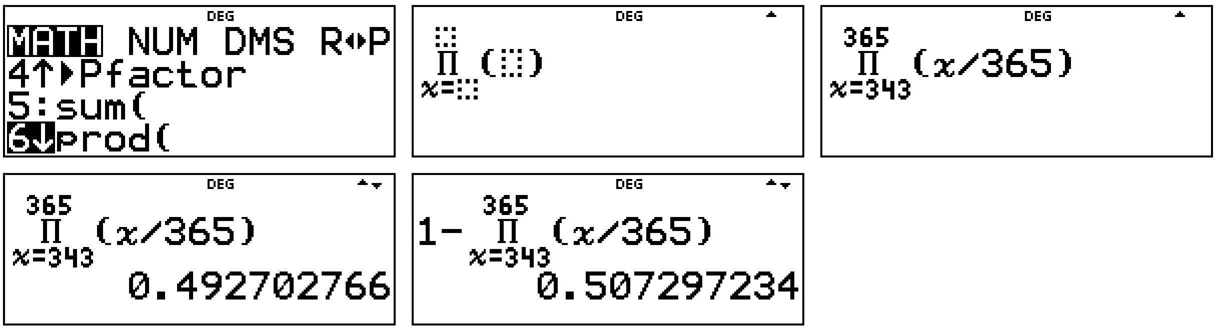
Setzt man zur Vereinfachung voraus, dass die Geburts-Wahrscheinlichkeit für alle Tage des Jahres gleich ist, dann ergibt sich für das zugehörige Gegenereignis

P(*lauter verschiedene Geburtstage*) = $\frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \ldots \cdot 343}{365^{23}} = \frac{343}{365} \cdot \frac{344}{365} \cdot \frac{345}{365} \cdot \ldots \cdot \frac{365}{365}$

Erläuterung der Lösung

Das Produkt der Faktoren 343/365, 344/365, …, 365/365 kann mithilfe der Produkt-Funktion des [math]-Menüs bestimmt werden. Dazu füllt man den kleinsten und größten Wert für x am Produktzeichen Π sowie den Term x/365 ein.

P(*mindestens zwei von 23 Personen haben am gleichen Tag Geburtstag*) ≈ 1 – 0,4927 = 0,5073



Übungsaufgaben

(1) Die Wahrscheinlichkeit für mindestens zwei gleiche Geburtstage ist bei 23 Personen ungefähr gleich 50 %, d. h., dies wäre eine faire Wette. Jemand möchte bei seiner Wette sicherer sein und mindestens eine Gewinn-Wahrscheinlichkeit von 75 % haben.

Bei welcher Personenzahl ergibt sich eine solche Gewinn-Wahrscheinlichkeit?

n	340	338	337	336	335	334	333
P(E’)							

(2) Ein Rouletterad ist im Prinzip ein Glücksrad mit 37 gleich großen Sektoren, die mit den Zahlen von 0 bis 36 beschriftet sind. Auf diesen Sektoren bleibt dann eine Kugel zufällig liegen. Ein solches Glücksrad werde *n*-mal gedreht.

Von welcher Anzahl *n* an lohnt es sich darauf zu wetten (Wahrscheinlichkeit größer als 50 %), dass die Kugel auf irgendeinem Sektor mindestens zweimal liegen geblieben ist?

Bestimmen Sie dazu mithilfe des Taschenrechners die konkreten Wahrscheinlichkeiten für das Gegenereignis E’ „*die Kugel bleibt in n Spielrunden auf lauter verschiedenen Sektoren liegen*“.

n	3	4	5	6	7	8	9
P(E’)							

Gebiet: Stochastik	Einsatz ab Stufe 11

Bestimmen von Wahrscheinlichkeiten bei normalverteilten Zufallsgrößen

Beispiel-Aufgabe

Der Kopfumfang von 1-jährigen Mädchen ist näherungsweise normalverteilt mit Erwartungswert $\mu = 44{,}9$ cm und Standardabweichung $\sigma = 1{,}4$ cm.

(1) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat ein zufällig ausgewähltes, 1-jähriges Mädchen einen Kopfumfang, der

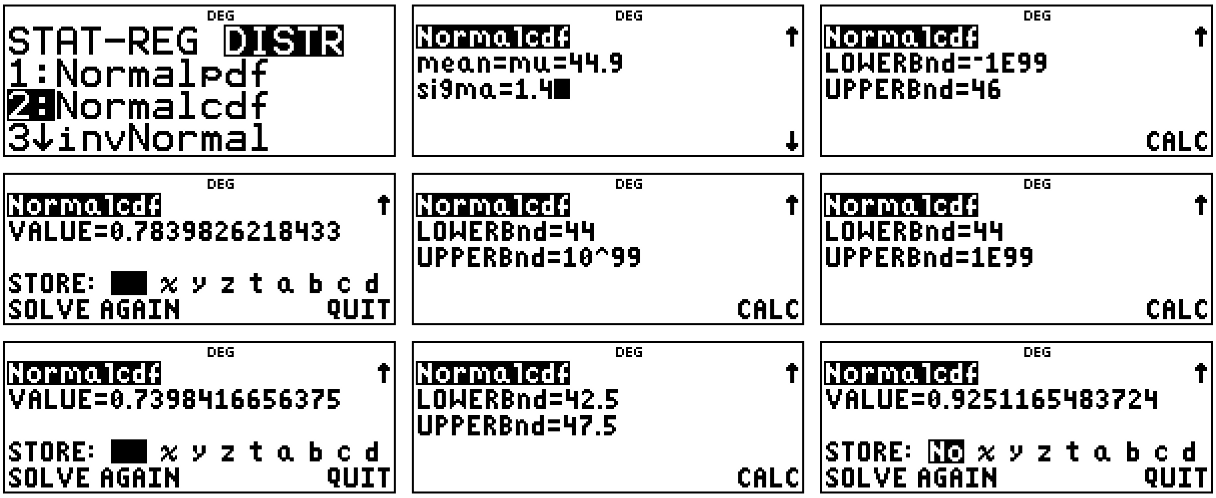
(a) kleiner ist als 46,0 cm, (b) mindestens 44,0 cm beträgt,

(c) mindestens 42,5 cm ist, aber höchstens 47,5 cm ?

(2) Setzen Sie fort: „70 % der Mädchen haben einen Kopfumfang, der kleiner ist als …“

Erläuterung der Lösung

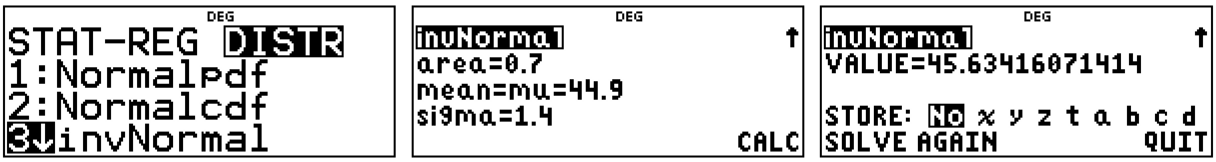
Der TI-Schulrechner fragt bei Aufruf der Option Normalcdf im [stat-reg/distr]-Menü (= kumulierte Normalverteilung = Integralfunktion der Normalverteilungs-Dichtefunktion) die Werte für μ und σ ab, dann die Grenzen der Integration. Die Voreinstellungen hierfür sind -10^{99} und $+10^{99}$; wenn diese Grenzen wieder eingegeben werden müssen, kann dies mithilfe der [$x^{\square}$]-Taste erfolgen.



Ergebnis: (a) $P(X < 46{,}0) \approx 78{,}4$ % ; (b) $P(X \geq 44{,}0) = P(X > 44{,}0) \approx 74{,}0$ %

(c) $P(42{,}5 \leq X \leq 47{,}5$ cm$) \approx 92{,}5$ %

(2) Um diese Aufgabe zu lösen, benötigt man die zugehörige Umkehrfunktion, also eine Funktion, die einer Wahrscheinlichkeit die entsprechenden (Integrations-) Grenzen zuordnet.



Ergebnis: $P(X < 45{,}63) = P(X \leq 45{,}63) \approx 70$ %

Übungsaufgaben

Für die näherungsweise normalverteilte Körpergröße von 6 Monate alten Jungen gilt:
$\mu = 67{,}6$ cm und $\sigma = 2{,}2$ cm.

Wie viel Prozent der 6 Monate alten Jungen sind kleiner als 68,0 cm? Für welche Jungen gilt, dass sie zu den 20 % größten der Altersstufe gehören?

Gebiet: Stochastik	Einsatz ab Stufe 11

Approximation der Binomialverteilung durch die Poisson-Verteilung

Beispiel-Aufgabe

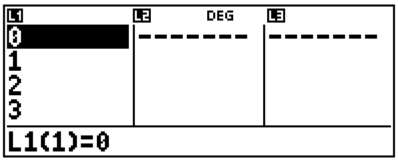
Ein Glücksrad mit 50 gleich großen Sektoren wird 50-mal gedreht. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Zeiger des Glücksrads auf einem bestimmten Sektor keinmal, genau einmal, genau zweimal, genau dreimal, mehr als dreimal stehen bleiben wird

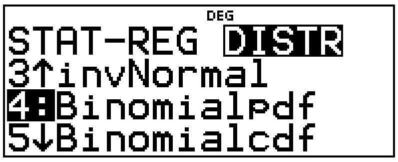
(1) gemäß Binomialansatz (2) mithilfe der Poisson-Näherung.

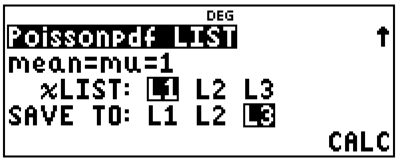
Erläuterung der Lösung

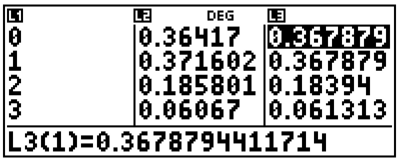
Der Vorgang kann modelliert werden mithilfe eines Binomialansatzes mit n = 50 und p =1/50; der Erwartungswert, Parameter für die Poisson-Approximation, ist also gleich $\mu = 50 \cdot 1/50 = 1$.

Da verschiedene Werte der Verteilung berechnet werden sollen, wird zunächst eine Liste L1 mit den Werten k = 0, 1, 2, 3 angelegt. Danach werden die Wahrscheinlichkeiten gemäß Binomialansatz in Liste L2 und die gemäß der Poisson-Näherung in Liste L3 gespeichert.



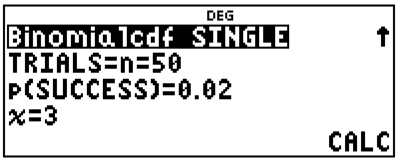


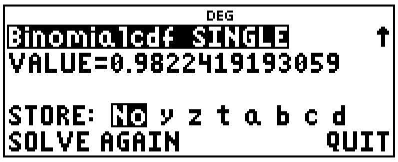


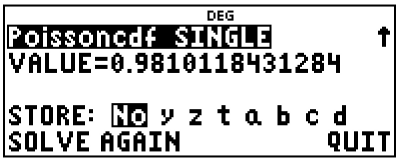


Die Näherungswerte unterscheiden sich nur wenig von den exakt berechneten Wahrscheinlichkeiten des Binomialansatzes. Auch die Wahrscheinlichkeit für „mehr als dreimal“, die mithilfe der jeweiligen kumulierten Wahrscheinlichkeiten berechnet wird, bestätigt dies:

$P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - 0{,}9822 = 0{,}0178 \approx 1 - 0{,}9810 = 0{,}0190$







Übungsaufgaben

(1) Berechnen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten zur Beispiel-Aufgabe auch für den Fall, dass das Glücksrad mit 50 Sektoren 100-mal [200-mal] gedreht wird.

	k = 0	k = 1	k = 2	k = 3	k = 4	k > 4
Binomial (n = 100)						
Poisson						
Binomial (n = 200)						
Poisson						

(2) Vergleichen Sie die Wahrscheinlichkeiten für die Anzahl der Sechsen beim 300-fachen Würfeln gemäß Binomial- und Poisson-Ansatz.

	k = 0	k = 1	k = 2	k = 3	k = 4	k > 4
Binomial						
Poisson						

Haben Sie Fragen zu Produkten von Texas Instruments? Oder sind Sie an weiteren Unterrichtsmaterialien oder einer Lehrerfortbildung interessiert?
Gerne steht Ihnen auch unser Customer Service Center mit Rat und Tat zu Seite.
Nehmen Sie mit uns Kontakt auf:

Customer Service Center
TEXAS INSTRUMENTS
education.ti.com/csc

education.ti.com/deutschland
education.ti.com/oesterreich
education.ti.com/schweiz