# Die Nutzung der Applikation Lists & Spreadsheet des TI-Nspire™ CAS bei Untersuchungen zur Fibonacci-Folge

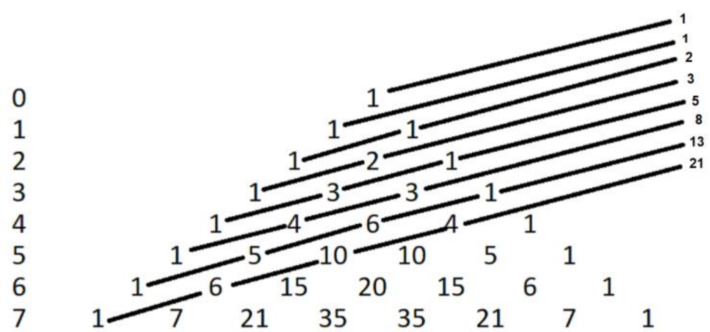
Im Beitrag wird am Beispiel der Fibonacci-Folge gezeigt, wie man bei der Untersuchung von Eigenschaften explizit und rekursiv definierter Folgen die Tabellenkalkulation einsetzen kann.
Da für die Fibonacci-Folge viele Eigenschaften und Zusammenhänge bekannt sind, eignet sich der Beitrag auch für eigene Ergänzungen.
Die Ausführungen sind in einzelne Aufgaben gegliedert, deren Bearbeitung hier vorgestellt wird.

**Aufgabe 1**
Die Fibonacci-Folge $(f_n)$ kann wie folgt rekursiv definiert werden:
$f_1 = 1, \quad f_2 = 1, \quad f_n = f_{n-2} + f_{n-1} \ (n \in N;\ n \geq 3)$
Berechnen Sie mit zwei verschiedenen Methoden in der Lists-&-Spreadsheet-Applikation die ersten 20 Folgeglieder.
Bezeichnen Sie eine der Listen mit fr.

**Mögliche Eingaben**
Zelle A1: n:=20
Spalten-Namenszelle der Spalte B: $fr$
Spalten-Formelzelle der Spalte B: $fr := seqGen(f(k-2)+f(k-1), k, f, \{1,'n\}, \{1,1\})$
Erklärung:
$f(k-2)+f(k-1)$ Term zur Berechnung von $f_k$
$k, f$: Variable und abhängige Variable
$\{1,'n\}$: kleinster und größter k-Wert
$\{1,1\}$: $f_1$ und $f_2$

Zelle C1: 1
Zelle C2: 1
Zelle C3: =c1+c2
Zelle C3 bis Zelle C20 füllen.

**Aufgabe 2**
Sieht man sich das Pascalsche Dreieck genauer an, so erkennt man einen Zusammenhang zwischen den Binomialkoeffizienten und den Gliedern der Fibonacci-Folge.
Geben Sie eine entsprechende explizite Bildungsvorschrift an, berechnen Sie mit ihr die ersten 20 Folgeglieder und vergleichen Sie das Ergebnis mit den bereits berechneten Werten aus Aufgabe 1.



**Lösung**

$$(f_n) = \left( \sum_{i=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \binom{n-1-i}{i} \right), \mathrm{n} \in \mathrm{N}, \mathrm{n} \geq 1$$

*(Bemerkung: eckige Klammer – Gaußklammer – größte ganze Zahl*
*Beweis der expliziten Bildungsvorschrift durch vollständige Induktion im Anhang.)*

**Eingaben**

Definieren Sie die Bildungsvorschrift auf einer Calculator-Seite:

$$f1(k) := \sum_{i=0}^{ipart\left[\frac{k-1}{2}\right]} \left(nCr(k-1-i,i)\right)$$

Eingabe auf der Lists-&-Spreadsheet-Seite:
Spalten-Formelzelle von Spalte D: $= seq(f1(k), k, 1, 'n)$

Es liegt eine Übereinstimmung vor.

**Aufgabe 3**

Es sei $(f_n)$ die Fibonacci-Folge. Untersuchen Sie die Folge $\left(\frac{f_{n+1}}{f_n}\right)$, indem Sie 19 Glieder dieser Folge berechnen.

**Lösung**

Vervollständigen der Lists-&-Spreadsheet-Seite:
Zelle F1: $= \frac{c2}{c1} \cdot 1.0$
Zelle F1 bis Zelle F19 füllen.

Hypothese:

$$\lim_{k \to \infty} \left(\frac{f_{k+1}}{f_k}\right) = g \approx 1{,}1618 \ldots ..$$

Wem diese Zahl bekannt vorkommt, täuscht sich nicht. Es handelt sich um das Teilverhältnis beim Goldenen Schnitt.

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}1618 \ldots$$

Der Beweis befindet sich im Anhang und nutzt die Lösung der Aufgabe 4.

**Aufgabe 4**
Überprüfen Sie, ob die Folge mit der expliziten Bildungsvorschrift

$$\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)\right),\quad \mathrm{n}\in\mathrm{N},\mathrm{n}\geq 1$$

die Fibonacci-Folge sein kann.
Wenn Sie eine Übereinstimmung vermuten, dann führen Sie den Beweis.
*(Bemerkung: Im Anhang finden Sie eine direkte Herleitung.)*

**Lösung (Rechnerteil)**
Eingabe auf der bereits angelegten Calculator-Seite:

| | |
|---|---|
| $f2(k):=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right)$ | *Fertig* |
| $f2(1)$ | 1 |
| $f2(2)$ | 1 |
| ⚠ $f2(k-2)+f2(k-1)=f2(k)$ | true |

Eingabe auf der Lists-&-Spreadsheet-Seite in die Spalten-Formelzelle von Spalte E:

$$=seq(f2(k),k,1,'n)$$

Die Werte stimmen überein.

**Beweis ohne Rechner**

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

$$a_1=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\sqrt{5}=1$$

$$a_2=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right)\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1+2\sqrt{5}+5-(1-2\sqrt{5}+5)}{4}=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{4\sqrt{5}}{4}=1$$

Weiterhin gilt:

$$a_{n-2}+a_{n-1}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\right)+\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}+\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\cdot\left(1+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\cdot\left(1+\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left( \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdot \left( \frac{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2} \right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdot \left( \frac{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2} \right) \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left( \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdot \left( \frac{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}{\frac{2\cdot(3+\sqrt{5})}{4}} \right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdot \left( \frac{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}{\frac{2\cdot(3-\sqrt{5})}{4}} \right) \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left( \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right) = a_n$$

Also gilt $a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$.
Weil außerdem $a_1 = a_2 = 1$ gilt, ist $(a_n) = (f_n)$ die Fibonacci-Folge.

| | A | B fr | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| = | | =seqgen(f | | =seq(f1(k) | =seq(f2(k) | | |
| 1 | 20 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1. | |
| 2 | | 1 | 1 | 1 | 1 | 2. | |
| 3 | | 2 | 2 | 2 | 2 | 1.5 | |
| 4 | | 3 | 3 | 3 | 3 | 1.66666666667 | |
| 5 | | 5 | 5 | 5 | 5 | 1.6 | |
| 6 | | 8 | 8 | 8 | 8 | 1.625 | |
| 7 | | 13 | 13 | 13 | 13 | 1.61538461538 | |
| 8 | | 21 | 21 | 21 | 21 | 1.61904761905 | |
| 9 | | 34 | 34 | 34 | 34 | 1.61764705882 | |
| 10 | | 55 | 55 | 55 | 55 | 1.61818181818 | |
| 11 | | 89 | 89 | 89 | 89 | 1.61797752809 | |
| 12 | | 144 | 144 | 144 | 144 | 1.61805555556 | |
| 13 | | 233 | 233 | 233 | 233 | 1.61802575107 | |
| 14 | | 377 | 377 | 377 | 377 | 1.61803713528 | |
| 15 | | 610 | 610 | 610 | 610 | 1.61803278689 | |
| 16 | | 987 | 987 | 987 | 987 | 1.61803444782 | |
| 17 | | 1597 | 1597 | 1597 | 1597 | 1.6180338134 | |
| 18 | | 2584 | 2584 | 2584 | 2584 | 1.61803405573 | |
| 19 | | 4181 | 4181 | 4181 | 4181 | 1.61803396317 | |
| 20 | | 6765 | 6765 | 6765 | 6765 | | |

Öffnen Sie für die Aufgabe 5 eine neue Lists-&-Spreadsheet-Seite und tragen Sie $fr$ in die Spalten-Namenszelle von Spalte A ein.

**Aufgabe 5**
Ermitteln Sie die Partialsummen $s_1$ bis $s_{20}$ der Fibonaccifolge. Finden Sie einen Zusammenhang zwischen der Fibonaccifolge und ihrer Partialsummenfolge. Vergleichen Sie dazu vor allen die großen Werte, dort ist der Zusammenhang offensichtlicher.

**Lösung**
Geben Sie in die Spaltenformelzelle von Spalte B $= cumulativeSum(fr)$ ein.

Ein Vergleich von Spalte A und B ergibt, dass $s_n = f_{n+2} - 1$ sein müsste.

Der Beweis ist im Anhang zu finden.

| | A fr | B | C |
|---|---|---|---|
| = | | =cumulati | |
| 1 | 1 | 1 | |
| 2 | 1 | 2 | |
| 3 | 2 | 4 | |
| 4 | 3 | 7 | |
| 5 | 5 | 12 | |
| 6 | 8 | 20 | |
| 7 | 13 | 33 | |
| 8 | 21 | 54 | |
| 9 | 34 | 88 | |
| 10 | 55 | 143 | |
| 11 | 89 | 232 | |
| 12 | 144 | 376 | |
| 13 | 233 | 609 | |
| 14 | 377 | 986 | |
| 15 | 610 | 1596 | |
| 16 | 987 | 2583 | |
| 17 | 1597 | 4180 | |
| 18 | 2584 | 6764 | |
| 19 | 4181 | 10945 | |
| 20 | 6765 | 17710 | |

**Aufgabe 6**
Finden Sie heraus, welche Glieder der Fibonacci-Folge durch 3 teilbar sind, und formulieren Sie Ihre Vermutung in einem Satz.

**Lösung**
Jede vierte Fibonaccizahl ist durch 3 teilbar.
oder
Für alle $n \geq 1$ $(n \in N)$ gilt $3|f_{4n}$.

Der Beweis durch vollständige Induktion befindet sich im Anhang.

| | A | B fr | C |
|---|---|---|---|
| = | | =seqgen(f | |
| 3 | | 2 | 2 |
| 4 | | 3 | 3 |
| 5 | | 5 | 5 |
| 6 | | 8 | 8 |
| 7 | | 13 | 13 |
| 8 | | 21 | 21 |
| 9 | | 34 | 34 |
| 10 | | 55 | 55 |
| 11 | | 89 | 89 |
| 12 | | 144 | 144 |
| 13 | | 233 | 233 |
| 14 | | 377 | 377 |
| 15 | | 610 | 610 |
| 16 | | 987 | 987 |
| 17 | | 1597 | 1597 |
| 18 | | 2584 | 2584 |
| 19 | | 4181 | 4181 |
| 20 | | 6765 | 6765 |

---

**Anhang**

**Beweis zu Aufgabe 2**

$$f_n = \sum_{i=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \binom{n-1-i}{i}.$$

Beweis durch vollständige Induktion:
Induktionsanfang:
Es gilt $f_1 = 1$ und $f_2 = 1$.
Mit Hilfe der Gleichung erhält man

$$f_1 = \sum_{i=0}^{[0]} \binom{-i}{i} = \binom{0}{0} = 1 \text{ und } f_2 = \sum_{i=0}^{\left[\frac{1}{2}\right]} \binom{1-i}{i} = \sum_{i=0}^{0} \binom{1-i}{i} = \binom{1}{0} = 1\,.$$

Also gilt die Aussage für $n = 1$ und $n = 2$.
Induktionsschritt:
Induktionsvoraussetzung:
Die Aussage gilt für ein beliebiges $n = k - 1$ bzw. $n = k$:

$$f_{k-1} = \sum_{i=0}^{\left[\frac{k-2}{2}\right]} \binom{k-2-i}{i} \text{ und } f_k = \sum_{i=0}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]} \binom{k-1-i}{i}.$$

Induktionsbehauptung:
Die Aussage gilt für den Nachfolger $n = k + 1$:

$$f_{k+1} = \sum_{i=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]} \binom{k-i}{i}.$$

Beweis der Induktionsbehauptung:

$$f_{k+1} = f_{k-1} + f_k$$

$$f_{k+1} = \sum_{i=0}^{\left[\frac{k-2}{2}\right]} \binom{k-2-i}{i} + \sum_{i=0}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]} \binom{k-1-i}{i}.$$

k sei gerade

$$f_{k+1} = \sum_{i=0}^{\frac{k}{2}-2} \binom{k-2-i}{i} + \binom{\frac{k}{2}-1}{\frac{k}{2}-1} + \binom{k-1}{0} + \sum_{i=1}^{\frac{k}{2}-1} \binom{k-1-i}{i}$$

$$f_{k+1} = \binom{k}{0} + \sum_{i=1}^{\frac{k}{2}-1} \binom{k-2-(i-1)}{i-1} + \sum_{i=1}^{\frac{k}{2}-1} \binom{k-1-i}{i} + \binom{\frac{k}{2}}{\frac{k}{2}}$$

$$f_{k+1} = \binom{k}{0} + \sum_{i=1}^{\frac{k}{2}-1} \left( \binom{k-1-i}{i-1} + \binom{k-1-i}{i} \right) + \binom{\frac{k}{2}}{\frac{k}{2}}$$

$$f_{k+1} = \binom{k}{0} + \sum_{i=1}^{\frac{k}{2}-1} \binom{k-i}{i} + \binom{\frac{k}{2}}{\frac{k}{2}}$$

$$f_{k+1} = \sum_{i=0}^{\frac{k}{2}} \binom{k-i}{i} = \sum_{i=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]} \binom{k-i}{i}.$$

k sei ungerade

$$f_{k+1} = \sum_{i=0}^{\frac{k}{2}-\frac{3}{2}} \binom{k-2-i}{i} + \sum_{i=0}^{\frac{k}{2}-\frac{1}{2}} \binom{k-1-i}{i}.$$

$$f_{k+1} = \sum_{i=1}^{\frac{k}{2}-\frac{1}{2}} \binom{k-1-i}{i-1} + \binom{k-1}{0} + \sum_{i=1}^{\frac{k}{2}-\frac{1}{2}} \binom{k-1-i}{i}$$

$$f_{k+1} = \binom{k}{0} + \sum_{i=1}^{\frac{k}{2}-\frac{1}{2}} \left( \binom{k-1-i}{i-1} + \binom{k-1-i}{i} \right)$$

$$f_{k+1} = \binom{k}{0} + \sum_{i=1}^{\frac{k}{2}-\frac{1}{2}} \binom{k-i}{i} = \sum_{i=0}^{\frac{k}{2}-\frac{1}{2}} \binom{k-i}{i} = \sum_{i=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]} \binom{k-i}{i}$$

q.e.d.

Aufgrund des Induktionsanfangs und des Induktionsschrittes gilt die Behauptung für alle $n \in N, n \geq 1$.

**Zu Aufgabe 4**
Herleitung einer expliziten Bildungsvorschrift für die Fibonacci-Folge

Zuerst zeigt man, dass für Folgen $(c_n)$ für die $c_n = r \cdot a_n + t \cdot b_n$ gilt, die Rekursionsgleichung $c_n = c_{n-2} + c_{n-1}$ zutrifft, wenn auch für die Folgen $(a_n)$ und $(b_n)$ die Gleichungen $a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$ und $b_n = b_{n-2} + b_{n-1}$ wahr sind.

$c_n = r \cdot a_n + t \cdot b_n$
$c_n = r \cdot (a_{n-2} + a_{n-1}) + t \cdot (b_{n-2} + b_{n-1})$
$c_n = (r \cdot a_{n-2} + t \cdot b_{n-2}) + (r \cdot a_{n-1} + t \cdot b_{n-1})$
$c_n = c_{n-2} + c_{n-1}$

Es sei nun $h_n = h_{n-2} + h_{n-1}$ und $h_n = x^n$ $(x \neq 0; n \in N; n \geq 3)$. Dann gilt:
$x^n = x^{n-2} + x^{n-1}$
$x^2 = 1 + x$
$x^2 - x - 1 = 0$
$x_{1;2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{4}{4}} = \frac{1}{2} \cdot \left(1 \pm \sqrt{5}\right)$
Daraus folgt, dass $c_n = c_{n-2} + c_{n-1}$für die Folge
$c_n = r \cdot \frac{1}{2^n}\left(1 + \sqrt{5}\right)^n + t \cdot \frac{1}{2^n}\left(1 - \sqrt{5}\right)^n$ gilt.

Ermittelt man die Werte für $r$ und $t$, für die $c_1 = c_2 = 1$ gilt, so ist $(f_n) = (c_n)$ die Fibonacci-Folge.

$I)\ c_1 = 1 = r \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \sqrt{5}\right) + t \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \sqrt{5}\right)$
$1 = \frac{1}{2} \cdot (r + t) + \frac{1}{2}\sqrt{5} \cdot (r - t)$
$II)\ c_2 = 1 = r \cdot \frac{1}{4}\left(1 + \sqrt{5}\right)^2 + t \cdot \frac{1}{4}\left(1 - \sqrt{5}\right)^2$
$1 = \frac{1}{4} r \cdot \left(6 + 2\sqrt{5}\right) + \frac{1}{4} t \cdot \left(6 - 2\sqrt{5}\right)$
$1 = \frac{3}{2} \cdot (r + t) + \frac{1}{2}\sqrt{5} \cdot (r - t)$
Die Subtraktion der ersten von der zweiten Gleichung ergibt $0 = r + t$.
Durch Einsetzen in die erste Gleichung erhält man dann
$1 = \frac{1}{2} \cdot \left(r + (-r)\right) + \frac{1}{2}\sqrt{5} \cdot \left(r - (-r)\right) = r \cdot \sqrt{5}$ und damit $r = \frac{1}{\sqrt{5}}$ und $t = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Eine explizite Bildungsvorschrift für die Fibonaccifolge ist also

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{2^n}\left(1 + \sqrt{5}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{2^n}\left(1 - \sqrt{5}\right)^n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

Mit Rechnerunterstützung:

| | |
|---|---|
| $\text{solve}\left(x^k=x^{k-2}+x^{k-1},x\right)$ | $x=\frac{-\left(\sqrt{5}-1\right)}{2}$ or $x=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ |
| $c(k):=\frac{r\cdot 1}{2^k}\cdot\left(1+\sqrt{5}\right)^k+\frac{t\cdot 1}{2^k}\cdot\left(1-\sqrt{5}\right)^k$ | *Fertig* |
| $\text{solve}\left(\begin{cases}c(1)=1\\c(2)=1\end{cases},\{r,t\}\right)$ | $r=\frac{\sqrt{5}}{5}$ and $t=\frac{-\sqrt{5}}{5}$ |

**Beweis zu Aufgabe 3**
Ist $(f_n)$ die Fibonaccifolge so gilt
$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{f_{n+1}}{f_n}\right)=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
Der Grenzwert ist also der Goldene Schnitt.
Wegen $-1<\frac{1-\sqrt{5}}{2}<0$ ist $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n=0$.

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\frac{f_{n+1}}{f_n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

**Beweis zu Aufgabe 5**
Die Folge $(s_n)$ sei die Folge der Partialsummen der Fibonaccifolge. Dann gilt:
Für alle $n\in N$ $(n\geq 1)$ ist $s_n=f_{n+2}-1$.

Beweis durch vollständige Induktion:
Induktionsanfang:
Es gilt $s_1=f_1=1$ und $f_{1+2}-1=f_3-1=2-1=1$. Also gilt die Aussage für $n=1$.

Induktionsschritt:
Induktionsvoraussetzung:
Die Aussage gilt für ein beliebiges $n=k$: $s_k=f_{k+2}-1$
Induktionsbehauptung:
Die Aussage gilt für den Nachfolger $n=k+1$: $s_{k+1}=f_{k+3}-1$
Beweis der Induktionsbehauptung:
$s_{k+1}=s_k+f_{k+1}$
$s_{k+1}=f_{k+2}-1+f_{k+1}$
Wegen $f_{k+3}=f_{k+1}+f_{k+2}$ gilt $s_{k+1}=f_{k+3}-1$ q.e.d.

Aufgrund des Induktionsanfangs und des Induktionsschrittes gilt die Behauptung für alle $n\in N, n\geq 1$.

**Beweis zu Aufgabe 6:**
Induktionsanfang:
Für $n = 1$ ist $f_{4n} = f_4 = 3$. $\Rightarrow$ $3|f_{4n}$ für $n = 1$.

Induktionsschritt:
Induktionsvoraussetzung:
Für ein beliebiges $n = k$ gilt: $3|f_{4k}$
Induktionsbehauptung:
Dann gilt auch für den Nachfolger $n = k + 1$: $3|f_{4(k+1)}$
Beweis der Induktionsbehauptung:
$f_{4(k+1)} = f_{4k+4} = f_{4k+2} + f_{4k+3}$
$f_{4(k+1)} = f_{4k} + f_{4k+1} + f_{4k+1} + f_{4k+2}$
$f_{4(k+1)} = f_{4k} + f_{4k+1} + f_{4k+1} + f_{4k} + f_{4k+1}$
$f_{4(k+1)} = 2 \cdot f_{4k} + 3 \cdot f_{4k+1}$
Da nach Induktionsvoraussetzung $3|f_{4k}$ und außerdem $3|3 \cdot f_{4k+1}$ ist, folgt $3|f_{4(k+1)}$

q.e.d.

Aufgrund des Induktionsanfangs und des Induktionsschritts folgt die Gültigkeit der Behauptung für alle $n \in N, n \geq 1$.

**Literaturverzeichnis**


- *Stephan, Holger*: Zahlenfolgen, Version 1.0, Juli 2001. Weierstraß-Institut für Angewandte Analysis und Stochastik, Berlin
https://www.wias-berlin.de/people/stephan/folgen.htm

- Fibonacci-Folge – Wikipedia (https://de.wikipedia.org/wiki/Fibonacci-Folge)